

EL FLUJO GEODÉSICO: LA FRIDA KAHLO DE LAS MATEMÁTICAS

XAVIER GÓMEZ-MONT

Centro de Investigación en Matemáticas
Apdo. Postal 402, CP36000; Guanajuato, Gto. México
E-mail: `gmont@fractal.cimat.mx`

INDICE

- 1 Geometría Euclidiana e Hiperbólica
 - 1.1 Distancias, longitudes, geodésicas y áreas
 - 1.1.1 La Geometría Euclidiana
 - 1.1.2 La Geometría Hiperbólica
 - 1.2 Subgrupos Discretos y Regiones Fundamentales
 - 1.2.1 El Caso Euclidiano
 - 1.2.2 El Caso Hiperbólico
 - 1.3 El Espacio Tangente Unitario y la Medida de Liouville
 - 1.3.1 El Caso Euclidiano
 - 1.3.2 El Caso Hiperbólico
- 2 El Flujo Geodésico
 - 2.1 El Flujo Geodésico en el Plano Euclidean
 - 2.2 El Flujo Geodésico Hiperbólico
 - 2.3 El Flujo Geodésico en el Toro Euclidiano
 - 2.4 El Flujo Geodésico en Superficies Hiperbólicas
 - 2.5 Hiperbolicidad del Flujo Geodésico Hiperbólico
 - 2.6 Estabilidad Estructural del Flujo Geodésico Hiperbólico
- 3 Ergodicidad del Flujo Geodésico
 - 3.1 Teorema de Recurrencia de Poincaré
 - 3.2 Teorema de Ergodicidad de Birkhoff
 - 3.3 Teorema de Ergodicidad de Hopf para el Flujo Geodésico Hiperbólico

El objetivo principal de estas notas es describir un ejemplo de un sistema dinámico, que entre más lo ve uno con cuidado, más intrigante resulta. Sobre todo quiero que se queden con la imagen de que es un cuadro, un cuadro colectivo que se ha ido

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$

pintando por generaciones. Aportaciones maravillosas que nadie controla, pero que superan cualquier expectativa individual. Cuadro que aún amerita algún retoque,...

La Geometría Euclidiana tiene la propiedad de que si dos cuerpos en movimientos rectilíneos uniformes son paralelos al moverse con tiempo positivo, entonces al invertir el tiempo y recorrer ahora con tiempo negativo, los movimientos serán paralelos también. Es decir, es imposible tener una línea en el plano que tenga una dirección límite al tender a $+\infty$ por un lado de la línea y al tender a $-\infty$ tenga otra dirección límite distinta que la inversa de la dirección original. Esto ya no sucede en la Geometría Hiperbólica. De hecho, en el plano hiperbólico hay una única geodésica que tenga dirección asintótica positiva y negativa dada, si las direcciones son distintas. Este hecho geométrico tan sencillo es la piedra angular para demostrar una serie de teoremas muy impresionantes (Ergodicidad de Hopf, Hiperbolicidad, Estabilidad Estructural de Anosov,...). Esta propiedad constituye una diferencia fundamental entre la Geometría Euclidiana y la Hiperbólica.

El Flujo Geodésico es un modelo que viene de la Geometría Diferencial (sección 2), y describe cómo evoluciona con el tiempo una partícula al viajar en ‘línea recta’ de acuerdo a la Geometría Riemanniana (aquí consideraremos exclusivamente la Geometría Euclidiana en dimensión 2, para motivar, y la Hiperbólica en dimensión 2, como la geometría básica de nuestro ejemplo).

Es decir, desde muy lejos, el flujo geodésico es un **modelo ‘evolutivo’** en el sentido de que consiste de un conjunto de ‘estados’ N y de una función

$$f : \mathbb{R} \times N \longrightarrow N \tag{1}$$

que nos indica el estado de la partícula $p \in N$ en t unidades de tiempo después $p_t := f(t, p)$. La exigencia obvia a pedirle a dicho modelo evolutivo es

$$p_{s+t} = (p_s)_t \quad \Longleftrightarrow \quad f(s+t, p) = f(t, f(s, p)) \tag{2}$$

condición que tiene muchas implicaciones maravillosas. Por ejemplo, dice que al recorrer de p_0 a p_s el camino que va a continuar no depende del camino ya recorrido de p_0 a p_s sino exclusivamente del valor en el extremo p_s . Es decir, esta ley de evolución no ‘lleva memoria’. Es instantánea. En el punto p_s para saber cómo continúa evolucionando, sólo toma uno en consideración el punto donde está uno, y no como fue que llegó uno allí. En la vida real, al evolucionar algo sí depende de como se llegó allí. Por ejemplo, tener 81 millones de dólares en un banco en Suiza, es una condición inicial para un sistema en evolución del que seguro sí va a depender de cual fue el movimiento que lo condujo a esa condición para decidir su evolución futura. Así que estamos haciendo una gran simplificación al suponer que el fenómeno evoluciona de acuerdo a (2). Así la propiedad (2) implica que la decisión a tomarse de cómo seguir es instantánea. Estos modelos se denominan **Sistemas Dinámicos**.

El que realmente dió los primeros trazos en nuestro cuadro fué Sir Isaac

Newton (1642-1727) con la siguiente simple y genial idea: Para describir un modelo evolutivo como (2) basta con conocer la ‘tendencia’ del movimiento de cada punto. Es decir, si divido un intervalo de tiempo $[0, t_0]$ en 10^n pedacitos bastará que yo resuelva 10^n problemas, pero cada uno sólo un micro-momento. Si lo micro, lo hacemos micrísimo de verdad al tender n a infinito, tenemos las ‘tendencias’ del movimiento. Así que para describir un Sistema Dinámico basta con dar las ‘tendencias’ X del movimiento evolutivo en cada punto de N , y la evolución (2) la obtenemos de resolver la ‘ecuación diferencial’

$$\frac{dp}{dt} = X(p) \tag{3}$$

Lo maravilloso de esto es que las ‘tendencias’ son bastante fáciles de escribir, y de hecho cualquier campo vectorial X en \mathbb{R}^m nos define una dicha ‘regla de tendencias’ y al resolver la ecuación (3) obtenemos nuestro Sistema Dinámico. Nuestra receta de evolución (2) de los puntos de N , queda ‘codificada’ en la ‘fórmula’ (3).

La Modelación Dinámica de Newton, que consiste en el campo de vectores, la ecuación diferencial (3) que define y el sistema dinámico que determina, es sin lugar a dudas uno de los logros más significativos de la Humanidad. Comparable a la Tabla de los Elementos de Mendeleev, a la Ley de Evolución de Darwin, a la Teoría de la Relatividad de Einstein. Debería haber en el UNIVERSUM una sala de la Modelación del Movimiento!!

El poder describir un sistema en evolución como (2) con la ecuación diferencial (3), es un gran logro de síntesis. Es poder expresar tanto, con tan poco!! De forma tan precisa. Es la Matematización de la premisa fundamental de la Ciencia: Describir las leyes de evolución de un fenómeno de tal forma que las condiciones iniciales determinen de manera única su evolución en el tiempo. Modelar una evolución entonces quiere decir determinar un espacio de posibles ‘estados’ con una ‘tendencia’ o campo de vectores.

Nuestro flujo geodésico es uno de estos sistemas dinámicos. Su definición geométrica se desarrolla en la sección 2. El espacio donde está definido el flujo geodésico consiste de ‘puntos con brújula’, es decir consiste de un punto y de un vector tangente unitario (sección 1.3). Este es un punto sencillo pero central: **El flujo geodésico Euclidiano no vive en el plano, dado que por un punto hay una infinidad de posibles movimientos rectilíneos uniformes (dado por las posibles direcciones), así que si el punto trae una brújula, entonces si sabrá como ‘fluir’: En la dirección que le dice su brújula, y al andar precisamente ‘no pierde la brújula’, es decir la brújula también evoluciona.** Así siempre sabe cómo seguir, dando origen a un flujo. La evolución de estos puntos con brújula es, diría Newton, en ‘movimiento rectilíneo uniforme’, por la línea marcada por la dirección de la brújula y partiendo del punto base. De seguro la comprensión del flujo geodésico nos dará un conocimiento profundo de la geometría de nuestro espacio base.

Es una sorpresa que cuando consideramos la Geometría Hiperbólica, el flujo geodésico en esta geometría tiene una descripción algebraica muy simple (sección 2.5): El espacio $N := SL(2, \mathbb{R})$ consiste del conjunto de matrices de 2×2 con coeficientes reales y determinante 1, y el campo de vectores es

$$X \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \quad (4)$$

El flujo que genera X se denomina el flujo geodésico, y se puede explícitamente resolver a través de la fórmula

$$f(t, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (5)$$

Para comprender la solución (5), vamos a imaginarnos que nuestro cuadro es un autorretrato, y la cabellera es el tema central de este. Imaginemos para ser precisos uno de los autorretratos de nuestra bien amada Frida Kahlo.

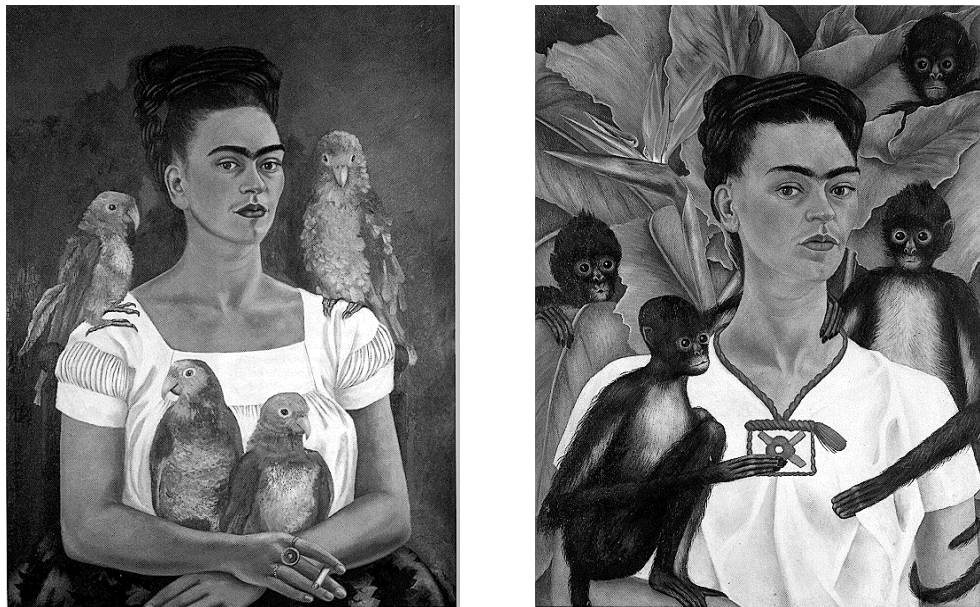


FIG. 1. Autorretratos de Frida Kahlo

Un cabello consiste de la trayectoria que el punto p describe al evolucionar p_t . Los distintos cabellos no se intersecan, todos van parejitos. Esto es consecuencia del Teorema de Existencia y Unicidad de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, y es un resultado de naturaleza local.

La primera observación no trivial que haremos del peinado de nuestro cuadro (el flujo geodésico Euclidiano e hiperbólico) es que es un peinado en capas. Es decir, los cabellos vienen agrupados en capas (como un cerro mostrándonos su evolución geológica). Estas laminaciones aparecen dado que las soluciones (5) del campo de vectores X en (4) las podemos agrupar de acuerdo a si comparten o no el mismo ‘destino’. Es decir, vamos a decir que las matrices A y B están en la misma capa si existe un valor $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(f(t, A), f(t - t_0, B)) = 0$$

Es decir, después de una translación por un tiempo t_0 que lleva A de ‘ventaja’, los destinos de A y B son cada vez más parecidos. La primera sorpresa es que cada ‘capa’ tiene dimensión 2 y que las distintas clases de equivalencia forman una foliación en superficies de nuestra 3-variedad $SL(2, \mathbb{R})$. Igualmente, podemos agrupar los cabellos tomando como clase de equivalencia el tener el mismo origen. Esto también es una laminación por superficies. La intersección de una laminación de cada clase, o sea de 2 superficies, nos da 1 cabello exactamente, que tiene dimensión 1. Cada cabello queda entonces determinado perfectamente por su origen y su destino. Estas laminaciones constituyen la herramienta básica, y se denominan las **foliaciones semi-estables y semi-inestables** (sección 2.5). **La comprensión de estas foliaciones y sus propiedades constituyen el ingrediente fundamental en la demostración del Teorema de Ergodicidad de Hopf.**

En $SL(2, \mathbb{R})$, la cabellera está perfectamente peinada, pero tenemos varias variantes de ‘Frida’. La vamos a formar a partir de la ‘tela’ de $SL(2, \mathbb{R})$ al dividir por un subgrupo discreto co-compacto (sección 2). Esto quiere decir que dentro de la 3 variedad $SL(2, \mathbb{R})$ vamos a escoger una ‘región fundamental’, que es un polígono $P \subset SL(2, \mathbb{R})$, con identificaciones entre las distintas caras de P . La ‘Frida’ es el espacio obtenido del polígono P al identificar las distintas caras, consistiendo de una variedad de dimensión 3, $M := P / \simeq$, con un peinado obtenido del peinado que teníamos en $SL(2, \mathbb{R})$. El pegado en la región fundamental está hecho con mucho cuidado, en particular el cabello no se quiebra al pegarse, al pasar por una de las caras del polígono. Es decir, el campo de vectores X que describe el peinado en $SL(2, \mathbb{R})$ descende a un campo de vectores \tilde{X} en M , que es C^∞ . Tenemos en M un ‘chongo’ maravilloso obtenido de la cabellera tan peinada de $SL(2, \mathbb{R})$.

La intriga de la cabellera de ‘Frida’ es comprender el ‘chongo’, es decir, como la cabellera va y viene por la cabeza, por donde pasa, qué tan seguido, y quién la acompaña, saber si está trenzado el cabello, o en capas.

Un punto clave para comprender el ‘peinado’ es la observación de que hay una medida natural en T^1S invariante por el flujo geodésico, denominada la medida de Liouville (sección 1.3). En caso que la superficie sea de área finita (por ejemplo si es compacta), entonces podemos utilizar la medida de Liouville para aplicar el Teorema de Recurrencia de Poincaré y el Teorema de Ergodicidad de Birkhoff (secciones 3.1 y 3.2). El primero nos dice que casi toda geodésica es recurrente (‘no se termina

de despegar del nido'), y el segundo nos dice que las geodésicas tienen propiedades estadísticas. El Teorema de Ergodicidad de Hopf, explicado en la sección 3.3, es el que nos dice que las propiedades estadísticas de las soluciones que garantiza el Teorema de Ergodicidad de Birkhoff son para casi toda geodésica las propiedades estadísticas de la medida de Liouville. **Esto implica que casi toda geodésica es densa en T^1S y equidistribuida de forma homogénea con respecto a la medida de Liouville. De hecho, nos dice que hay 2 tipos de superficies hiperbólicas:**

1) **El flujo geodésico es ergódico, es decir, casi toda órbita es estadísticamente distribuida en T^1S respecto a la medida de Liouville.**

2) **El flujo geodésico es disipativo, es decir, para casi toda dirección la geodésica con esa dirección no se acumula en T^1S , tiende a ' ∞ '.**

Estos Teoremas (sobre todo el de Hopf) nos muestran que el 'peinado' del flujo geodésico hiperbólico compite con los peinados magníficos de nuestras Tehuanas (que a su vez son las musas de Frida!!).

Pero piensa uno, tal vez esta Frida intrigante, desafiante, es un accidente de la naturaleza, insignificante en el tiempo, destructible fácilmente, temblorosa, efímera, ...mas no, no se va si pestañeamos, tampoco si soplamos, no es una pesadilla que desaparece al prender la luz, al invocar a mamá. Es, a pesar de su delicadeza tan maravillosa, extremadamente robusta, persistente, con presencia fuerte, con carácter marcado. En la sección 2.6 veremos que el **flujo geodésico hiperbólico es estructuralmente estable**, es decir, pequeñas perturbaciones no hacen más que moverle un poco el peinado, nunca despeinarla. Su peinado no sólo es bello y estructurado, sino robusto y persistente. La razón fundamental de esto es precisamente por ser un flujo hiperbólico (tener una descomposición de T^1S es suma directa de 3 factores, con sus foliaciones semi-estables y semi-inestables,...) y es un resultado que se debe a Anosov.

Los invito pues a pasearse por esta sala del Museo de la Matemática, desde nuestra butaca en el Mineral de Valenciana. Por supuesto, nuestro paseo será breve, no podrá contar con una descripción completa. Haremos como hacen los guías de turismo, pasaremos rápidamente, describiendo lo fundamental, **enfrentando al lector ante una obra maestra que ocupa un lugar principal en el Museo de la Matemática**. Al final, el lector podrá permanecer en el museo, paseando a su gusto, divagando enfrente de su imagen predilecta, gastar horas en la contemplación, en la meditación, en el estudio. La profundidad de su meditación dependerá por supuesto del empeño y dedicación que ponga por entender. Con suerte, y entre el público se encontrará el aprendiz que pintará el chango araña que le hace falta a nuestra Frida, a la derecha, por arriba, también viéndonos, sonriendo, con sarcasmo, con encanto, desafiando, ... lo ven?

1. Geometría Euclidiana e Hiperbólica

1.1 Distancias, longitudes, geodésicas y áreas

1.1.1 Geometría Euclideana

El modelo que usaremos de la Geometría Euclidiana es el plano \mathbb{R}^2 con su definición de distancia entre 2 puntos, proveniente del siempre presente e ingastable Teorema de Pitágoras:

$$dist_{euc}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

El producto interior Euclidiano

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle_{euc} := x_1 x_2 + y_1 y_2$$

es el ‘tensor de Riemann’ que define la estructura de variedad Riemanniana que tiene el plano Euclidiano. La noción de longitud Euclidiana de una curva γ es

$$L_{euc}(\gamma) := \int_{\gamma} |dz| \quad , \quad z := (x, y) \quad |dz| = |\sqrt{x^2 + y^2}|$$

Los caminos de longitud más cortos forman las líneas rectas, que al recorrerse con velocidad unitaria se escriben

$$t \longrightarrow (a_1, b_1) + t(a_2, b_2) \quad a_2^2 + b_2^2 = 1$$

Semejantemente tenemos una noción de área

$$A_{euc}(\Omega) := \int_{\Omega} |dz|^2 = dx \wedge dy$$

Un círculo Euclidiano de radio r consta de los puntos en \mathbb{R}^2 distantes r de un centro p_0 y tiene longitud $2\pi r$. Un disco de radio r consta de aquellos puntos de \mathbb{R}^2 que distan no menos que r de un centro p_0 , abarca $2\pi r^2$ de área.

Las isometrías del Plano Euclidiano son transformaciones biyectivas del plano, que preservan la distancia. El Plano Euclidiano tiene muchas isometrías, dado que una translación conveniente nos manda un punto dado en cualquier otro, y todavía después podemos rotar alrededor de este último punto.

1.1.2 La Geometría Hiperbólica

El modelo que usaremos de la Geometría Hiperbólica es el disco unitario $\Delta \subset \mathbb{C}$ del plano complejo, $|z| < 1$, en el cual vamos a introducir una métrica Riemanniana, que consiste de especificar como producto interior en el punto $z \in \Delta$ el producto Euclidiano usual $\langle \cdot, \cdot \rangle_{euc}$ multiplicado por un factor que tiende a cero al tender a la frontera $\partial\Delta$ de Δ :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_z := \frac{4}{(1 - |z|^2)^2} \langle \cdot, \cdot \rangle_{euc} \quad , \quad ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}$$

La longitud de una curva γ en el disco hiperbólico es

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}$$

Las geodésicas son por definición los caminos más cortos entre 2 puntos (toman el papel de las líneas rectas de la Geometría Euclideana) y en este caso corresponden a círculos que cortan ortogonalmente a la frontera $\partial\Delta$, incluimos también las rectas por el 0 como círculos degenerados.

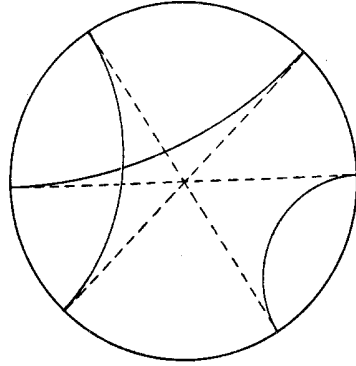


FIG. 2. Algunas geodésicas en el disco hiperbólico Δ

La distancia hiperbólica d_{hyp} es la mínima longitud hiperbólica entre todos los caminos que unen a sus dos puntos extremos. La distancia de z al 0 es

$$d_{hyp}(0, z) = \log \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)$$

Y más generalmente,

$$d_{hyp}(z, w) = \log \left(\frac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|} \right).$$

La longitud de un círculo hiperbólico de radio r es ([1] p.4)

$$L(C_r) = 2\pi \sinh(r) \sim \pi e^r \quad r \rightarrow \infty \quad (1.1)$$

y el área de un disco con radio r es

$$A(D_r) = 4\pi \sinh^2 \left(\frac{r}{2} \right) \sim L(C_r) \sim \pi e^r \quad r \rightarrow \infty$$

Las isometrías del disco hiperbólico son transformaciones biyectivas del disco, que preservan la distancia. El disco hiperbólico tiene muchas isometrías, dado que una translación conveniente nos manda un punto dado en cualquier otro, y todavía después podemos rotar alrededor de este último punto.

Comparemos un aspecto de las Geometrías Euclidianas e Hiperbólicas. Notemos que el orden de crecimiento de la longitud de los círculos y área de los discos Euclidianos crecen lineal y cuadráticamente en el radio. Sin embargo, en el caso hiperbólico los dos están creciendo de forma exponencial. Si se detienen a pensar un poquito en esto, creo que concordarán que en el plano hiperbólico hay más ‘espacio’ que en el Euclidiano. Si el mundo fuese hiperbólico, a lo mejor la maldición de Malthus (el crecimiento exponencial de la población) no sería tan trágica, pues tendríamos una cantidad exponencial de espacio para movernos (La verdadera tragedia de Malthus es que la Geometría en la que vivimos es la esférica, donde el área total está acotada!).

Riemann introdujo la curvatura, que puede ser considerada como una medida de qué tan lejos se está de la Geometría Euclideana. La curvatura del disco hiperbólico es -1 , a diferencia del Plano Euclidiano, que tiene curvatura 0 . El hecho de tener curvatura constante es lo que distingue a las Geometrías Euclidianas, Hiperbólica y Esférica de curvatura cero, negativa y positiva, respectivamente.

1.2. Subgrupos Discretos y Regiones Fundamentales

1.2.1. El Caso Euclidiano

Consideremos en el Plano Euclidiano \mathbb{R}^2 el subconjunto $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{C}^2$ de aquellos puntos que tienen coordenadas enteras. De hecho \mathbb{Z}^2 es un subgrupo y queremos considerar el ‘grupo cociente’ $T := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Para verlo geoméricamente, se introduce la noción de una región fundamental, que en este caso pudiera ser $[0, 1] \times [0, 1]$, y que se caracteriza de tener al menos un representante en cada clase de equivalencia, y sólo una en el interior $(0, 1) \times (0, 1)$.

Geoméricamente formamos el cociente al identificar los lados opuestos del rectángulo, y obtenemos una ‘dona’, o como decimos los matemáticos un ‘toro’, y que queda caracterizado al decir que es una superficie de ‘género 1’. Ahora podemos inducir la métrica Euclidiana de \mathbb{R}^2 a T , dado que la forma como pegamos la región fundamental son isometrías (translaciones) de la Geometría Euclideana. Lo que es lo mismo, el tensor de Riemann en \mathbb{R}^2 induce un tensor de Riemann en T , definiendo así una Geometría de Riemann, con sus nociones de distancia, área, geodésicas, etc. Por supuesto las geodésicas son la proyección de las líneas rectas de \mathbb{R}^2 al toro, pero en \mathbb{R}^2 la líneas rectas se van al infinito en ambas direcciones, sin embargo en el toro, estas se ‘enrollan’. Si piensa uno un poquito, puede uno convencerse que si la pendiente de la línea es un número racional, entonces la geodésica en T inducida por esta geodésica es cerrada, y el número de vueltas que dá alrededor del meridiano y del paralelo del toro antes de cerrarse depende de los números racionales que aparecen en la pendiente $(1, \frac{p}{q})$. En caso que la pendiente no sea racional, entonces la geodésica

inducida en el toro ‘se hace densa’ y nunca se cierra. Si tenemos dos líneas paralelas, entonces éstas van a inducir geodésicas en T que o coinciden o nunca se intersectan, y obtenemos una de la otra al hacer una translación. El conjunto de geodésicas paralelas definen una ‘foliación’ en T . Si consideramos las diferentes familias de líneas paralelas, obtendremos foliaciones en T que son muy distintas.

Claramente podemos escoger en vez de $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ un subgrupo de la forma $\mathbb{Z}(a_1, b_1) \oplus \mathbb{Z}(a_2, b_2) \subset \mathbb{R}^2$, donde (a_1, b_1) y (a_2, b_2) son vectores \mathbb{R} -linealmente independientes, y considerar el toro cociente, con todo y la métrica Euclidea. Todos estos toros son toros Euclidianos con la métrica inducida.

1.2.2. El Caso Hiperbólico

Consideremos ahora en el Disco Hiperbólico Δ un subconjunto $P \subset \Delta$ cuyas fronteras sean pedazos de geodésicas e isometrías de Δ que identifique a parejas de estos pedazos de geodésicas. Entonces podríamos identificar (o pegar o coser) P a lo largo de las geodésicas de tal forma que la métrica hiperbólica pase al cociente y que ‘cosa uno sin que quede mella’. Este tipo de pegado se puede hacer, y de hecho puede uno probar que toda superficie que tenga una métrica Riemanniana de curvatura -1 puede obtenerse de esta manera (Koëbe, Poincaré, 1880’s). De esta manera podemos entender todas las geometrías en superficies de curvatura -1 del conocimiento de la geometría del disco hiperbólico y de las reglas de pegado. Estas se denominan superficies hiperbólicas, y vienen provistas de su tensor de Riemann que tiene curvatura -1 . La noción de región fundamental nos dá una manera explícita de representación de las superficies hiperbólicas, y nos provee de un modelo universal (Δ), que si lo entendemos bien, podremos entonces entender todas las geometrías en las superficies hiperbólicas. En particular a todas las superficies compactas de género al menos 2 las podemos introducir un tensor de Riemann para hacerlas hiperbólicas.

Podemos introducir en P/\sim las nociones de distancia, área, geodésicas, etc. Por supuesto las geodésicas son la proyección de las geodésicas de Δ a P/\sim , pero en Δ las geodésicas se van al infinito en ambas direcciones, sin embargo en P/\sim , estas se pueden ‘enrollar’. Justamente lo que queremos describir es como se enrollan las geodésicas en el caso de superficies hiperbólicas.

1.3 El Espacio Tangente Unitario y la Medida de Liouville

Vamos a introducir una idea que no es clásica (a Euclides definitivamente no se le ocurrió, ni a Newton, ...), que es muy sencilla, y que será básica para la misma definición del flujo geodésico. Ésta es la de considerar en vez de puntos en el plano o en el disco, ‘puntos con brújula’. Es decir, quisiéramos considerar como ‘puntos distintos’ al mismo punto si es que sus ‘brújulas’ apuntan en distintas direcciones. Esto lo queremos hacer porque por cada punto pasan una infinidad de rectas/geodésicas, pero si consideramos un punto con brújula, entonces sólo pasa una recta/geodésica por ese punto y con esa dirección. Es decir, si queremos fluir por las geodésicas, necesitamos especificar por cuál, y esto lo podemos hacer si además de un punto

llevamos una dirección. Ésta es la idea el Espacio Tangente Unitario, que será una variedad de dimensión 3. Veremos también que hay una manera natural de introducir una métrica de Riemann, y la medida de volumen que de allí se deduzca, se denomina la medida de Liouville. Este personaje, la medida de Liouville, jugará un papel significativo en nuestra comprensión de los Teoremas Ergódicos del ‘flujo geodésico’. Con la medida de Liouville, estas propiedades ergódicas serán transparentes, sin ella, son inalcanzables matemáticamente.

1.3.1. El Caso Euclidiano

Los vectores unitarios $T^1\mathbb{R}^2$ en el plano Euclidiano \mathbb{R}^2 constituyen la 3 variedad $T^1\mathbb{R}^2$, donde sus ‘puntos’ son puntos en \mathbb{R}^2 ‘con brújula’, es decir,

$$T^1\mathbb{R}^2 := \{((x, y), (a_1, b_1)) / (x, y) \in \mathbb{R}^2, a_1^2 + b_1^2 = 1\}.$$

Los puntos de $T^1\mathbb{R}^2$ consisten de un punto de \mathbb{R}^2 y de un vector unitario que marca la dirección a la que apunta la brújula. Claramente es entonces difeomorfo a $\mathbb{R}^2 \times S^1$. Aquí podemos introducir la métrica Euclidiana en el factor \mathbb{R}^2 y la medida angular $d\theta$ en la variable angular, para obtener una métrica Riemanniana en $T^1\mathbb{R}^2$. El elemento de volumen que obtenemos, se denomina la medida de Liouville en $T^1\mathbb{R}^2$.

Semejantemente, dado un toro $T := \mathbb{R}^2 / \sim$ podemos construir $T^1T := T^1\mathbb{R}^2 / \sim = T \times S^1$ el espacio tangente unitario a S , que es una 3 variedad, y la medida de Liouville en $T^1\mathbb{R}^2$ induce una medida de Liouville en T^1T . Con esta medida, lo que medimos es la cantidad de volumen de puntos con brújula que tiene un subconjunto de T^1T . T^1T es una variedad compacta.

1.3.2. El Caso Hiperbólico

Los vectores unitarios $T^1\Delta$ en el disco hiperbólico Δ constituyen la 3 variedad $T^1\Delta$, donde sus ‘puntos’ son puntos en Δ ‘con brújula’, es decir,

$$T^1\Delta := \left\{ ((x, y), (a_1, b_1)) / (x, y) \in \Delta, \frac{4(a_1^2 + b_1^2)}{(1 - |x^2 + y^2|)^2} = 1 \right\}.$$

Los puntos de $T^1\Delta$ consisten de un punto donde está basado el vector unitario, que es el que marca la dirección en la que apunta la brújula. Claramente es entonces difeomorfo a $\Delta \times S^1$. Aquí podemos introducir la métrica hiperbólica en el factor Δ y la medida angular $d\theta$ en la variable angular para obtener una métrica Riemanniana en $T^1\Delta$. El elemento de volumen que obtenemos, se denomina la medida de Liouville en $T^1\Delta$.

Semejantemente, dada una superficie hiperbólica $S := P / \sim$ podemos construir $T^1S := T^1P / \sim$ el espacio tangente unitario a S , que es una 3 variedad, y la medida de Liouville en $T^1\Delta$ induce una medida de Liouville en T^1S . Con esta medida, lo que medimos es la cantidad de volumen de puntos con brújula que tiene un subconjunto de T^1S . Si la superficie S es compacta, entonces T^1S también lo será.

2. El Flujo Geodésico

Ahora queremos construir el flujo geodésico en un espacio con una Geometría Riemanniana. Iniciaremos describiendo el flujo geodésico Euclidiano, luego describiremos el hiperbólico y finalmente mencionaremos el esférico. Como veremos, el flujo geodésico más intrigante aparecerá en el modelo hiperbólico.

2.1. El Flujo Geodésico en el Plano Euclidiano

El flujo geodésico es el sistema dinámico que obtenemos al ‘fluir’ los ‘puntos con brújula’ en movimiento uniforme unitario, pasando por el punto de \mathbb{R}^2 y dirigiéndose en la dirección marcada por la brújula. Este movimiento es con todo y brújula, y de hecho, la aguja de la ‘brújula’ no se mueve al fluir. Matemáticamente queda descrito por el Sistema Dinámico

$$f : \mathbb{R} \times T^1\mathbb{R}^2 \longrightarrow T^1\mathbb{R}^2 \quad , \quad f(t, x, y, a_1, b_1) := (x + ta_1, y + tb_1, a_1, b_1).$$

Reintroduciendo nuestra analogía del retrato fase del Sistema Dinámico f con una cabellera. En el caso del flujo geodésico en el plano Euclidiano la cabellera viene peinada en capas: Las capas son los planos

$$P_{a,b} = \{(x, y, a, b) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \subset T^1\mathbb{R}^2$$

formado por líneas paralelas. Es decir, la noción de paralelismo nos induce una relación de equivalencia entre los puntos de $T^1\mathbb{R}^2$: Dos puntos con brújula son equivalentes si y sólo si las brújulas apuntan en la misma dirección. Esto es si y sólo si las dos líneas son paralelas.

Notemos el siguiente hecho geométrico interesante. Supongase que recorremos dos líneas rectas con velocidad unitaria

$$p(t) := (x_1 + ta_1, y_1 + tb_1) \quad , \quad q(t) := (x_2 + ta_2, y_2 + tb_2)$$

entonces la distancia entre los dos puntos como función de t es

$$|p(t) - q(t)| \leq |(x_1 - x_2, y_1 - y_2)| + |(a_1 - a_2, b_1 - b_2)t| \leq C + 2t.$$

Es decir, la distancia entre dos puntos que van en movimiento rectilíneo uniforme en el plano Euclidiano se separan a lo más de una forma lineal con respecto al tiempo, y se mantienen a distancia acotada (de hecho constante) si y sólo si los movimientos son en la misma dirección (incluyendo orientación). De hecho, la manera de separarse más rápido es que los movimientos vayan en sentido contrario.

Las capas del Peinado de la ‘Chata Quintana’ consta de los planos equidireccionales $P_{a,b}$ y está formado por aquellos cabellos cuya separación está acotada (de hecho se mantiene constante).

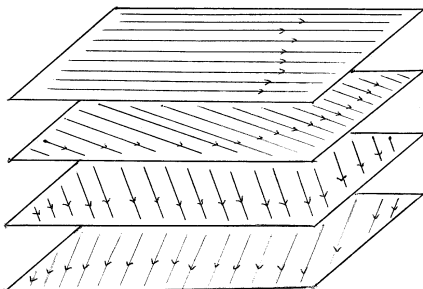


FIG. 3. El Flujo Geodésico Euclidiano.

Uno puede considerar la clase de equivalencia entre geodésicas, al decir que en tiempo positivo se mantengan a distancia acotada, u otra, al decir que en tiempos negativos la distancia se mantenga acotada. Es una propiedad específica del flujo geodésico Euclidiano que estas dos clases de equivalencia coinciden, es decir para semi-líneas rectas Euclidenas que son paralelas positivamente sus semi-líneas rectas complementarias también son paralelas positivamente. Pero como veremos a continuación, esto ya no es cierto para la Geometría Hiperbólica.

2.2. El Flujo Geodésico Hiperbólico

Semejantemente a como introdujimos el flujo geodésico Euclidiano, podemos introducir el flujo geodésico hiperbólico. Noten como una geodésica queda completamente determinada por un punto por el que pasa y la dirección en la que va. El espacio donde está soportado el flujo geodésico es el espacio tangente unitario $T^1\Delta$. El flujo geodésico es el sistema dinámico que obtenemos al ‘fluir’ los ‘puntos con brújula’ en movimiento uniforme unitario, pasando por un punto de \mathbb{R}^2 y dirigiéndose sobre la geodésica que va en la dirección marcada por la brújula. Este movimiento es con todo y brújula, y de hecho, la aguja de la ‘brújula’ al moverse por la geodésica, siempre va paralela a esta. Matemáticamente define un sistema dinámico

$$f : \mathbb{R} \times T^1\Delta \longrightarrow T^1\Delta.$$

Notemos el siguiente hecho geométrico interesante, y novedoso pues es muy distinto de lo que sucede en el mundo hiperbólico. Supóngase que recorremos dos geodésicas con velocidad unitaria

$$p(t) := (x_1(t), y_1(t)) \quad , \quad q(t) := (x_2(t), y_2(t))$$

entonces la distancia entre los dos puntos como función de t al tender t a infinito, es de una de las dos formas excluyentes:

1) $\lim_{t \rightarrow +\infty} d_{hip}(p(t), q(t)) = 0$, en cuyo caso tiende a cero exponencialmente rápido con t . En este caso las dos geodésicas son paralelas y llegan a la frontera de Δ para $t > 0$ al mismo punto en $\partial\Delta$.

2) $\lim_{t \rightarrow +\infty} d_{hip}(p(t), q(t)) = \infty$. En este caso las dos geodésicas no son paralelas y llegan a $\partial\Delta$ en puntos distintos.

Es decir, la distancia entre dos puntos que van en movimiento rectilíneo uniforme en el disco hiperbólico se separan de una forma exponencial con respecto al tiempo si las geodésicas no son paralelas, y se aproximan exponencialmente rápido si y sólo si son paralelas.

Reintroduzcamos la analogía del retrato fase del Sistema Dinámico f con una cabellera. En el caso del flujo geodésico hiperbólico en el disco, la cabellera viene peinada también en capas. Las geodésicas que llegan en tiempo $+\infty$ a un mismo punto en $\partial\Delta$ es una capa. Es decir que aquí también las geodésicas se asocian por si son paralelas o no (que por definición quiere decir que llegan a la frontera del disco Δ a un mismo punto).

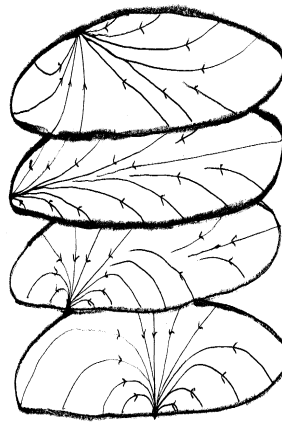


FIG. 4 FLUJO GEODÉSICO EN EL DISCO HIPERBÓLICO

La diferencia significativa con el caso Euclidiano es que ahora hay dos capas distintas, las de las paralelas en tiempo positivo, y las paralelas en tiempo negativo. No coinciden!!! Este hecho, junto con la posibilidad de construir una geodésica (de hecho única) que tienda a puntos predeterminados en $\partial\Delta$ son los ingredientes que introdujo Eberhard Hopf (1940's) a la ya mencionada medida de Liouville para poder contemplar la ergodicidad del flujo geodésico en superficies hiperbólicas compactas de una manera geométrica tan clara.

2.3. El Flujo Geodésico en el Toro Euclidiano

Consideremos el toro Euclidiano $T := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. El flujo geodésico definido en $T^1\mathbb{R}^2$ induce de manera natural el flujo geodésico en T^1T . (El campo de vectores que define el flujo geodésico es invariante por la acción natural de \mathbb{Z}^2 en $T^1\mathbb{R}^2$, y por

consiguiente define un campo de vectores en T^1T que es el generador infinitesimal del flujo geodésico en T^1T).

Al fluir en T^1T los puntos con brújula, la manecilla de la brújula se mantiene constante, y por consiguiente el ángulo se convierte en una 'integral del movimiento', es decir, las 'capas del peinado' están formadas por los 'subtoros' de T^1t formado por las direcciones paralelas.

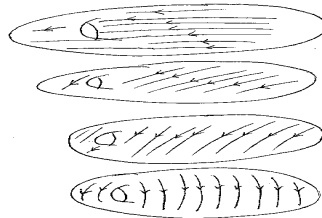


FIG. 5. El Flujo Geodésico en un Toro Euclidiano.

2.4. El Flujo Geodésico en Superficies Hiperbólicas

Ahora consideremos una superficie hiperbólica compacta S , que tiene su invariante topológico el género $g \geq 2$. El flujo geodésico en $T^1\Delta$ induce el flujo geodésico en T^1S que es compacta. Para imagen geométrica, otra vez nuestra Frida nos proporciona ojos con que (ad)mirar:



FIG. 6. El Flujo geodésico en $T^1\Delta$ y en T^1S .

En la izquierda tenemos el flujo geodésico en $T^1\Delta$ y a la derecha el flujo geodésico en T^1S . La ergodicidad del flujo geodésico en T^1S implica que un cabello ‘general’ está densamente distribuido en el peinado. Este tipo de teoremas, tendrá el lector que coincidir conmigo, son tan impresionantes y sorprendentes como los ojos que nos acaba de prestar Frida (o no?). El resto de estas notas se dedicarán a dar alguna idea matemática del flujo geodésico en superficies hiperbólicas.

2.5. Hiperbolicidad del Flujo Geodésico

Para comprender una propiedad básica que hace distintos a los flujos Euclidiano e Hiperbólico, iniciemos con una analogía con Algebra Lineal. Consideremos una matriz A de 3×3 con determinante 1 (esto corresponde al hecho que el flujo geodésico preserva la medida de Liouville). El producto de sus valores propios es 1. Ahora supóngase que sabemos que un espacio propio asociado a $+1$ (la dirección tangente al flujo) entonces las opciones que hay para los otros 2 valores propios incluyen:

- 1) 1 es el único valor propio (caso Euclidiano).
- 2) Los valores propios distintos de 1 son reales, uno con norma mayor que 1 y el otro con norma menor que 1 (caso hiperbólico).
- 3) Valores propios complejos conjugados con norma 1 (caso esférico).

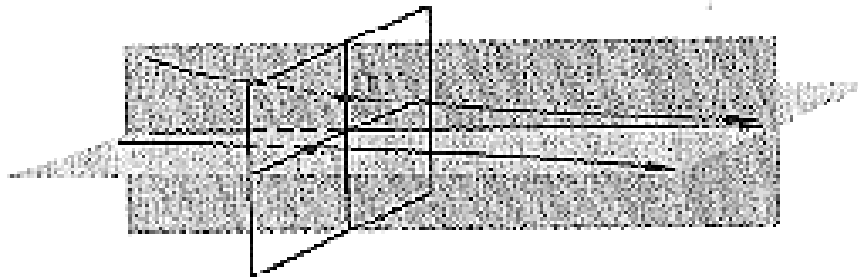


FIG. 7. Variedades estables e inestables, aproximándose o alejándose.

Esta diferencia es justamente lo que hace al flujo geodésico ‘hiperbólico’. Lo que necesitamos es encontrar una descomposición del espacio tangente de T^1S en suma directa de 3 espacios lineales, uno tangente al flujo, y los otros dos siendo invariantes por el flujo geodésico, en uno el flujo geodésico expande y en el otro contrae. Para encontrar esta descomposición, basta con que la encontremos en $T^1\Delta$, dado que esta descomposición descenderá a T^1S . En $T^1\Delta$ la podemos ver geoméricamente.

Consideremos en el disco Δ un punto al infinito $z_0 \in \partial\Delta$ y consideremos todas las geodésicas que terminan en z_0 . Ya comentamos que si andamos en cualesquiera 2 geodésicas de esta familia, entonces la distancia entre las geodésicas está tendiendo

a 0 exponencialmente rápido al tender t a infinito. La unión de estas geodésicas, al variar el punto z_0 nos da una ‘foliación’ de T^1S por superficies (que se ilustra en la Figura 4), denominada la **foliación centro-estable** \mathcal{F}^{cs} . Las hojas de esta foliación son unión de geodésicas (las que terminan en algún z_1) y por consiguiente son invariantes por el flujo geodésico (después de todo, fluir por el flujo geodésico quiere decir avanzar por la geodésica, así que si un conjunto es unión de geodésicas, entonces es invariante por el flujo geodésico!). Si invertimos la dirección, obtenemos la **foliación centro-inestable** \mathcal{F}^{ci} . Las hojas de esta foliación son unión de geodésicas que comienzan ($t \rightarrow -\infty$) en algún $z_2 \in \partial\Delta$. Esta foliación también es invariante por el flujo geodésico. La intersección de 2 hojas de cada una de estas foliaciones es exactamente una geodésica, dado que consistirá de aquellos puntos que ‘nacen’ en z_2 y ‘mueren’ en z_1 , habiendo tan solo 1 geodésica en el disco hiperbólico con esa propiedad. Así vemos que las dos foliaciones son transversales, siendo la intersección la foliación de dimensión 1 asociada al retrato fase del flujo geodésico.

Consideremos la foliación centro-estable \mathcal{F}^{cs} y una hoja \mathcal{L}_{z_1} . Queremos introducir en esta hoja una estructura interesante, invariante por el flujo geodésico (que llamaremos el ‘flujo horocíclico’). La estructura consiste primeramente de considerar las curvas que son ortogonales a la familia de geodésicas que terminan en z_1 . El conjunto de estas curvas son los círculos $C \subset \Delta$ que son tangentes a $\partial\Delta$ en z_1 . Esto se ve porque es cierto para la geodésica $\langle -1, 1 \rangle$. Luego consideramos un automorfismo conforme T de Δ que deje fijo z_0 . Entonces T manda la familia de círculos por z_0 en Δ en sí mismo, y así como a la familia de curvas ortogonales, que son las geodésicas que mueren en z_0 . La parte del círculo C en Δ es $C - \{z_1\}$ y es una curva de longitud infinita. Por consiguiente podemos obtener un flujo completo en $T^1\Delta$ al fluir por cada horociclo, yendo a velocidad unitaria (con respecto a la métrica hiperbólica). Este es el **flujo horocíclico**, que de hecho está definida en $T^1\Delta$, dado que lo acabamos de definir para la hoja $\mathcal{L}_{z_1} \subset T^1\Delta$, para z_1 arbitrario. Denotemos por Y el generador infinitesimal de este flujo. Y es el campo de vectores tal que al resolver la ecuación $\dot{x} = Y(x)$ obtenemos el flujo horocíclico.

Considerar estos círculos surge también en la siguiente situación: Los puntos $p, q \in \mathcal{L}_{z_1}$ pertenecen al mismo círculo si y sólo si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_{hip}(f(t, p), f(t, q)) = 0$$

Es decir, si tomamos 2 puntos en la misma geodésica y nos movemos con el flujo geodésico se mantienen a distancia constante al fluir con el flujo geodésico. Esto quiere decir, que si tomamos dos geodésicas distintas en una misma hoja \mathcal{L}_{z_1} y p un punto en una de las geodésicas, entonces existe un único punto en la otra geodésica tal que la distancia entre el flujo geodésico de estos 2 puntos tiende a 0 al tender t a infinito. Los otros puntos de la geodésica acompañan no a p , sino a un otro punto $f(t_0, p)$ de la primera geodésica. El flujo horocíclico dá las isometrías entre las diferentes geodésicas especificando cuál es el ‘compañero’ de ‘ p ’ en las otras geodésicas. Los otros puntos, aunque tengan el mismo ‘destino’ que p (que es ir a z_1 no lo acompañan, pues van atrasados (o adelantados), pues están acompañando a $f(t_0, p)$ y no a p !

El flujo horocíclico que acabamos de describir era para t tendiendo a infinito. Obtenemos otro flujo horocíclico al considerar t tendiendo a menos infinito. Es decir, si tomamos una hoja del flujo semi-inestable \mathcal{L}_{z_2} ahora consiste de los vectores tangentes unitarios a las geodésicas en Δ que pasan por $z_2 \in \partial\Delta$, orientados para esta ‘naciendo’ en z_2 . Igualmente obtenemos un flujo horocíclico, pero ahora sus órbitas son los puntos que al tender t a $-\infty$ acompañan a p , i.e. nacieron en el mismo lugar en el mismo momento. El generador infinitesimal de este flujo geodésico denotémoslo por Z . Es un campo de vectores definido en T^1S .

De esta forma hemos obtenido 3 campos vectoriales en T^1S , X es el generador infinitesimal del flujo geodésico, y los dos flujos horocíclicos Y y Z . Hay una manera muy sencilla de describirlos y de obtener sus propiedades. Esta consiste en ver que puede uno ‘parametrizar’ la 3-variedad $T^1\Delta$ por el grupo $PSL(2, \mathbb{R})$. Usando esta parametrización, los campos de vectores X , Y y Z se convierten en campos vectoriales en $PSL(2, \mathbb{R})$ invariantes por translación izquierda, y por consiguiente quedan determinados por especificar el campo de vectores sobre $Id \in PSL(2, \mathbb{R})$. Haciendo todos los cálculos resulta que

$$X \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una vez identificados estos 3 campos vectorial, lo importante es la estructura de Algebra de Lie que tienen, información que queda condensada en las fórmulas

$$[X, Y] = -2Y, \quad [X, Z] = 2Z, \quad [Y, Z] = X.$$

Los que realmente son importantes para lo que nos ocupa aquí son el 2 y el -2 , pues (crease o no, o más bien sorpréndanse!!) esto implica que el flujo de X está contrayendo la dirección dada por Y de forma exponencial, con coeficiente -2 en el exponente. Semejantemente el flujo de X está expandiendo la dirección dada por Z . Esta propiedad es exactamente la condición que se pide para que un flujo (el flujo geodésico en este caso) sea hiperbólico: Que podamos descomponer el fibrado tangente a la variedad como la suma directa de tres sub-fibrados, en este caso son los generados por X , por Y y por Z , donde el flujo geodésico es tangente al primero, contrae al segundo uniformemente (-2 en nuestro caso) y expande al tercero (2 en nuestro caso).

2.6 Estabilidad Estructural del Flujo Geodésico

Teorema: El flujo geodésico en una superficie compacta hiperbólica es estructuralmente estable, es decir, cualquier pequeña perturbación es topológicamente equivalente al flujo inicial.

En particular, una pequeña variación de la métrica, no induce cambios topológicamente significativos en el flujo geodésico. Decimos que el flujo definido por el campo

de vectores X en M es de **Anosov** si podemos encontrar una descomposición de TM en tres sumandos continuos, uno formado por los múltiplos de X , y los otros 2 sumandos son invariantes por el flujo y en el primero el flujo está contrayendo y en el segundo expandiendo. (La variedad total M es un conjunto hiperbólico).

La demostración de este Teorema (que nos mostró Christian Bonatti durante el curso) consiste de 2 pasos:

1) La noción de Hiperbolicidad es una propiedad abierta.

2) El conocido ‘Shadowing Lemma’, que traducimos en México como el ‘Lema del Guardaespaldas’ (por razones obvias):

Lema del Guardaespaldas: Si X es un flujo de Anosov en una variedad compacta, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier camino γ definido en \mathbb{R} y que haga ángulo menor que δ con X , entonces existe una única órbita del flujo de X que se queda a distancia menor que ϵ de γ para todo \mathbb{R} . La δ es una función continua de ϵ .

Suponiendo estos dos puntos. Entonces tenemos que una pequeña perturbación X' del flujo geodésico X sigue siendo hiperbólica (de Anosov), y por consiguiente le podemos aplicar el Lema del Guardaespaldas tanto a X como a X' . Esto prueba que las órbitas de X (las geodésicas) están en correspondencia biyectiva con las órbitas de X' , por el puro hecho de mantenerse a distancia menor que ϵ . Lo único que falta por decir es cómo mandamos cada geodésica en la órbita correspondiente de X' y checar que todo se ‘pega’ bien.

La primera propiedad queda muy claro si introduce uno el concepto de conos alrededor de X , que se contraen o expanden con el flujo de X . Con este concepto, es fácil ver que la condición de hiperbolicidad es abierta.

Para demostrar el Lema del Guardaespaldas, hay que utilizar las foliaciones semi-estables y semi-inestables, utilizando la hiperbolicidad y la convergencia de la serie geométrica (!) encontramos la órbita buscada.

3. Ergodicidad del Flujo Geodésico Hiperbólico

Como la medida de Liouville es invariante con respecto al flujo geodésico, podemos aplicarle teoremas generales. Estos son los Teoremas de Recurrencia de Poincaré y de Ergodicidad de Birkhoff. Para hacer esto, es necesario suponer que el área de la superficie es finita. Sin embargo, para demostrar el Teorema de Ergodicidad de Hopf, utilizaremos propiedades explícitas del flujo geodésico hiperbólico.

3.1 Teorema de Recurrencia de Poincaré

Dado un sistema dinámico $\frac{dp}{dt} = X(p)$ definida en N , el conjunto $\omega(p)$ del punto $p \in N$ consiste de aquellos puntos $q \in N$ tales que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} d(x(t), q) = 0$$

donde $x(t)$ es la solución del sistema dinámico con condición inicial $x(0) = p$. Es decir, el conjunto $\omega(p)$ son aquellos puntos que visitar la órbita de p cada vez más cerca, al tender t a infinito. Decimos que un punto $p \in N$ es **recurrente** si $p \in \omega(p)$, es decir, si ‘no termina de despegarse del nido’.

Teorema de Recurrencia de Poincaré (versión probabilista): Sea T una transformación que preserva la medida del espacio de probabilidad (X, \mathcal{A}, μ) . Si para $A \in \mathcal{A}$ denotamos por A_0 al conjunto formado por los puntos $x \in X$ tales que $T^m(x) \in A$ para un número infinito de enteros positivos, entonces $A_0 \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) = \mu(A_0)$.

Teorema de Recurrencia de Poincaré (versión topológica): Sea X un espacio métrico separable y $T : X \rightarrow X$ una transformación medible (pre-ímagenes de Borelianos son Borelianos). Sea μ una probabilidad sobre los conjuntos Borelianos de X invariante por T . Entonces $\mu(\{x / x \notin \omega(x)\}) = 0$. O sea, casi todo punto es recurrente.

3.2 Teorema de Ergodicidad de Birkhoff

Teorema Ergódico Básico: Sea T una transformación que preserva la medida del espacio de probabilidad (X, \mathcal{A}, μ) y sea $B \in \mathcal{A}$. Sean

$$S_n(x) := \#\{i : 0 \leq i < n, T^i(x) \in B\}$$

$$A_n(x) := \frac{1}{n} S_n(x) \quad x \in X$$

entonces para μ -casi todo punto $x \in X$ tenemos que el siguiente límite existe:

$$A(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x).$$

Una transformación que preserva medida es **ergódica** si las únicas función medible $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, T -invariante, son las constantes.

Teorema Ergódico de Birkhoff: Sea T una transformación que preserva la medida del espacio de probabilidad (X, \mathcal{A}, μ) . Si $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)$$

existe para casi todo $x \in A$ respecto a la medida μ y la define una función en $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

3.1 Teorema de Ergodicidad de Hopf

Una **superficie hiperbólica** (no necesariamente compacta, pero si conexa) es de la **primera clase** si el conjunto de geodésicas divergentes (que no tienen puntos de acumulación en S al tender a $t + \infty$) tiene medida angular 0. Esta clase contiene a todas las superficies compactas. Si esto es cierto en un punto p , es cierto para cualquier punto $q \in S$. Las superficies que no son de la primera clase, son de la **segunda clase**.

Teorema Ergódico de Hopf: Para superficies hiperbólicas tenemos:

2) Si S es de la primera clase entonces el flujo geodésico es ergódico, es decir, para $g(p)$ y $h(p) > 0$ integrables con respecto a la medida de Liouville en $T^1 S$ entonces

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\int_0^\tau g(f(t, p)) dt}{\int_0^\tau h dt} = \frac{\int_{T^1 S} g(f(t, p)) dm}{\int_{T^1 S} h dt}$$

para casi todo $p \in T^1 S$ en el sentido de la medida de Liouville. Lo mismo vale si $\tau \rightarrow -\infty$.

2) Si S es de la segunda clase entonces el flujo geodésico es disipativo, es decir, para casi toda $v_p \in T^1 S$ con respecto a la medida de Liouville el flujo iniciando en v_p no tiene puntos de acumulación en S , tanto positiva como negativamente.

La demostración se basa en el siguiente:

Lema Principal ([3]): Sean B_+ y B_- dos subconjuntos medibles con respecto a la medida m de Liouville en $T^1 S$, con S una superficie hiperbólica completa conexa. Supongamos que estos conjuntos satisfacen:

- 1) B_+ y B_- son invariantes por el flujo geodésico.
- 2) Para cada órbita en B_+ cualquier otra órbita del flujo geodésico que sea positivamente asintótico a ella también pertenece a B_+ . Para cada órbita en B_- cualquier otra órbita del flujo geodésico que sea negativamente asintótico a ella también pertenece a B_- .
- 3) El conjunto de puntos en $B_+ - B_-$ y en $B_- - B_+$ tienen medida 0.

Entonces, bajo estas condiciones, ó B_+ y B_- tienen los dos medida 0 ó sus complemento en $T^1 S$ tienen medida 0.

REFERENCIAS

- [1] Bedford, T., Keane, M., *Ergodic Theory, Symbolic Dynamics and Hyperbolic Spaces*, Series C, Oxford Science, 1991..
- [2] Cornfeld, I., Fomin, S., Sinai, Y., *Ergodic Theory*, Springer Verlag, 1982.
- [3] Hopf, E., *Ergodic Theory and the Geodesic Flow on Surfaces on Constant Negative Curvature*, Bull. AMS **77** (1971), 863-877.
- [4] Mañé, R., *Teoria Ergódica*, Projeto Euclides, IMPA, 1983.
- [5] Verjovsky, A., *Introducción a la Geometría y Variedades Hiperbólicas*, CINVESTAV, 1982.