

Metodos Bayesianos para Procesamiento de Imágenes

José Luis Marroquín

Escuela de Probabilidad y Estadística 2007

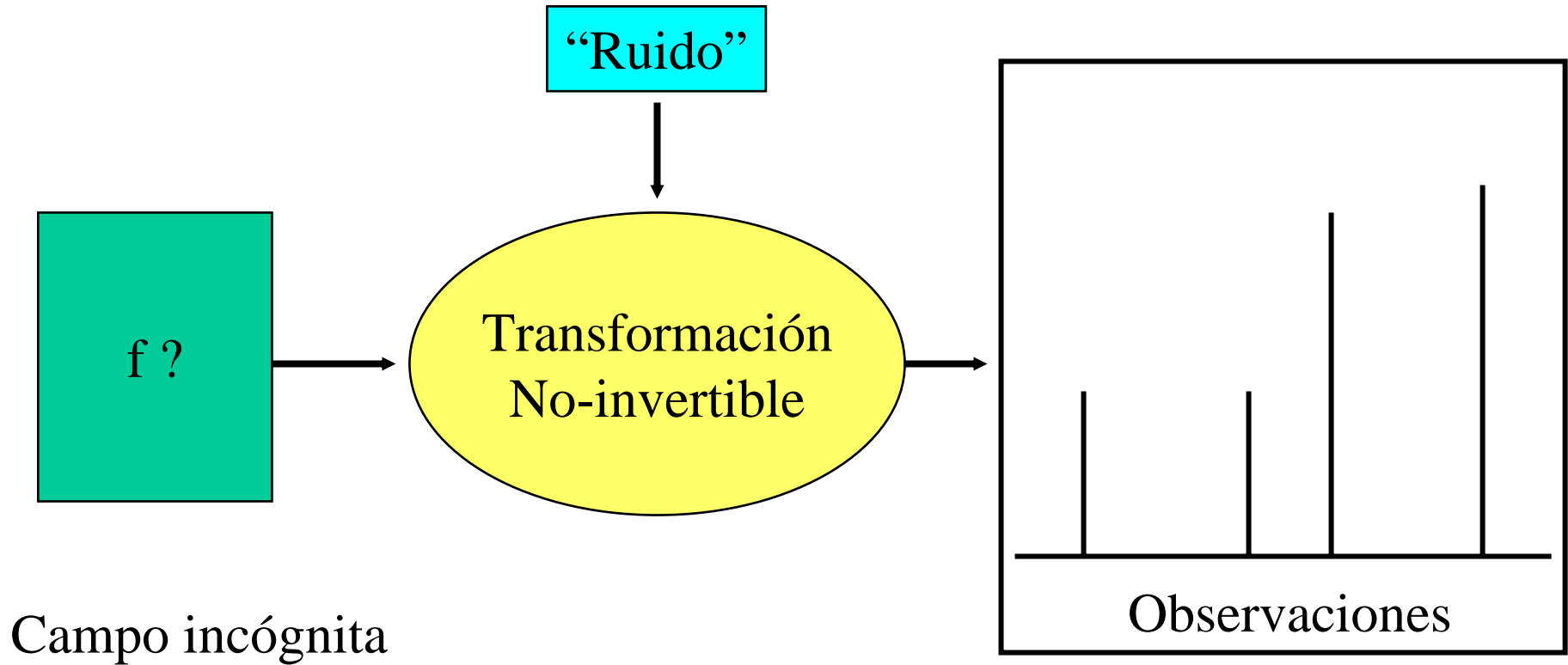
Centro de Investigación en Matemáticas
Guanajuato, México

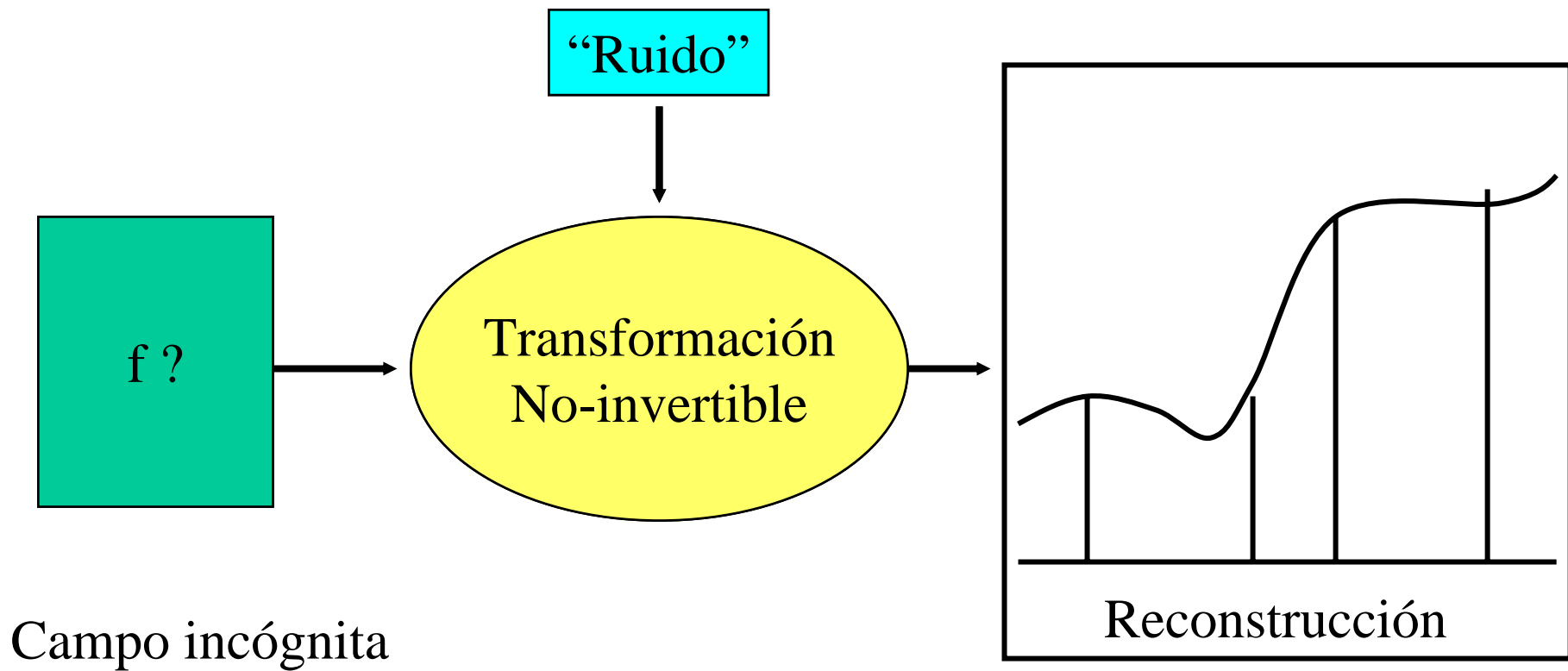


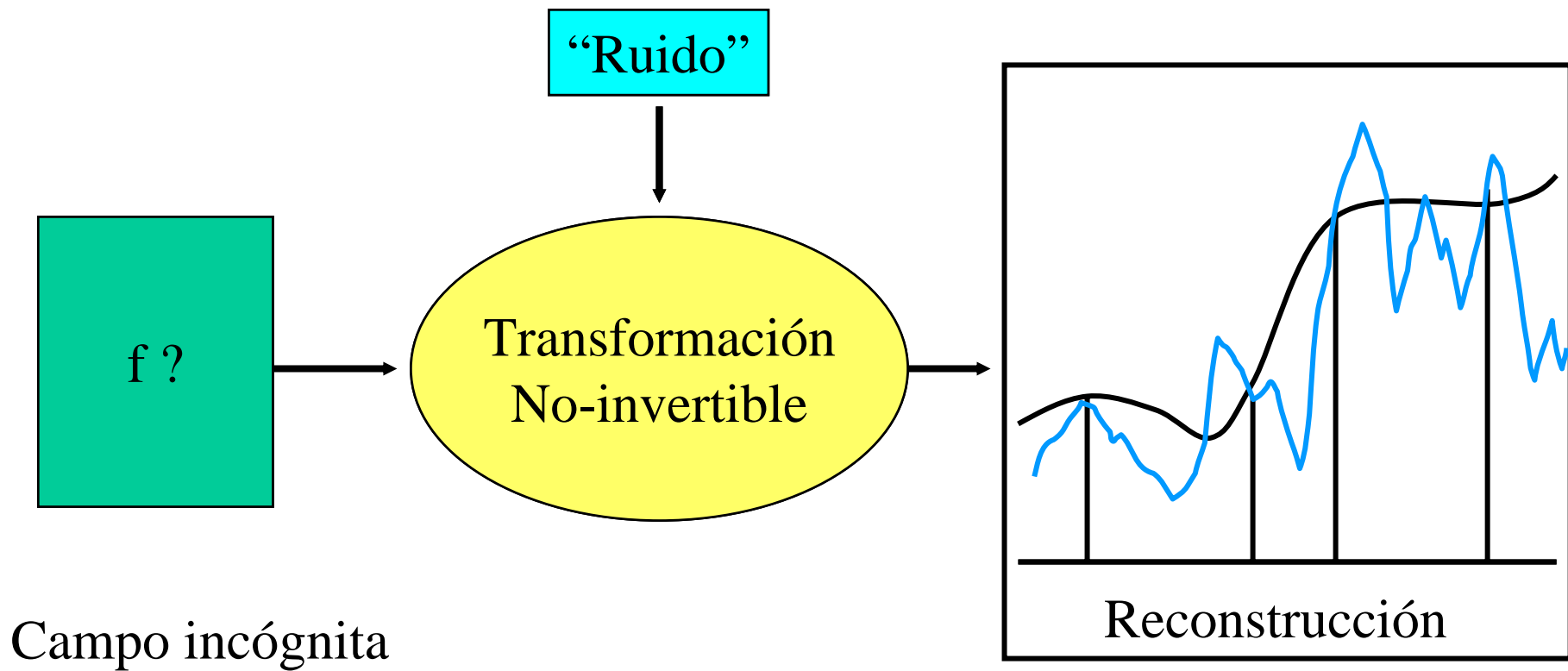
EN GENERAL, LOS PROBLEMAS DE VISIÓN
COMPUTACIONAL Y PROCESAMIENTO DE
IMÁGENES ESTÁN “MAL PLANTEADOS” EN
UN SENTIDO MATEMÁTICO

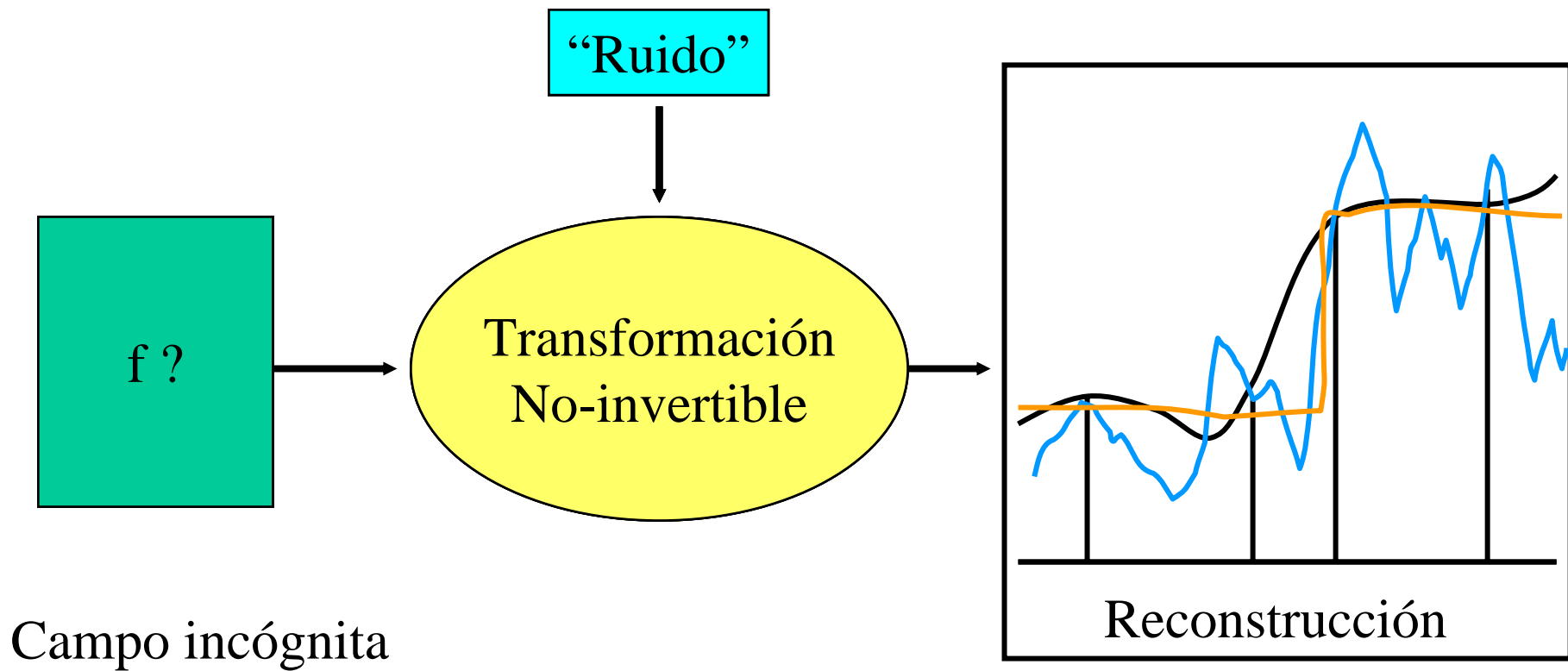
LAS OBSERVACIONES NO DETERMINAN
DE MANERA ÚNICA LA SOLUCIÓN

Problemas “Mal Planteados”

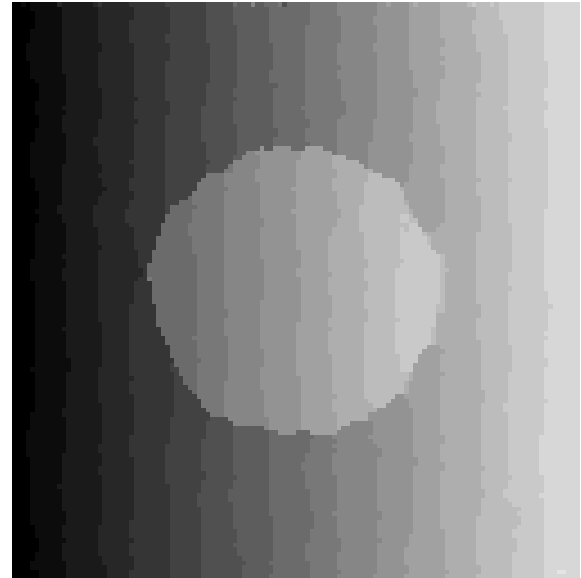
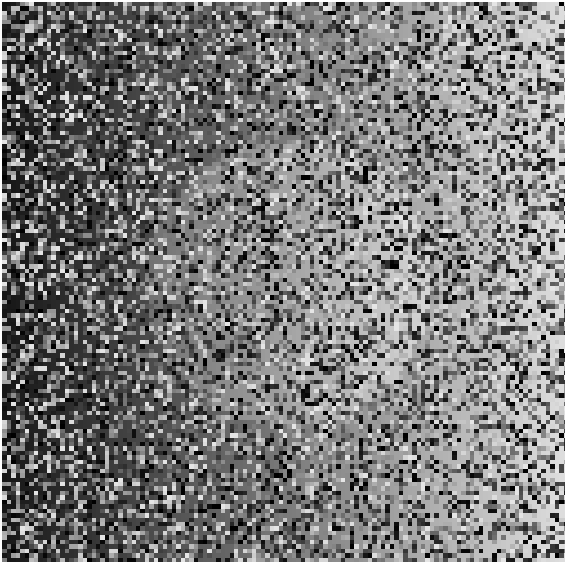




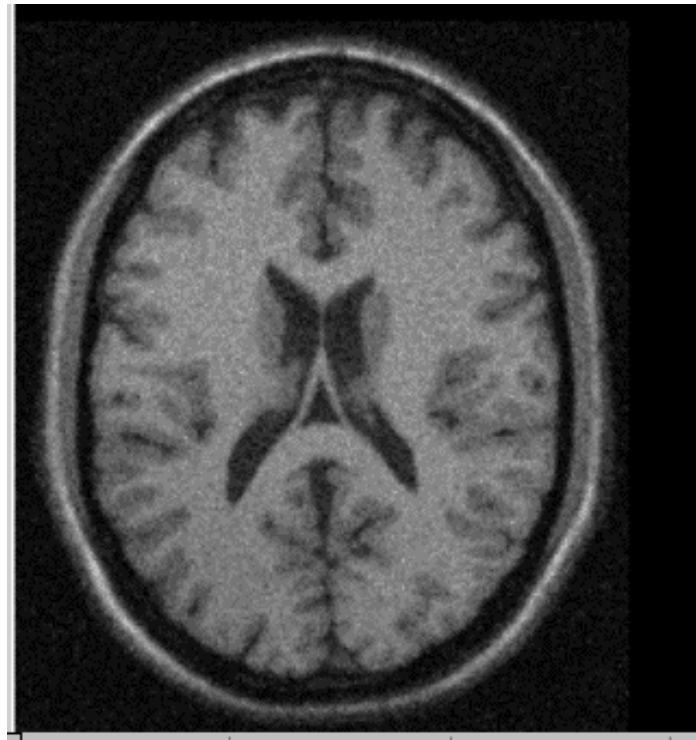




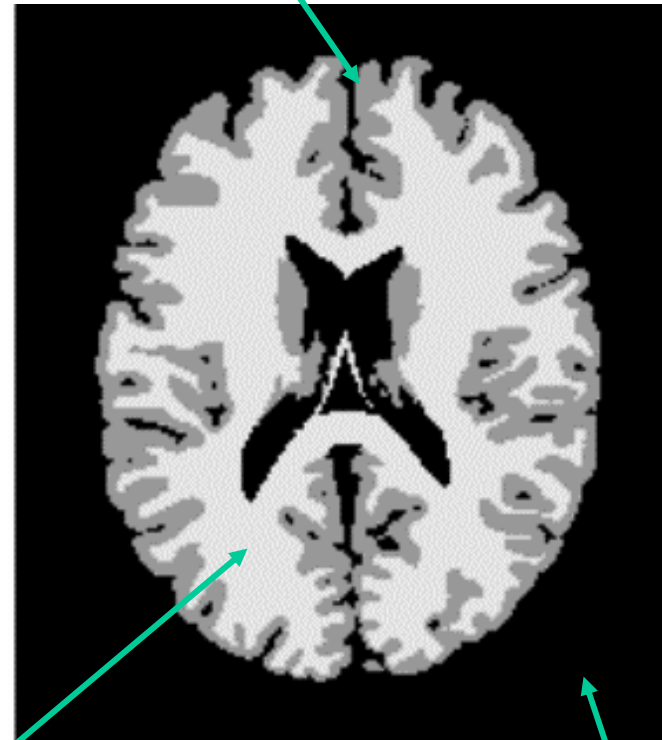
Restauración (Eliminación de Ruido)



Segmentación



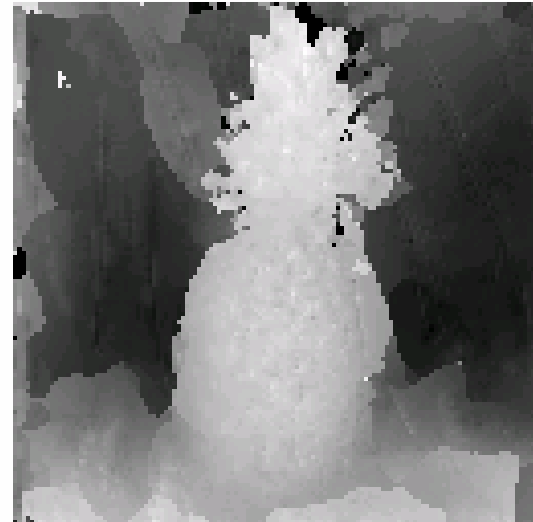
Materia gris



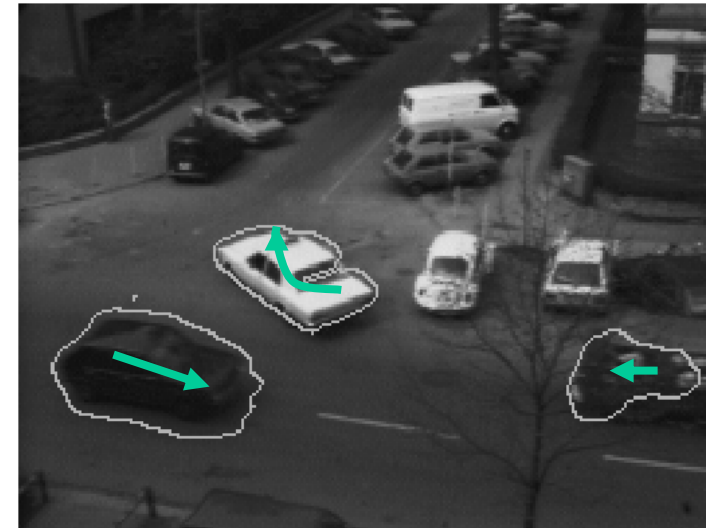
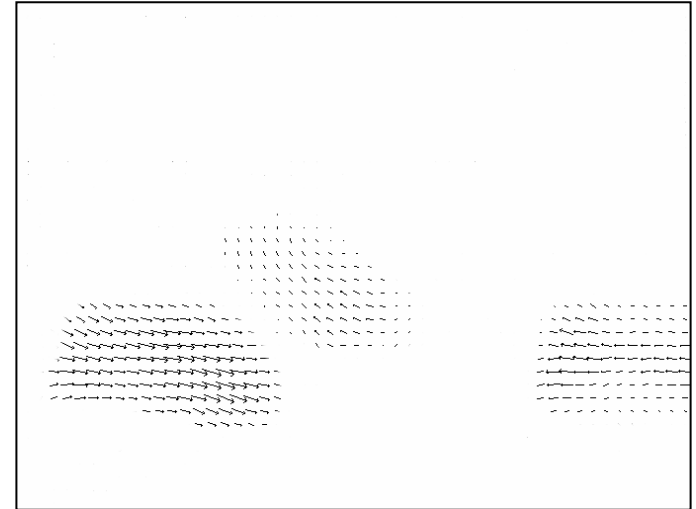
Materia blanca

Fondo

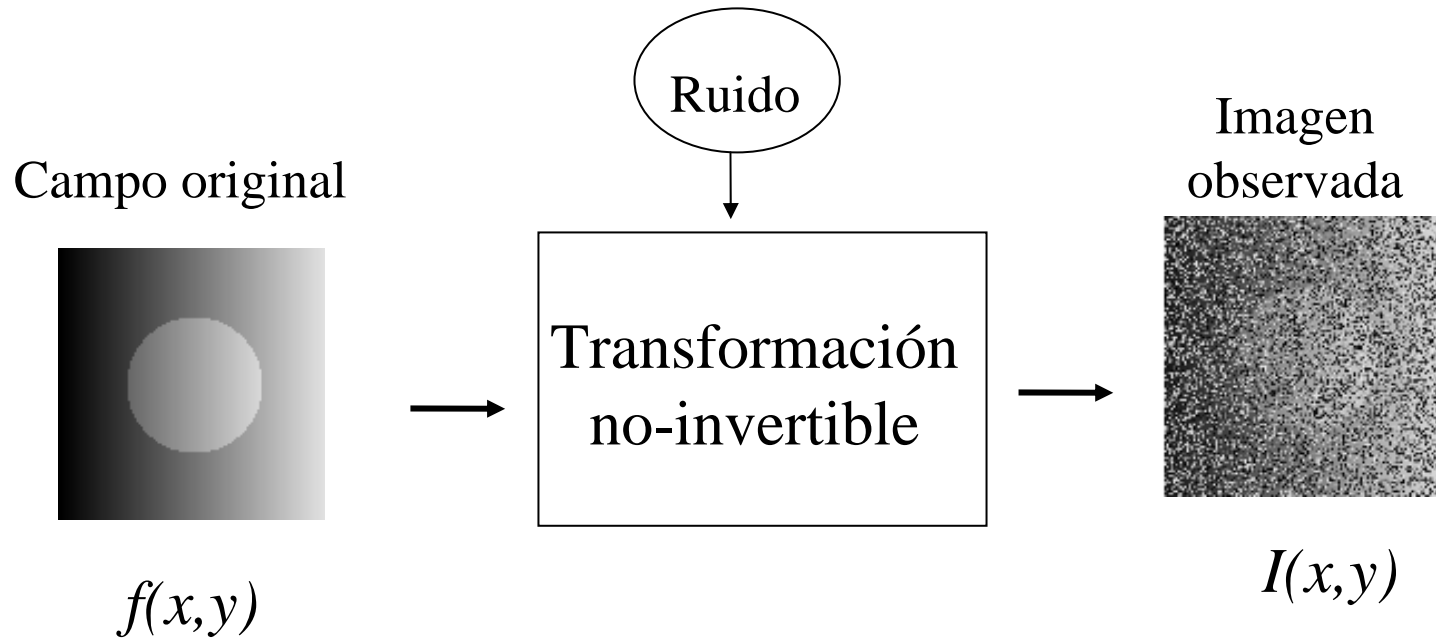
Recuperación de profundidad a partir de pares estereoscópicos



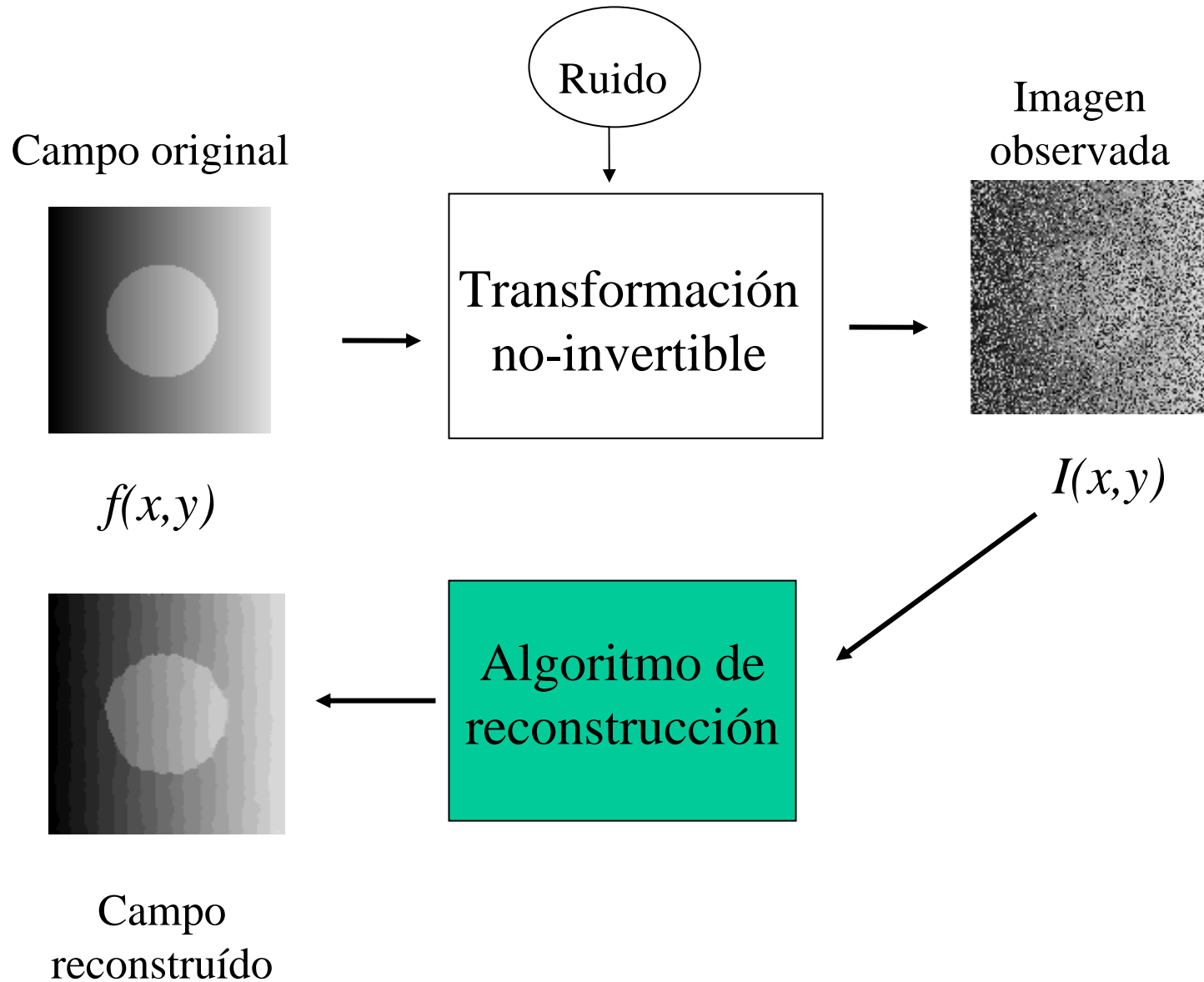
Reconstrucción del campo de movimiento



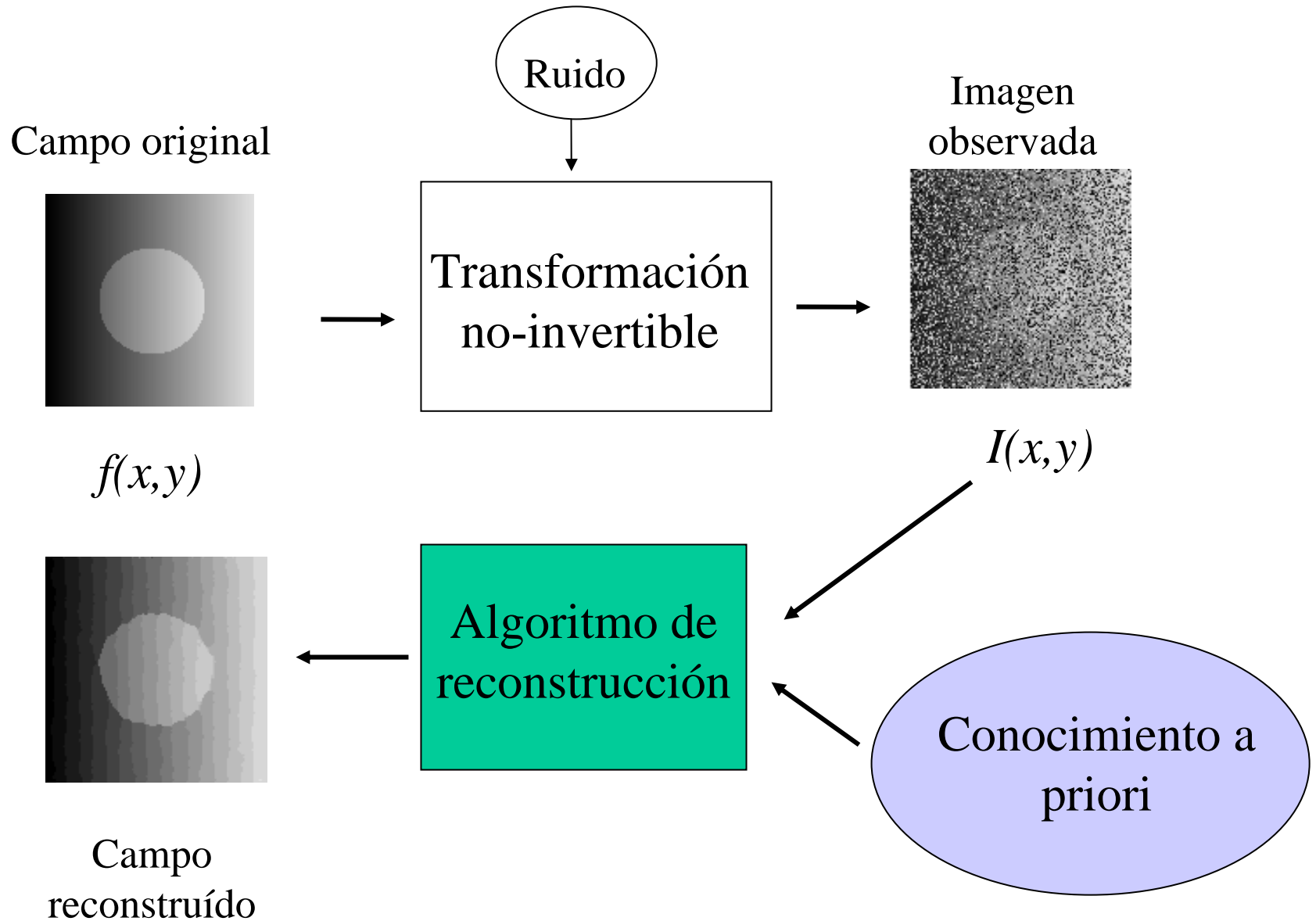
Problema de reconstrucción

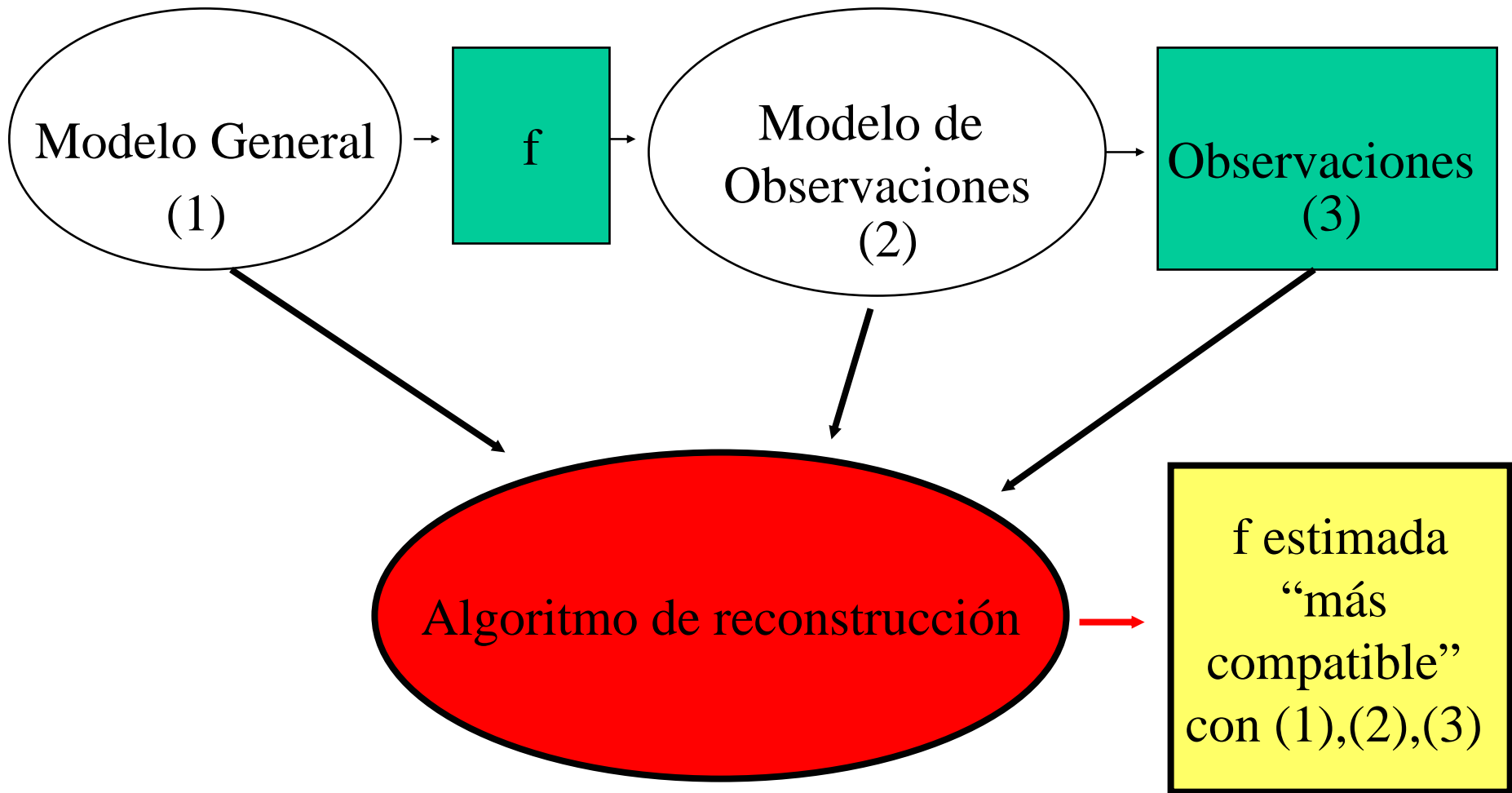


Problema de reconstrucción

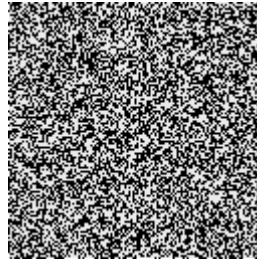


Problema de reconstrucción

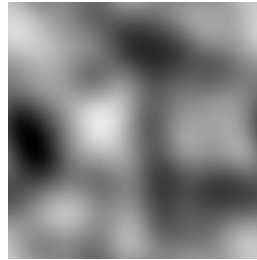




Modelos
generales de
Imágenes



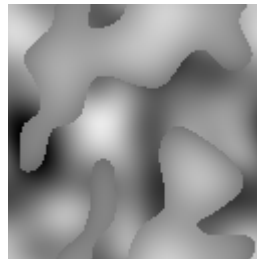
Proporciones dadas



Suave



Constante a trozos



Suave a trozos

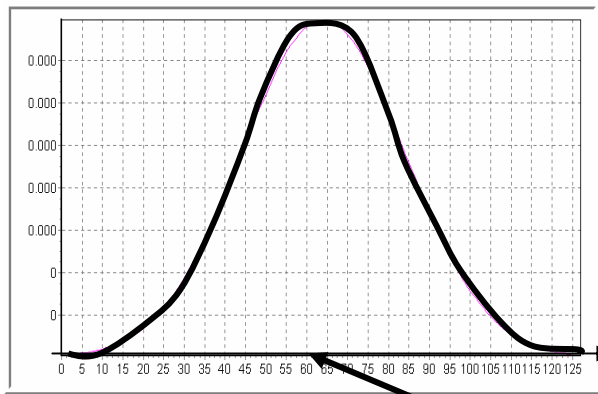
Estimación Bayesiana: Método formal
para incluir conocimiento a priori en el
algoritmo de reconstrucción.

Basado en las ideas del Reverendo Thomas Bayes (1701-1761)

Estimación Bayesiana:

$$g = f + n$$

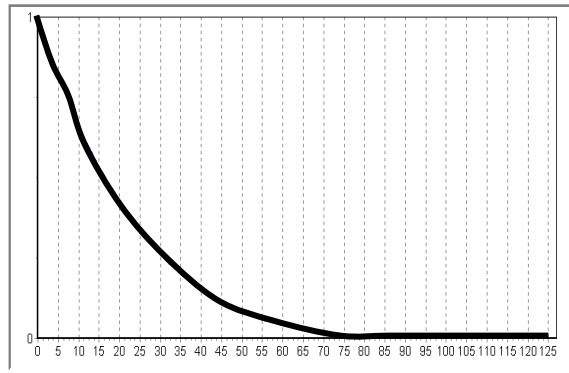
Estimar f dado g



$$P(g|f) = P_n(g-f)$$

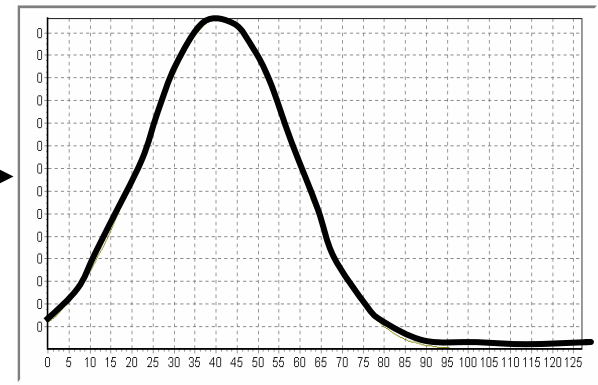
f

g



$P(f)$

Ejemplo: $g = 60$
 $P(g | f=20) = P(n=40)$

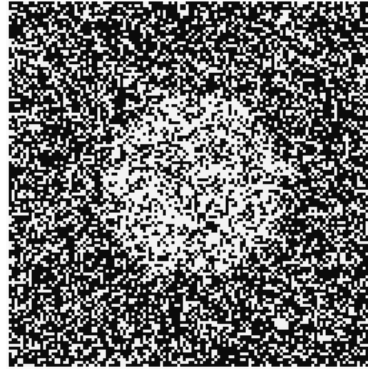


$$P(f|g) = P(g|f) P(f) / Z$$

Ingredientes para la Estimación Bayesiana:

- Modelo de las observaciones (verosimilitud)
- Modelo del campo que se desea estimar (distribución a priori)
- Encontrar la distribución a posteriori (regla de Bayes)
- Especificar la función de costo.
- Encontrar el estimador óptimo (MAP, MPM,...)

Ejemplo: restauración de imágenes suaves:



Modelo de observaciones: $g(x) = f(x) + n(x)$

$n(x)$: variables aleatorias normales, independientes, con media 0

$$P(n(x) = w) = \frac{1}{Z} \exp\left[-w^2 / 2\sigma^2\right]$$

Verosimilitud: $P(g | f)$

Modelo de observaciones: $g(x) = f(x) + n(x)$

$$P(g(x) | f(x)) = P(n(x) = g(x) - f(x))$$

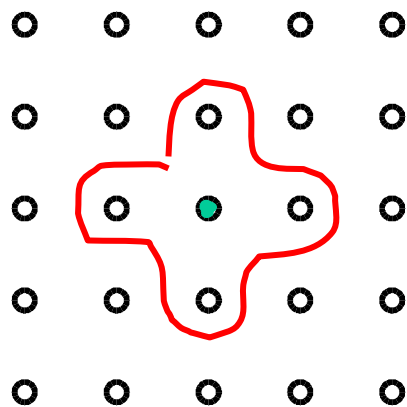
$$= \frac{1}{Z} \exp\left[-(g(x) - f(x))^2 / 2\sigma^2\right] \quad \text{Porque } n(x) \text{ es normal}$$

Puesto que $n(x)$ es independiente de $n(y)$

$$P(g | f) = \prod_x P(g(x) | f(x))$$

$$P(g | f) = \frac{1}{Z'} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_x (g(x) - f(x))^2\right]$$

MODELOS DE IMÁGENES: CAMPOS ALEATORIOS MARKOVIANOS



Definición: F es un CAM (MRF) en una retícula L con respecto a un sistema $\{N_r, r \in L\}$ si y sólo si

$$P(f_r | f_s, s \neq r) = P(f_r | f_s, s \in N_r)$$

Teorema de Hammersley-Clifford : F es un CAM en una retícula L con respecto a un sistema de vecindades

$$\{N_r, r \in L\}$$

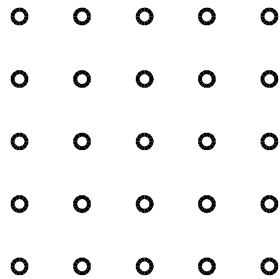
Si y sólo si

$$\Pr(F = f) = \frac{1}{Z} \exp \left[- \sum_C V_C(f) \right]$$

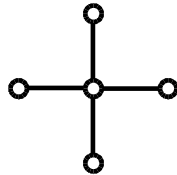
Donde la suma se toma sobre todas las pandillas (cliques) del sistema de vecindades.

MODELOS DE IMÁGENES: CAMPOS ALEATORIOS MARKOVIANOS

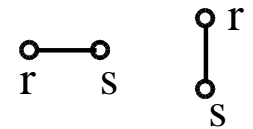
Retícula de
píxeles



Sistema de vecindades



Cliques



Funciones de potencial

$$V_{rs}(f_r, f_s)$$

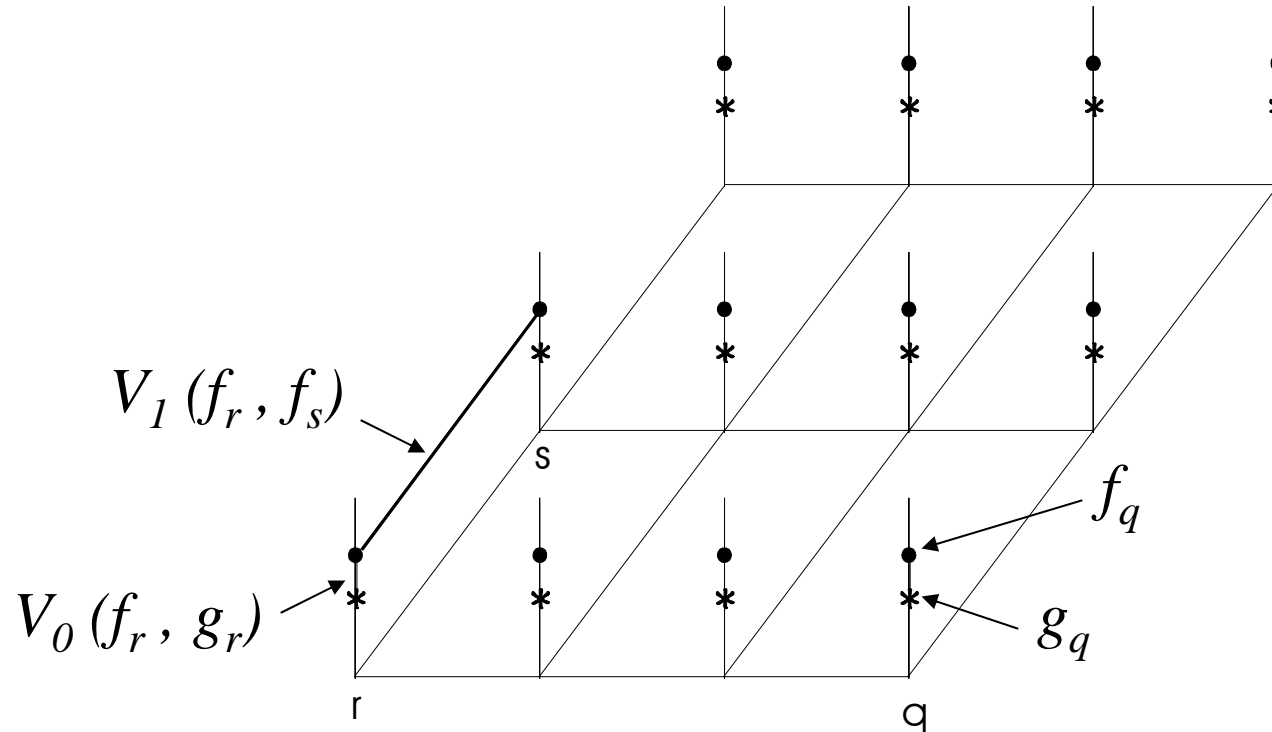
Distribución Gibbsiana a priori:

$$P_f(f) = \frac{1}{Z_f} \exp[-\beta \sum_C V_C(f)]$$

Asigna una probabilidad a cada posible imagen:

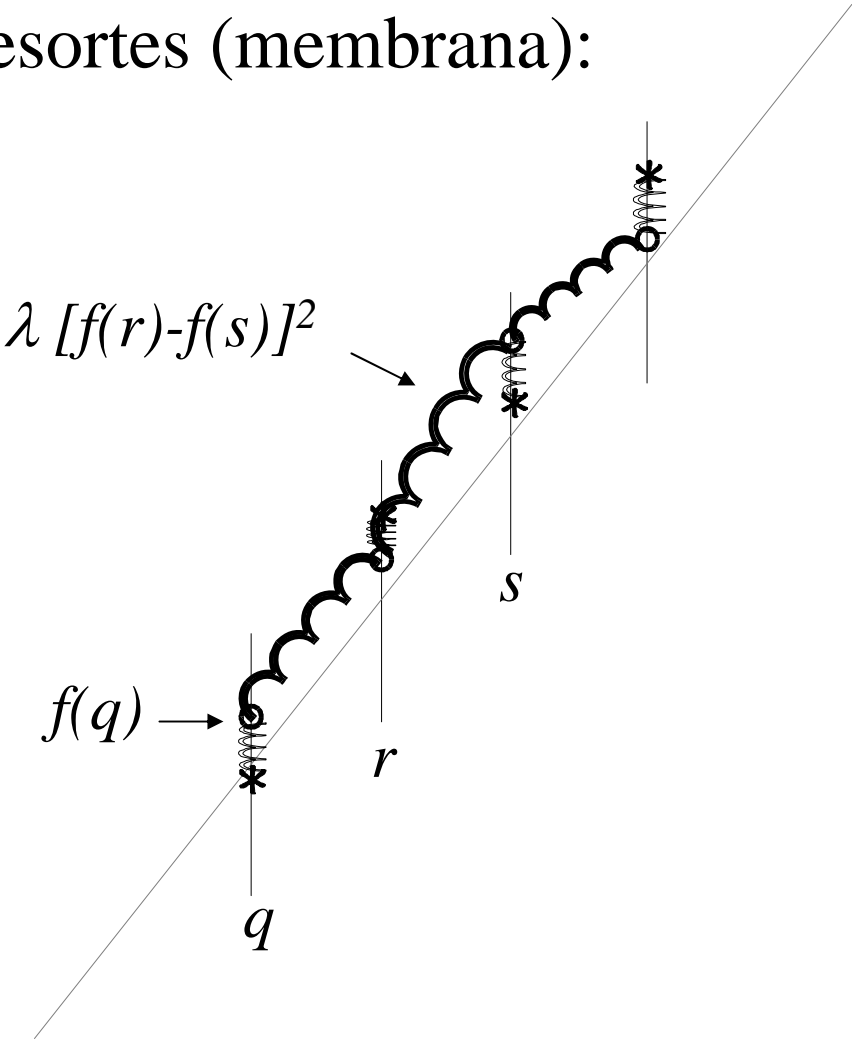
$$\Pr(\text{img}) = 0.014$$

Imágenes ↔ Sistemas de partículas



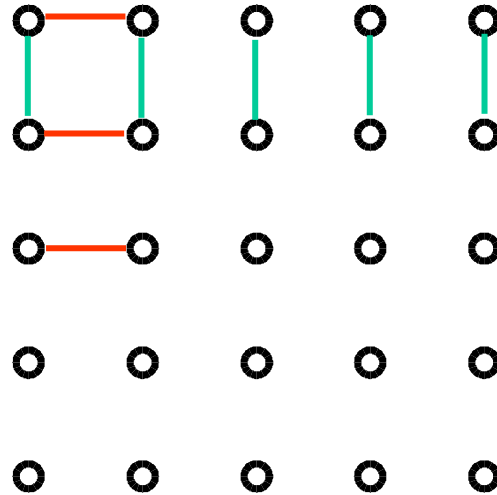
$$U(f) = \sum_r V_0(f_r, g_r) + \sum_{\langle r, s \rangle} V_1(f_r, f_s) + \sum_{\langle r, s, t \rangle} V_2(f_r, f_s, f_t) + \dots$$

Modelo de resortes (membrana):



Modelo a priori para f que especifique suavidad:

$$P(f) = \frac{1}{Z''} \exp \left[-\lambda \sum_{\langle x, y \rangle} (f(x) - f(y))^2 \right]$$



Ruido Gaussiano de observación y modelo de membrana a priori

Verosimilitud: $\frac{1}{Z_L} \exp \left[- \sum_r |g(r) - f(r)|^2 \right]$

A priori: $\frac{1}{Z_P} \exp \left[-\lambda \sum_{\langle r,s \rangle} |f(r) - f(s)|^2 \right]$

Distribución a posteriori:

$$P(f | g) = P(g | f)P(f)$$

A posteriori:

$$\frac{1}{Z} \exp \left[- \sum_r |g(r) - f(r)|^2 - \lambda \sum_{\langle r,s \rangle} |f(r) - f(s)|^2 \right]$$

U(f)

Parámetro que controla la suavidad

Estimador Bayesiano Optimo

- Definir una función de costo apropiada:

$$C(f, \hat{f}) = \begin{cases} (f - \hat{f})^2 & \text{(media)} \\ |f - \hat{f}| & \text{(mediana)} \\ 1 - \delta(f - \hat{f}) & \text{(moda)} \end{cases}$$

- Definir: $Q(\hat{f}) = E [C(f, \hat{f})] = \int_{\Omega} C(f, \hat{f}) dP_{f|g}(f)$

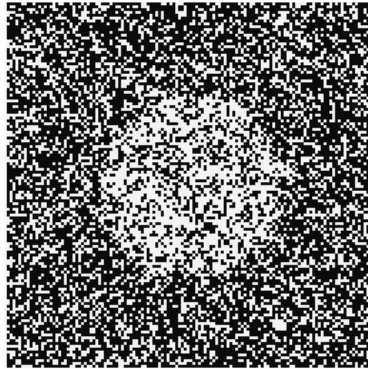
- Calcular el estimador óptimo: $\hat{f}^* \longrightarrow \min_{\hat{f}} Q(\hat{f})$

Iteración de Gauss-Seidel:

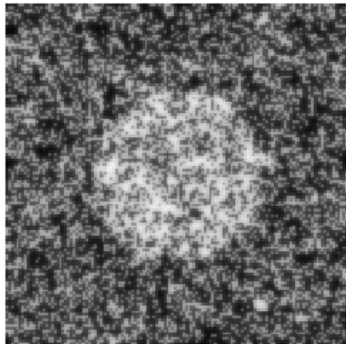
$$f^{(t+1)}(r) = \frac{g(r) + \lambda \sum_{s \in N_r} f^{(t)}(s)}{1 + \lambda |N_r|}$$

Donde N_r es la vecindad del sitio r

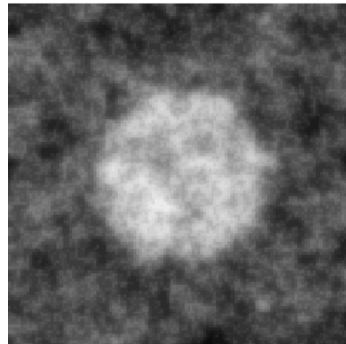
Reconstrucciones con el modelo de resortes



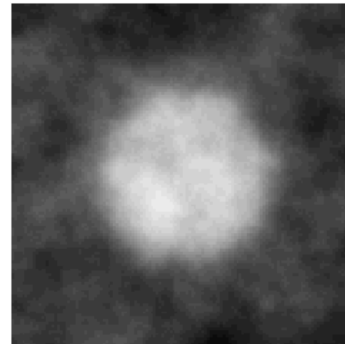
Observaciones



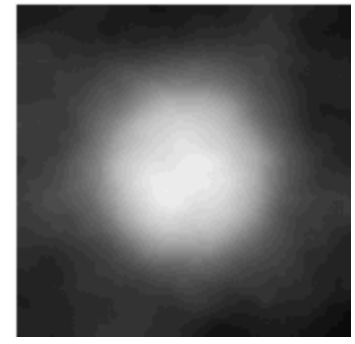
$\lambda =$ 1



10

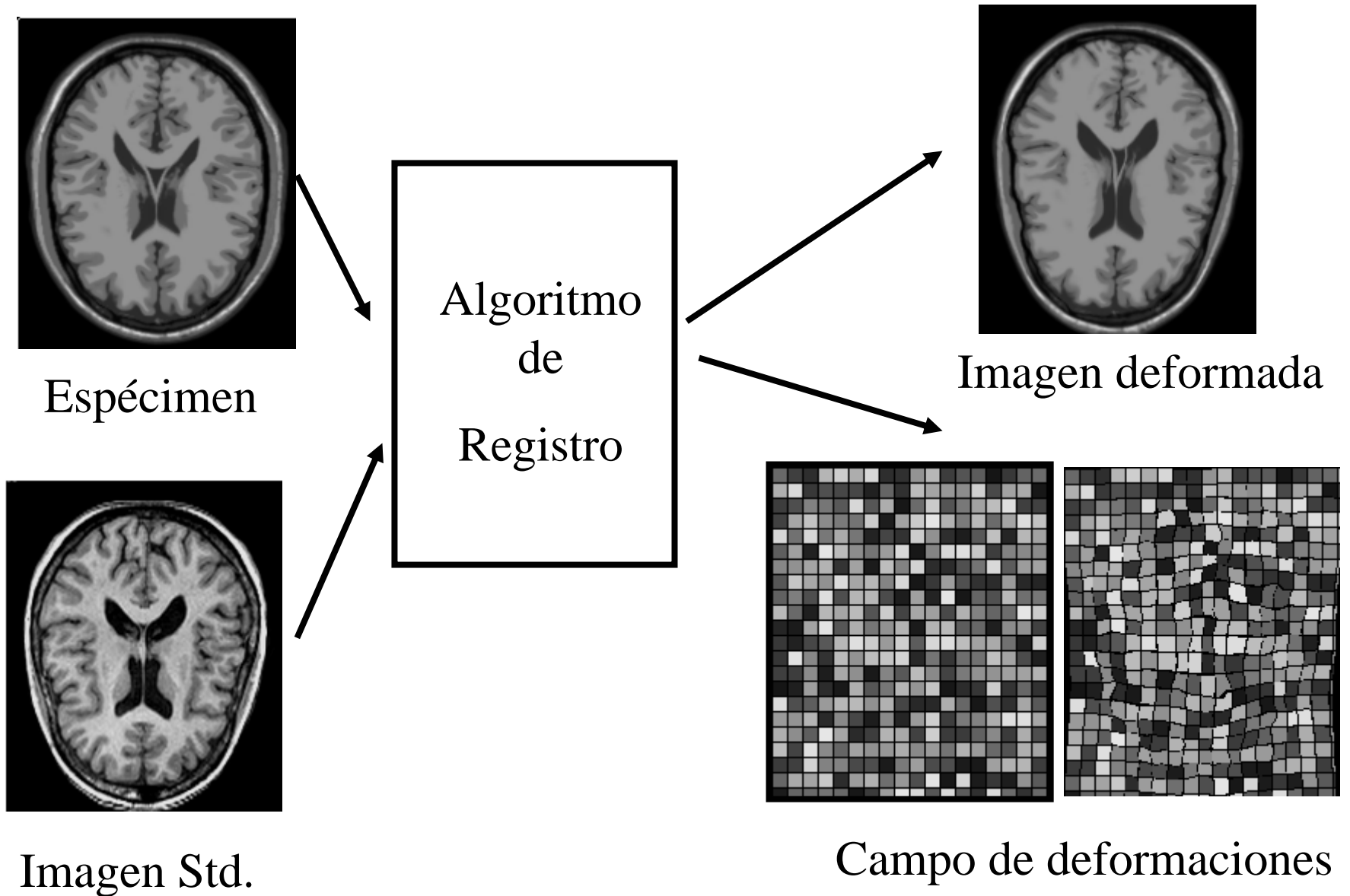


50



300

Registro de Imágenes



Modelo de observaciones:

Campo de distorsiones $f(r) = (f_x(r), f_y(r))^T$

$$g_1(r) = g_2(r + f(r)) + n(r)$$

Imagen original

Imagen distorsionada

ruido

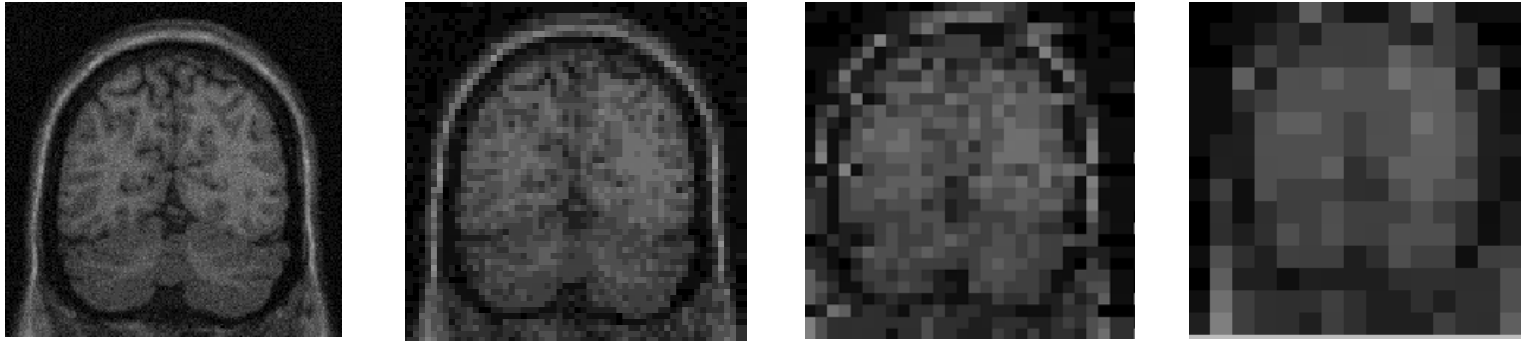
Registro de imágenes

Verosimilitud:
$$\frac{1}{Z_L} \exp \left[- \sum_r |g_1(r) - g_2(r + f(r))|^2 \right]$$

A priori:
$$\frac{1}{Z_P} \exp \left[- \lambda \sum_{\langle r,s \rangle} |f(r) - f(s)|^2 \right]$$

A posteriori:
$$\frac{1}{Z} \exp \left[- \sum_r |g_1(r) - g_2(r + f(r))|^2 - \lambda \sum_{\langle r,s \rangle} |f(r) - f(s)|^2 \right]$$

Pirámide Multi-escala



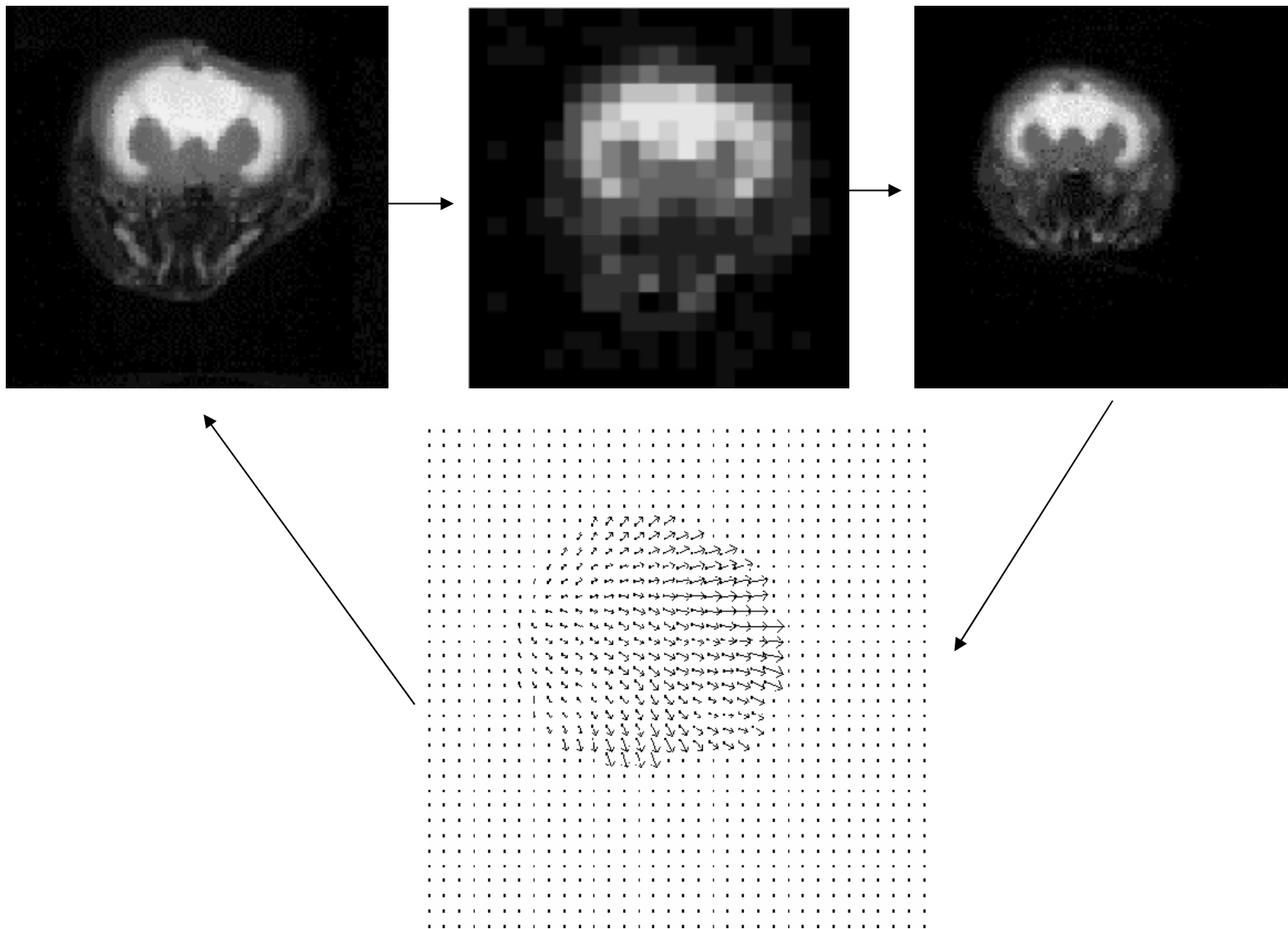
Permite usar una aproximación lineal para $g_2(r + f(r))$

$$g_2(r + f(r)) \approx g_2(r) + f(r) \cdot \nabla g_2(r)$$

De modo que f^* se obtiene minimizando:

$$U(f) = \sum_r \left(g_1(r) - g_{2x}(r) f_x(r) - g_{2y}(r) f_y(r) \right)^2 + \lambda \sum_{\langle r,s \rangle} |f(r) - f(s)|^2$$

Ejemplo 1:



Ejemplo 2:

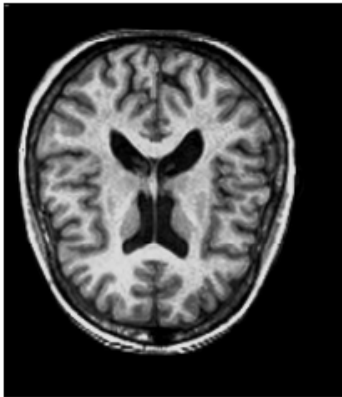


Imagen original



[-4.827,5.808]

Flujo de membrana en X



[-6.843,10.558]

Flujo de membrana en Y

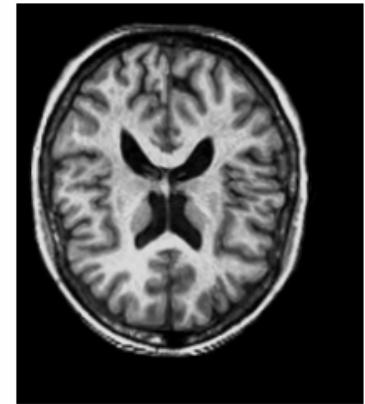
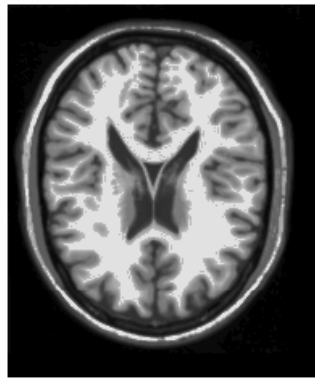
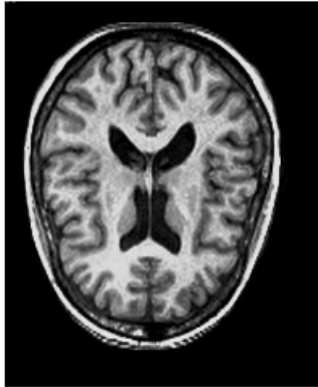


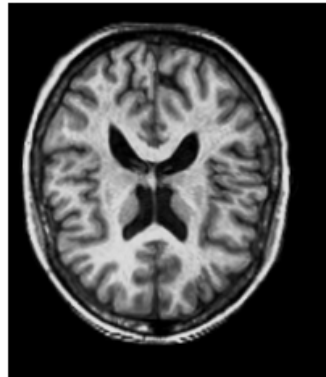
Imagen transformada



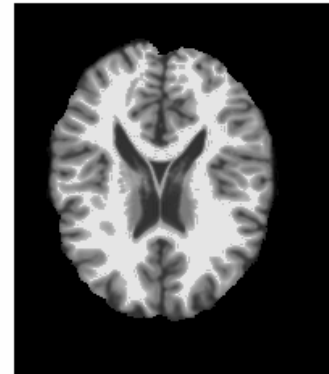
Especimen



Cerebro standard



Cerebro std. transformado



Especimen segmentado



Máscara standard



Máscara transformada



Diferencia

Reconstrucciones suaves a pedazos:

$$U(f) = \sum_r (g_r - f_r)^2 + \lambda \sum_{\langle r,s \rangle} V(f_r - f_s)$$

Resortes no-lineales
con potenciales:

$$V(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } |x| < \theta \\ \theta^2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$V(x) = \frac{\alpha x^2}{1 + \alpha x^2}$$

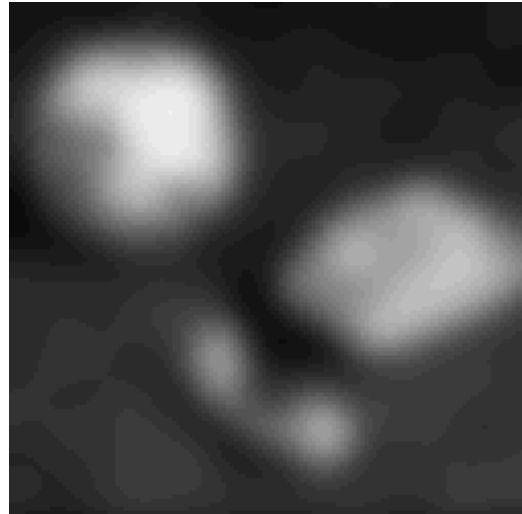
$$V(x) = 1 - G_\sigma(x)$$

$$V(x) = |x|$$

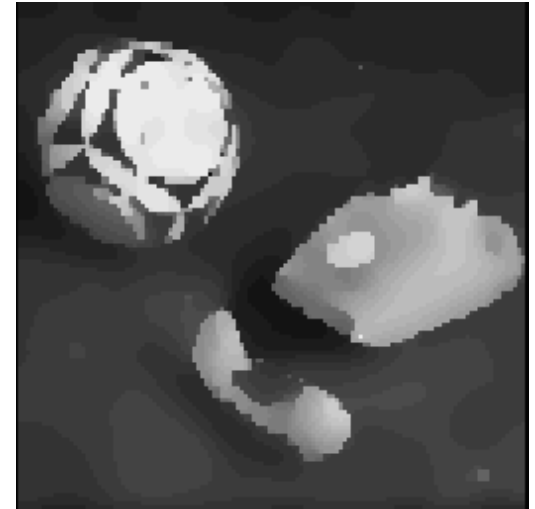
$$V(x) = \frac{\alpha x^2}{1 + \alpha x^2}$$



Imagen original

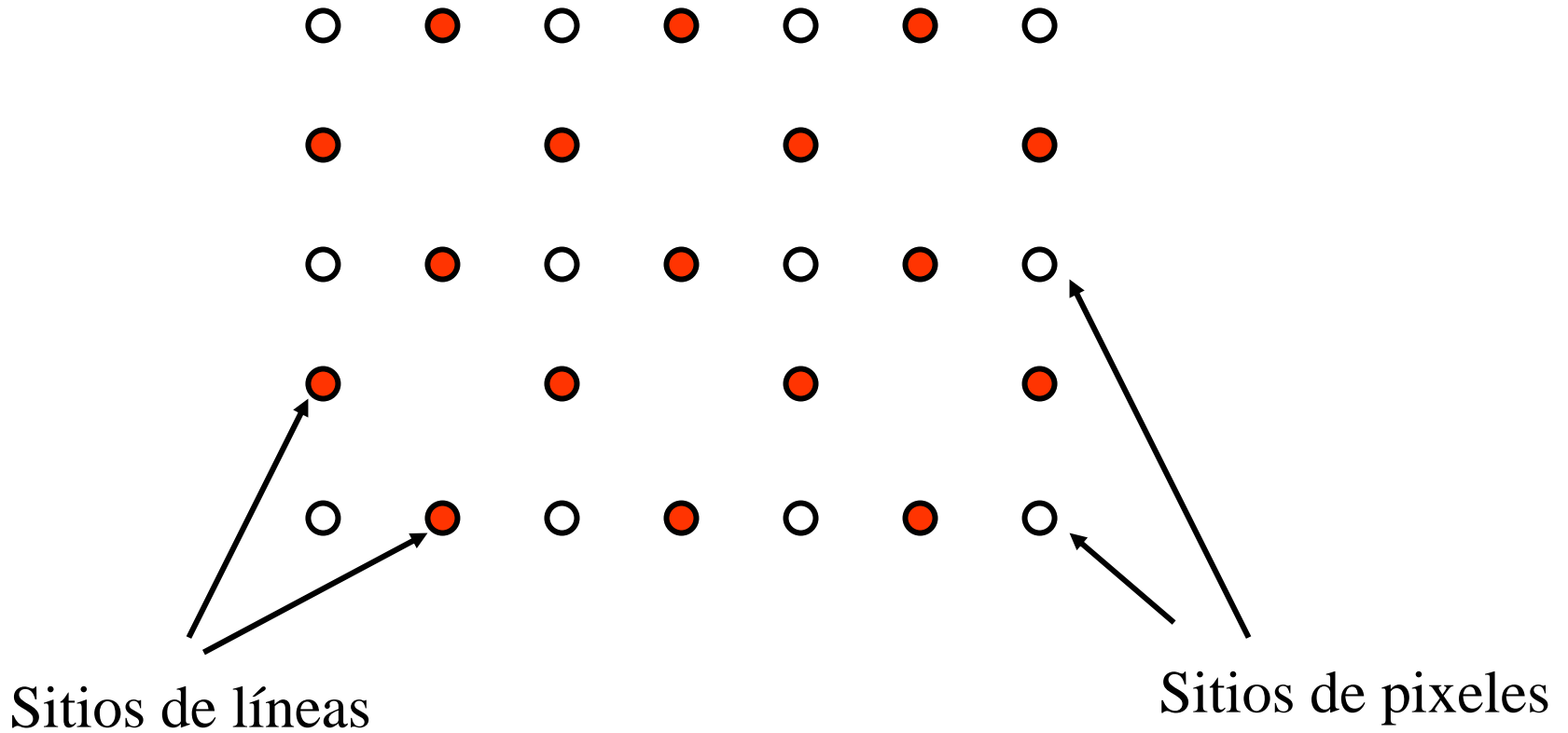


Reconstrucción
suave



Reconstrucción
suave a pedazos

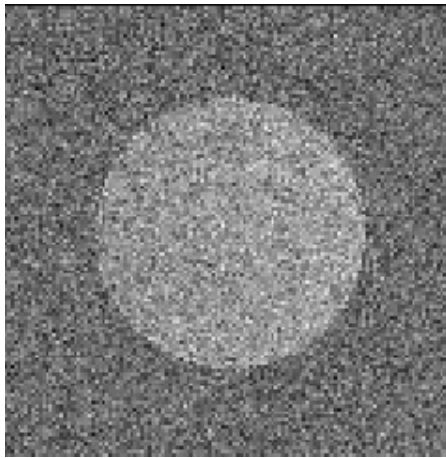
Modelos Híbridos



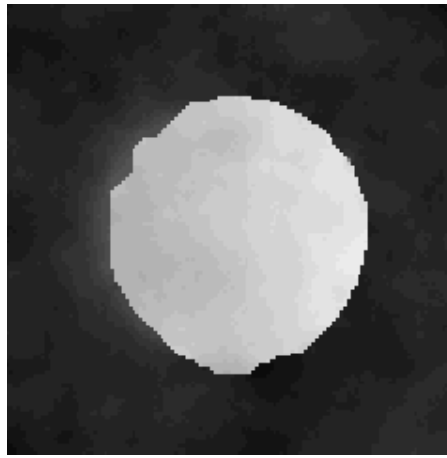
Energía a posteriori para modelos híbridos:

$$U(f, l) = \sum_x (f(x) - g(x))^2 + \lambda \sum_{\langle x, y \rangle} [(f(x) - f(y))^2 (1 - l_{xy})^2 + \theta l_{xy}^2]$$

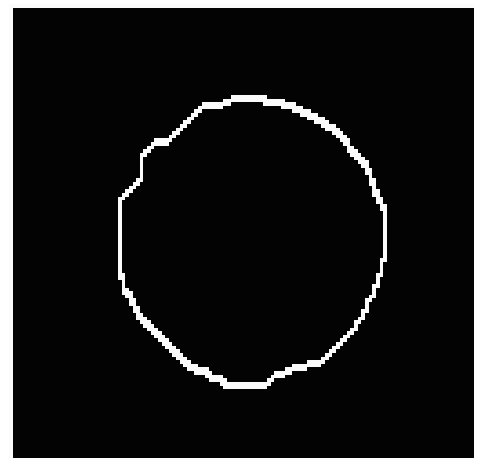
Modelo “medio-cuadrático”: minimización alternada de 2 funciones cuadráticas: $U(f)$ para l fija y $U(l)$ para f fija.



Observaciones



Campo f



Campo l

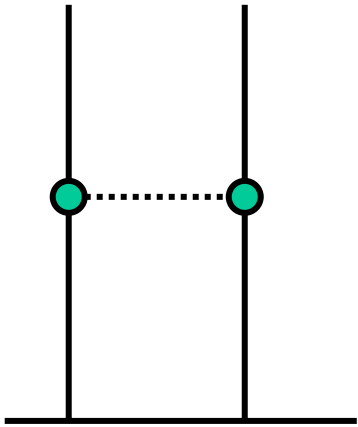
Campos Discretos: problemas de clasificación

Se desea encontrar un campo de etiquetas que sólo puede tomar valores $1, \dots, M$

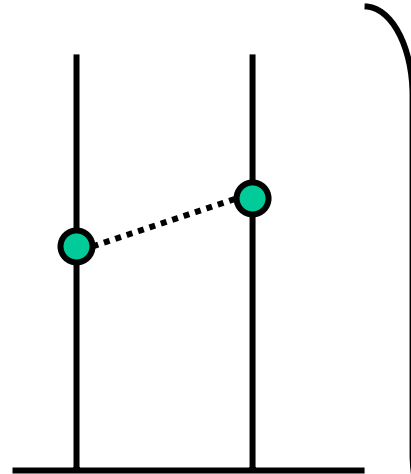
Potenciales a priori: modelo de Ising:

$$\begin{aligned} V_{rs}(f_r, f_s) &= -1, \text{ if } f_r = f_s \\ &= 1, \text{ if } f_r \neq f_s \end{aligned}$$

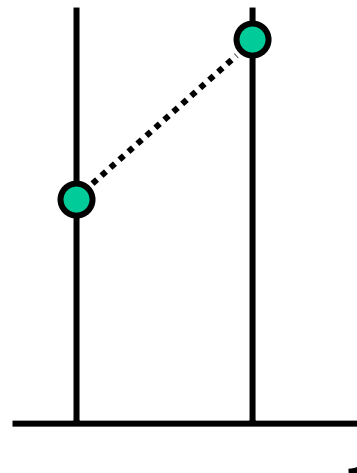
“Resortes” de Ising



$$V = -\lambda$$

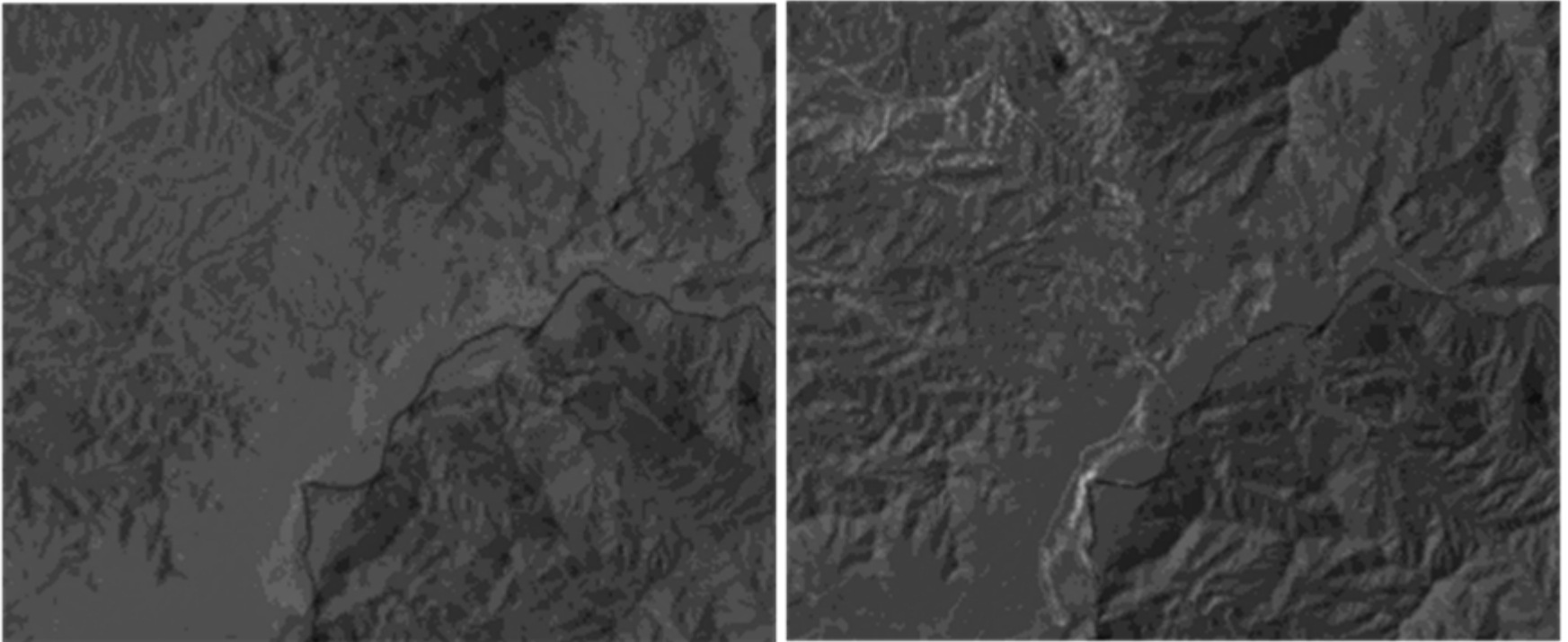


$$V = \lambda$$



Clasificación de imágenes del satélite (colaboración CIMAT-CIBNOR)

Zona de la vertiente del Océano Pacífico



Bandas 4 y 5 del Thematic Mapper

Clasificación de imágenes del satélite (colaboración CIMAT-CIBNOR)

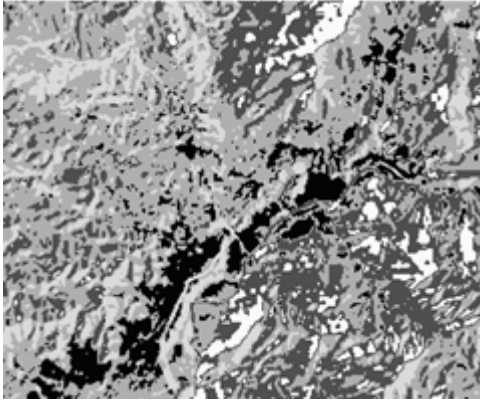
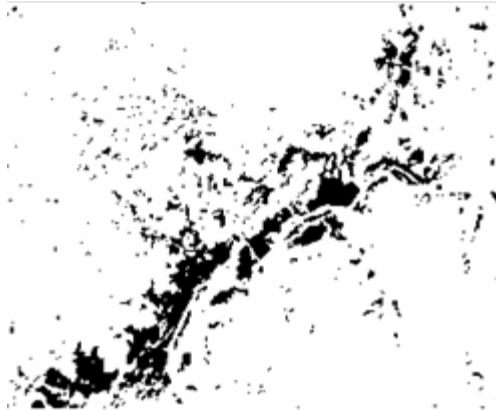
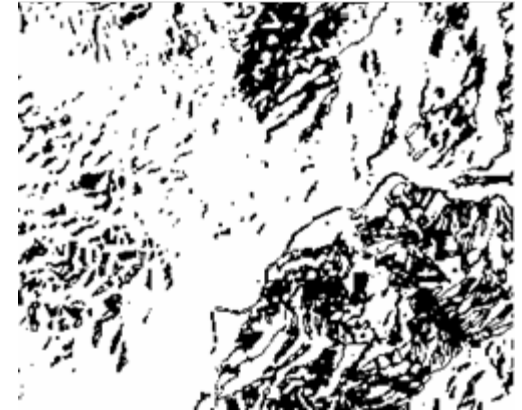


imagen clasificada



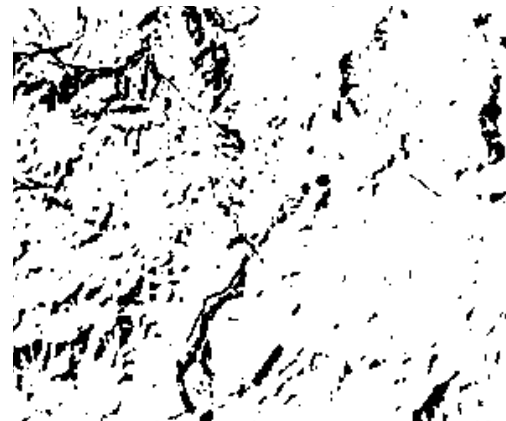
selva amatorralada



selva cerrada



selva abierta



áreas de escasa vegetación



sombras

Estimadores Optimos:

Opción 1: Estimador MAP ;
minimizar $U(f)$ para variables
discretas

Recocido simulado

Corte óptimo de grafos
(graph-cut)

Opción 2: Estimar las
marginales a posteriori y
calcular el estimador
MPM

Métodos MCMC

Campos de medidas

Opción 2:

Teorema: Estimador MPM

El Maximizador de las Marginales a Posteriori

$$\hat{f}_r = q_{k_{\max}} \quad \text{with } k_{\max} = \arg \max_k \pi_r(k)$$

$$\pi_r(k) = \sum_{f: f_r = q_k} P_{f|g}(f)$$

Minimiza el número esperado de errores de segmentación.

$$P_f(f) = \frac{1}{Z_f} \exp[-\beta \sum_C V_C(f)]$$

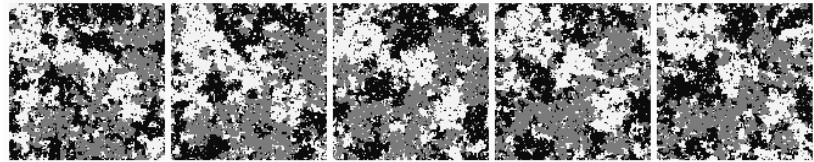
$P_f(\text{img}_1)$ $f(64,64)=1$
 +
 $P_f(\text{img}_2)$ $f(64,64)=1$
 + ...
 $P_f(\text{img}_n)$ $f(64,64)=1$

$\pi_{64,64}(1)$

$2^{(128 \times 128)}$ imágenes !

Idea: obtener muestras de la distribución a posteriori y pesarlas de manera uniforme

Muestreador
Gibbsiano: Cadena
de Markov con
distribución
asintótica $P(f/g)$



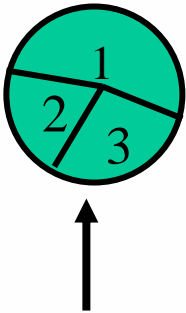
O (1000 images)

(Metropolis, S. Geman, D.Geman)

Muestreador Gibbsiano:

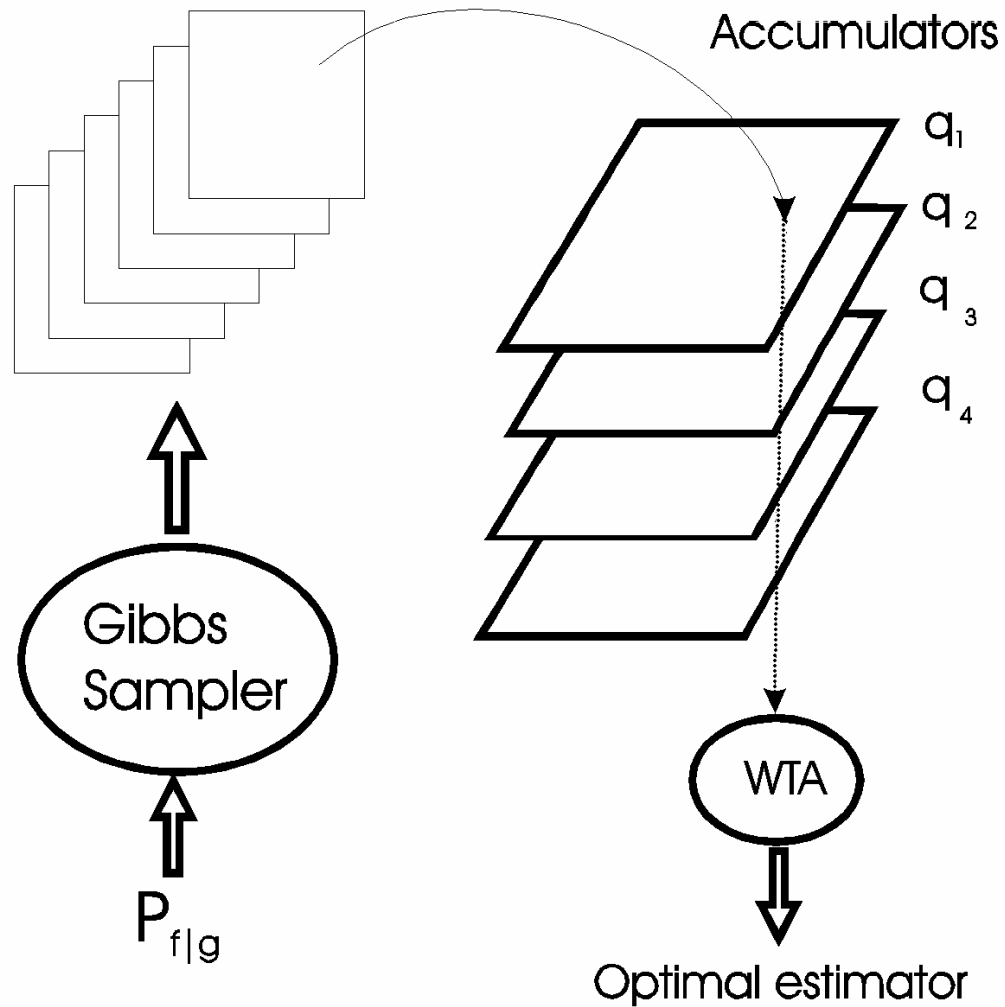
Visitar los sitios de la retícula en orden aleatorio y actualizar usando la distribución condicional:

$$\Pr(f_r^{(t+1)} = k) = P(f_r = k | f_s, s \neq r) = \frac{\exp[-u_r(k)]}{\sum_q \exp[-u_r(q)]}$$



$$u_r(q) = \sum_{C:r \in C} V_C(F_r^q)$$

$$(F_r^q)_s = \begin{cases} f_s, & \text{if } s \neq r \\ q, & \text{if } s = r \end{cases}$$



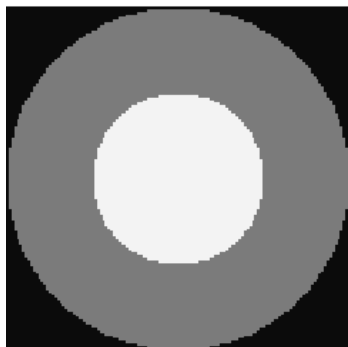


Imagen Original



ruido

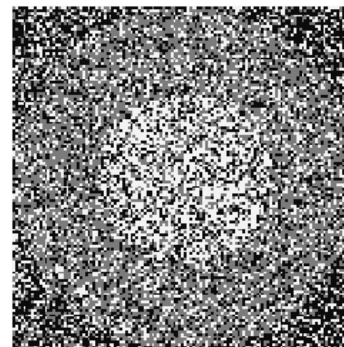
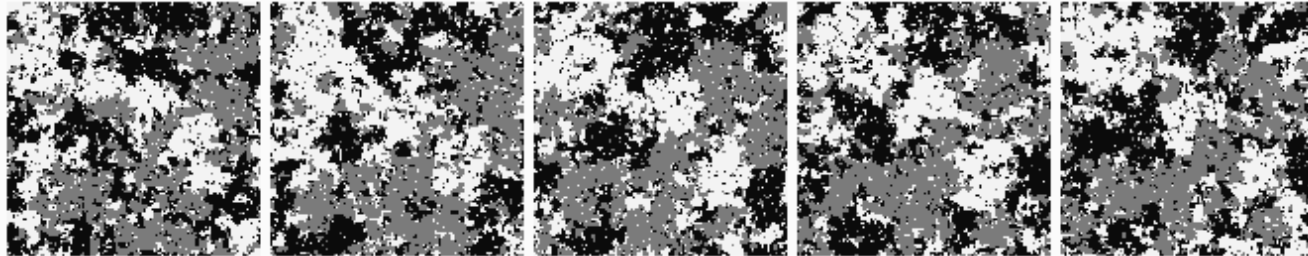
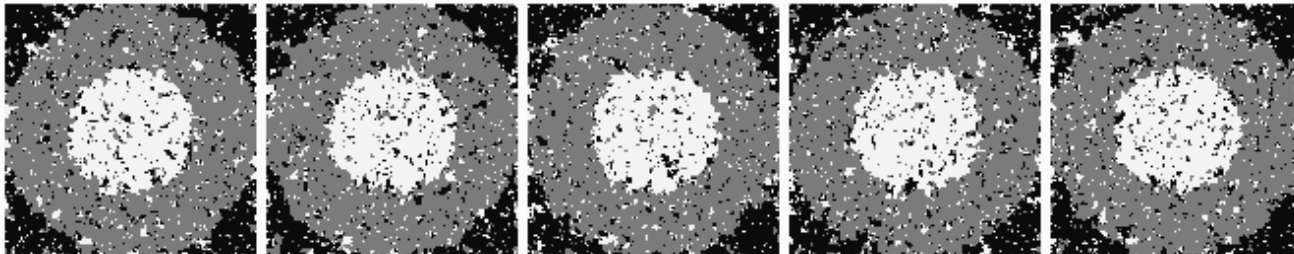


Imagen Observada

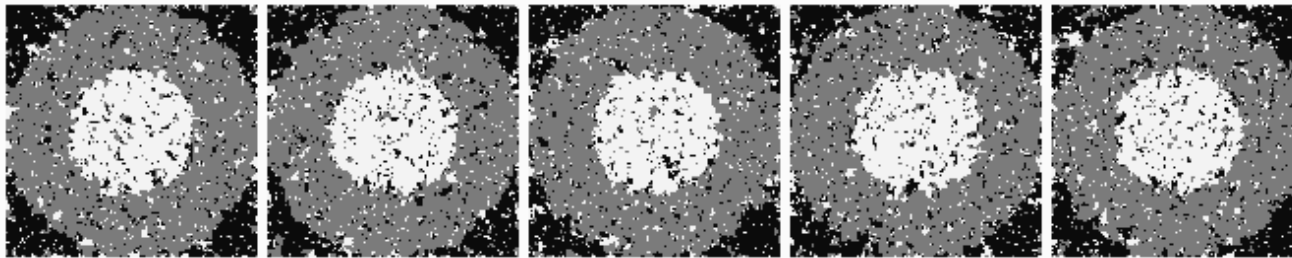
Muestras obtenidas de la simulación MonteCarlo



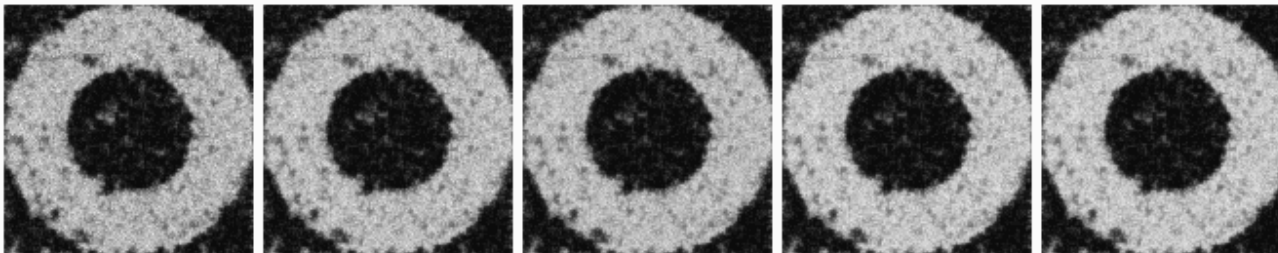
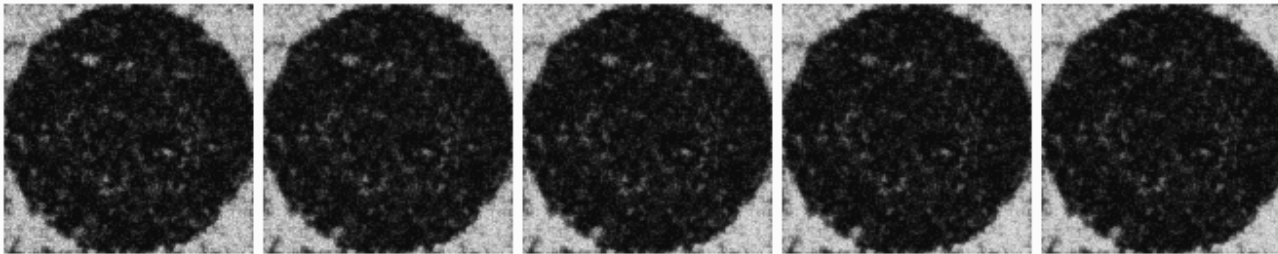
Distribución a Priori



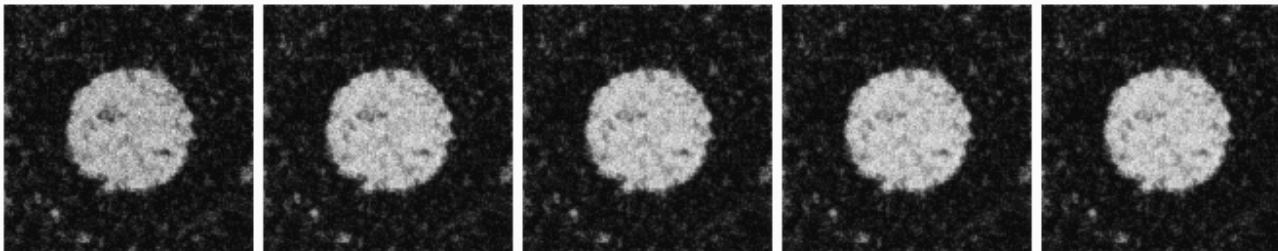
Distribución a Posteriori

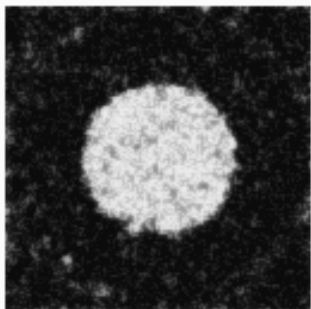
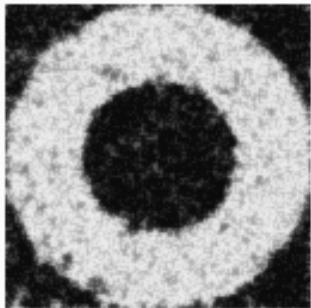
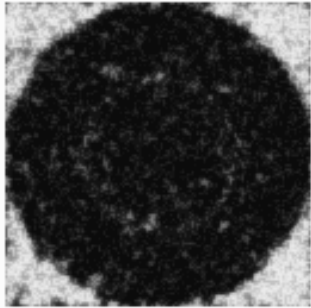


→ t



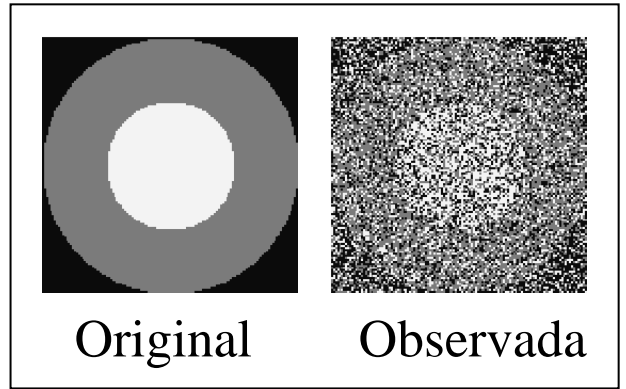
Marginales
a posteriori
(campo p)





Campo p

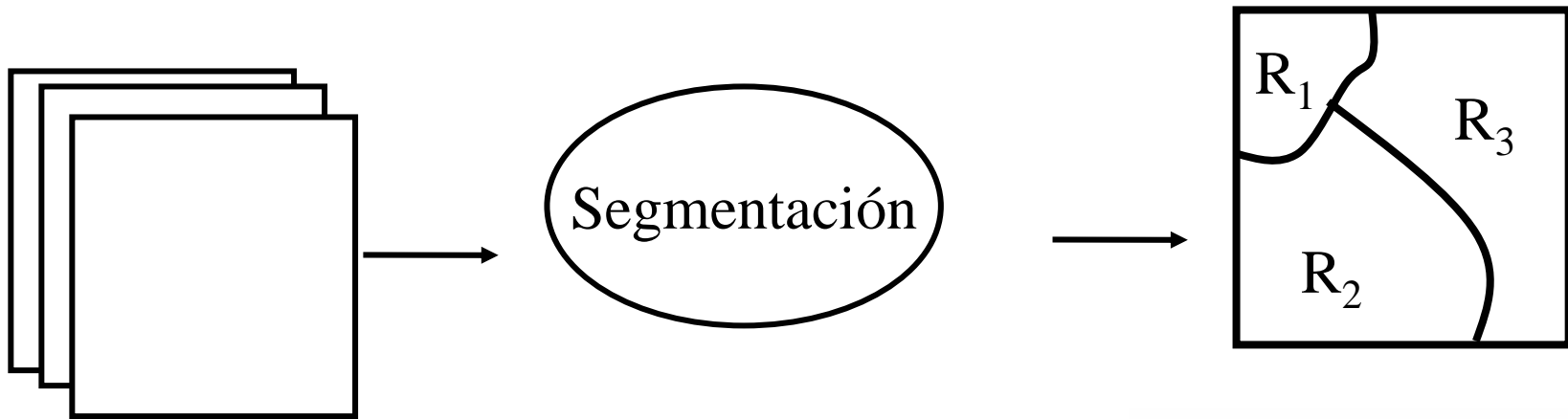
Max



Estimador óptimo

Segmentación Paramétrica

Problema general de segmentación



Imágenes de entrada

g_1, \dots, g_M

Atributo

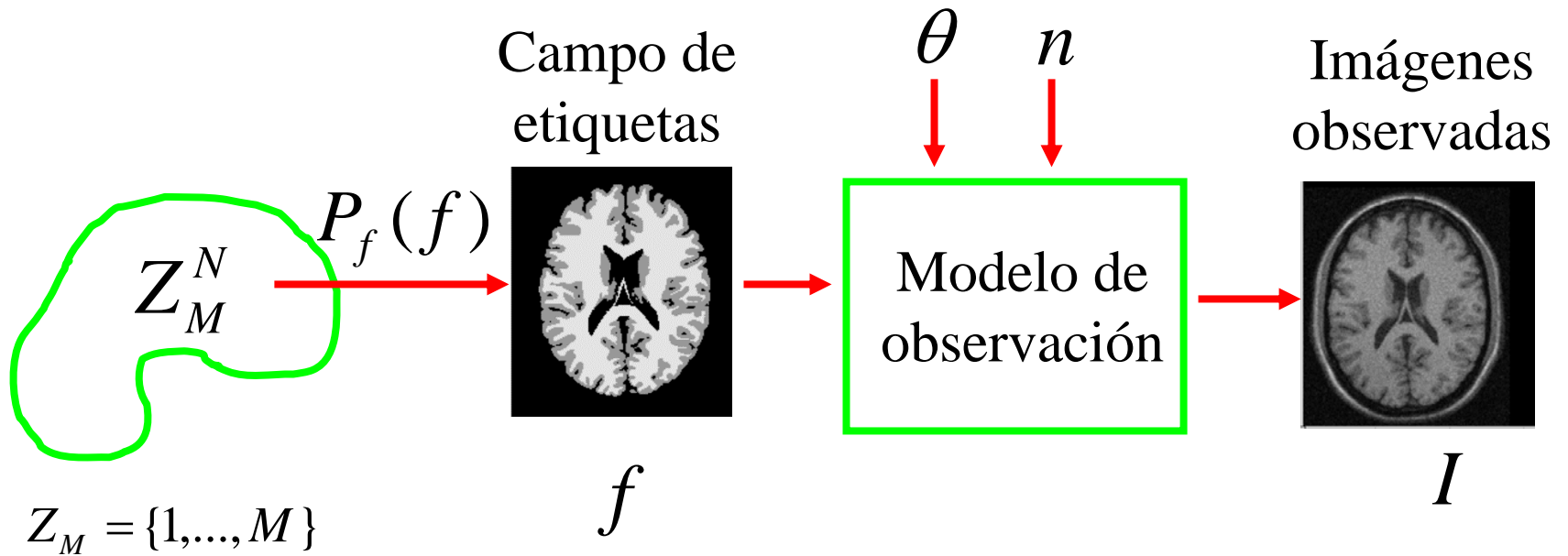
$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^K \Phi(r, \theta_k) b_{rk}$$

Variables indicadoras

$$b_{rk} = 1 \iff r \in R_k$$

Modelos paramétricos

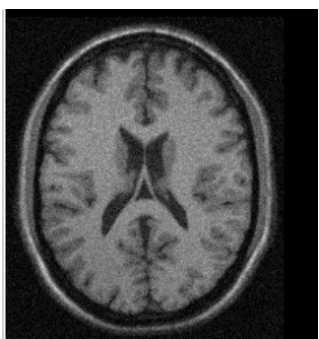
$$\Phi(r, \theta_k)$$



$$I(r) = \sum_{k=1}^M \Phi(r, \theta, k) b_k(r) + n(r)$$

$$n(r) \sim P_n(n) = N(0, \sigma^2) \quad \theta \sim P_\theta(\theta)$$

$$b_k(r) = 1 \Leftrightarrow f(r) = k \Leftrightarrow r \in R_k$$



I

P_n, P_θ, P_b

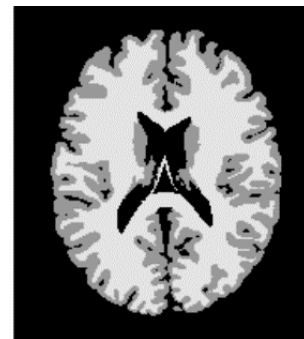
$\Phi(r, \theta, k)$



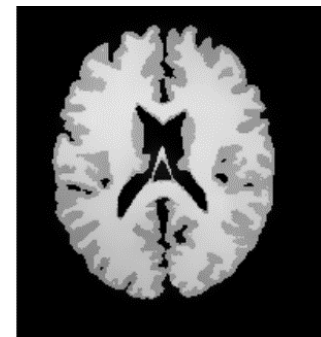
Estimación
Bayesiana;
Algoritmo
EM



\hat{b}



$\hat{\theta}$



Función de Costo

Función de Energía:

$$U(\bar{b}, \theta) = -\sum_r \sum_{k=1}^K [\log l_k(\theta, r) + \log q_k(r)] \bar{b}_k(r) \\ + \log P(\theta)$$

Algoritmos de 2 pasos (SM):

Poner $\bar{\theta} = \theta_0$

Repetir hasta convergencia :

Paso S : $\bar{b} = \arg \min_{\hat{b}} Q(\hat{b}, \bar{\theta})$

Mejor segmentación
dados los modelos

Paso M : $\bar{\theta} = \arg \min_{\hat{\theta}} Q(\bar{b}, \hat{\theta})$

Mejores modelos
dada la
segmentación

Paso S:

El algoritmo depende de la función de costo

$$C_b(\hat{b}, b) = \sum_r |\hat{b}(r) - b(r)|^2 \rightarrow \text{EM}$$

\bar{b} : Marginales a posteriori

$$C_b(\hat{b}, b) = \sum_r [1 - \delta(\hat{b}(r) - b(r))] \rightarrow \text{MPM - MAP}$$

\bar{b} : Estimador MPM

$$C_b(\hat{b}, b) = 1 - \delta(\hat{b} - b) \rightarrow \text{MAP - MAP}$$

\bar{b} : Estimador MAP

Paso M:

$$C_b(\hat{\theta}, \theta) = 1 - \delta(\hat{\theta} - \theta)$$

minimizar

$$U(\bar{b}, \theta) = - \sum_r \sum_{k=1}^K [\log l_k(\theta, r) + \log q_k(r)] \bar{b}_k(r) \\ + \log P(\theta)$$

Algoritmo EM:

Encuentra un estimador inicial de los modelos $\hat{\theta}$

Repetir hasta convergencia:

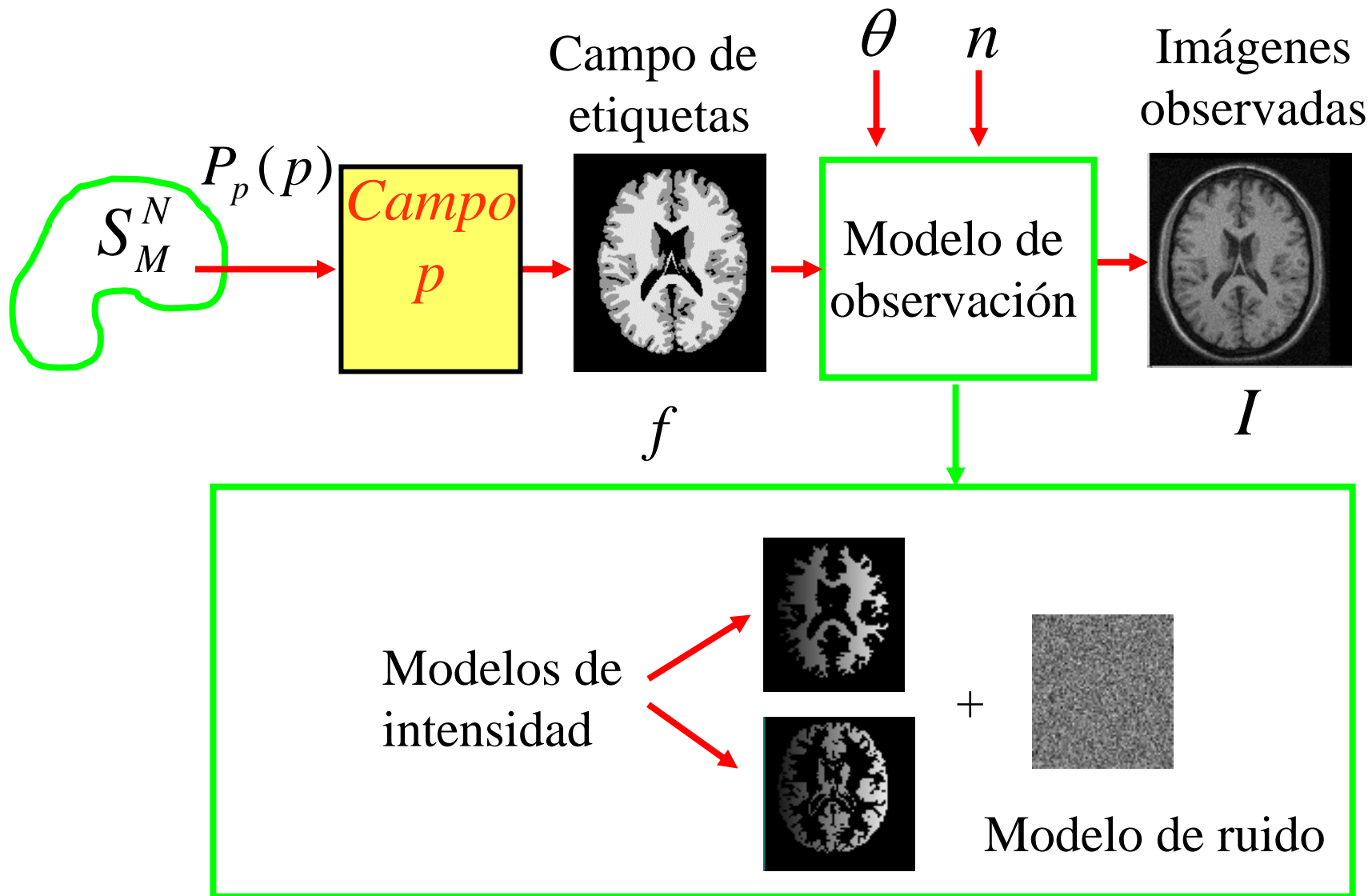
Paso E: Calcula las marginales a posteriori $\bar{b} = E[b | I, \hat{\theta}]$

Paso M: Calcula $\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} U(\bar{b}, \theta)$

Problemas:

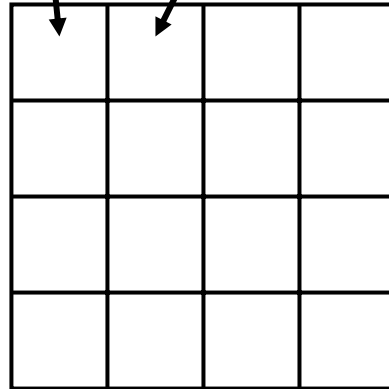
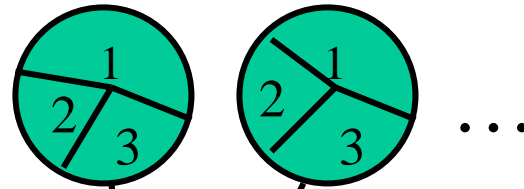
- Si se incluyen las suposiciones de coherencia espacial, el cálculo de las marginales a posteriori (o los estimadores óptimos en el paso S) se vuelve problemática. (Aproximaciones: ICM; MCMC; Campo Medio son muy sensibles al ruido y computacionalmente caras)).
- La inicialización automática es difícil.

Modelo oculto de campo de medidas

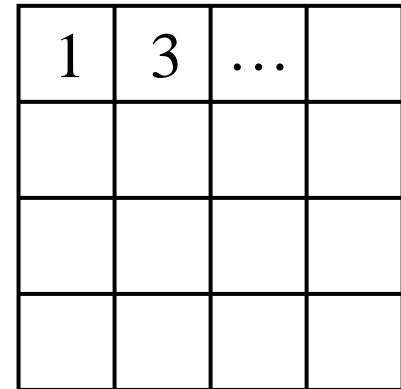


Campo p:

Distribuciones de probabilidad que varían suavemente



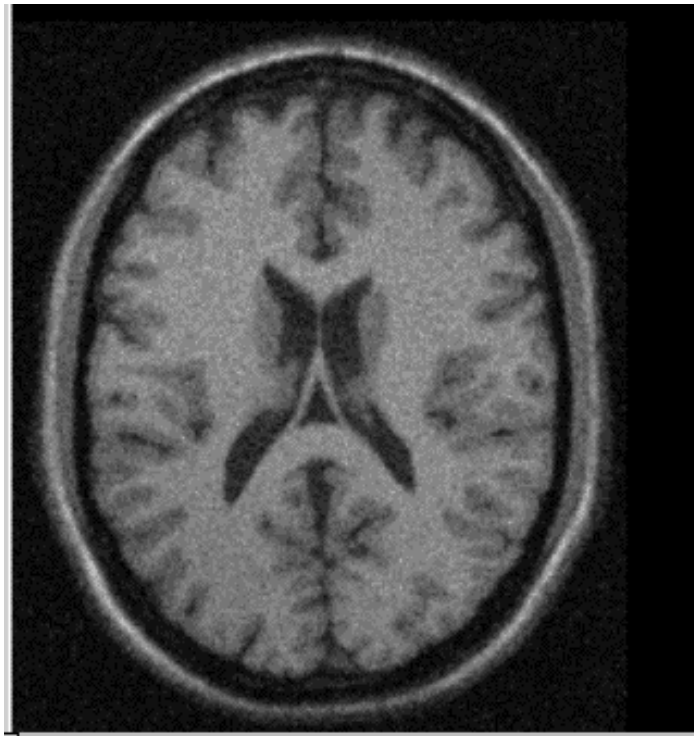
Campo p



Campo de etiquetas

Segmentación de imágenes de RM

Clasificar cada voxel en 3 clases de tejido



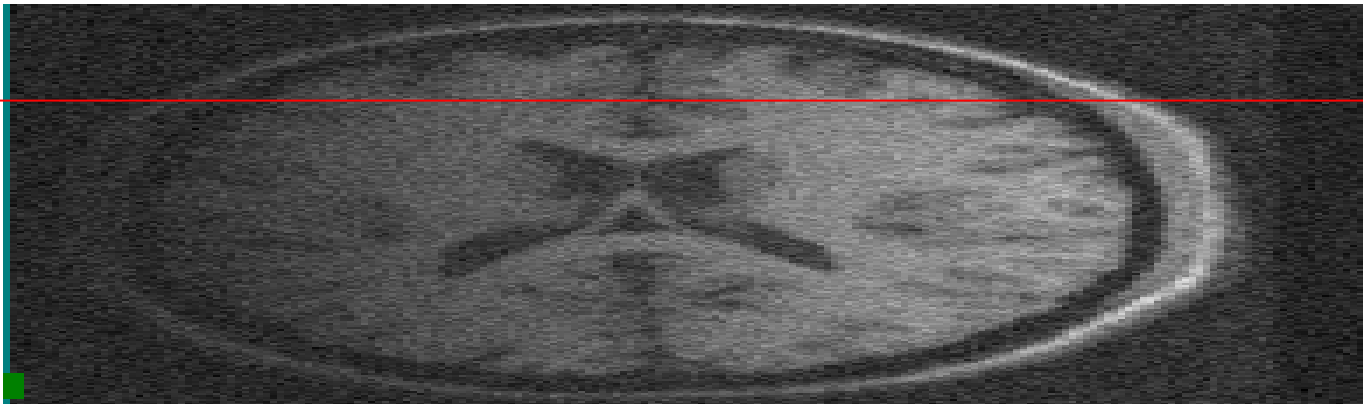
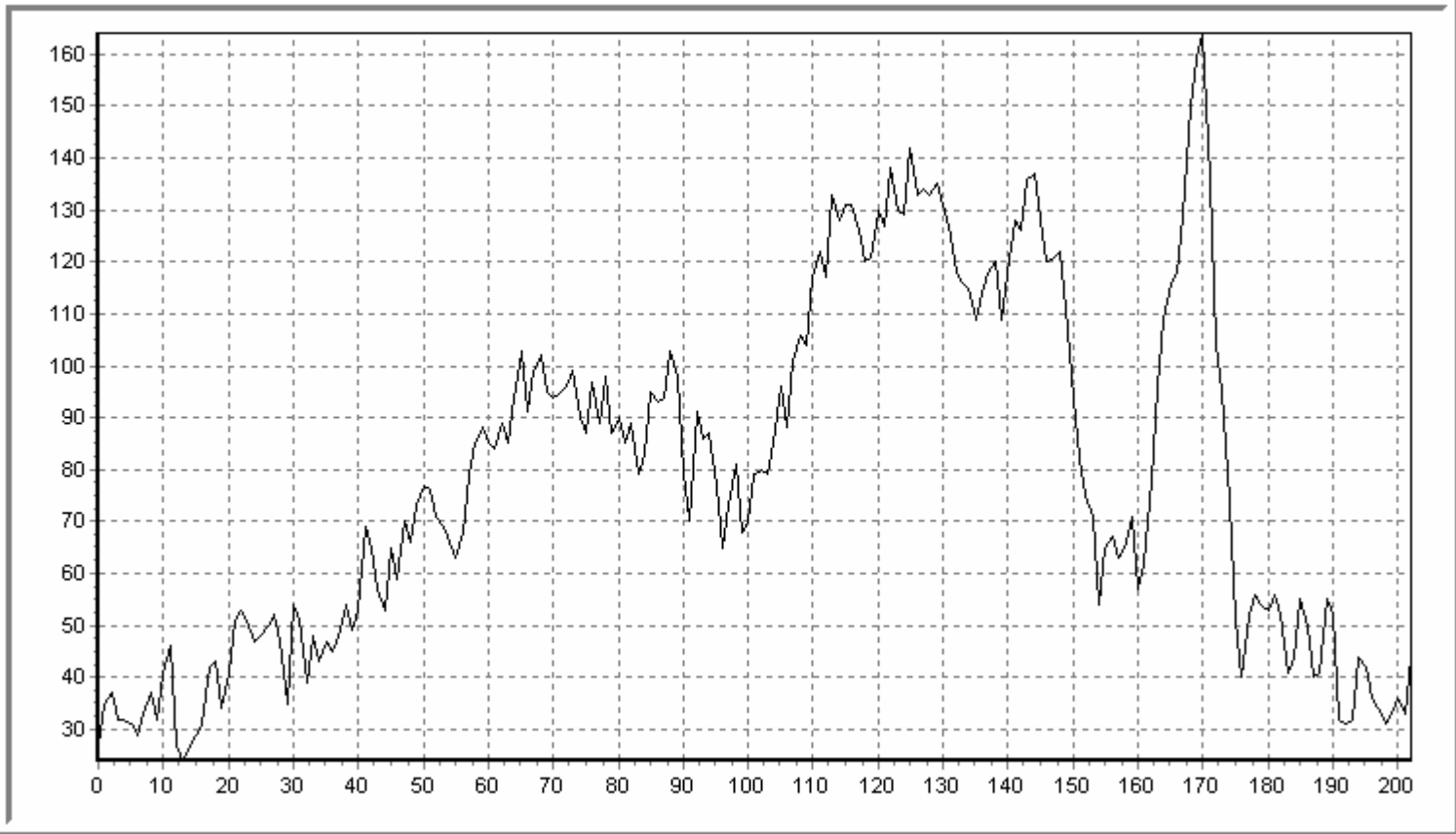
Mat. gris



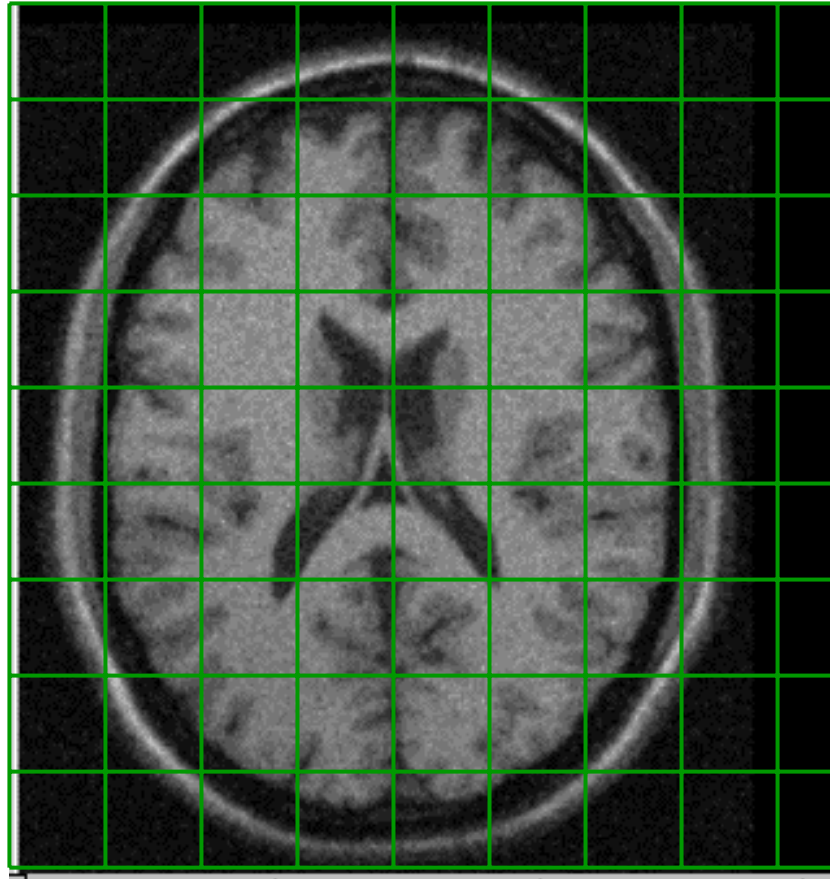
Mat. blanca

LCR

Dificultades

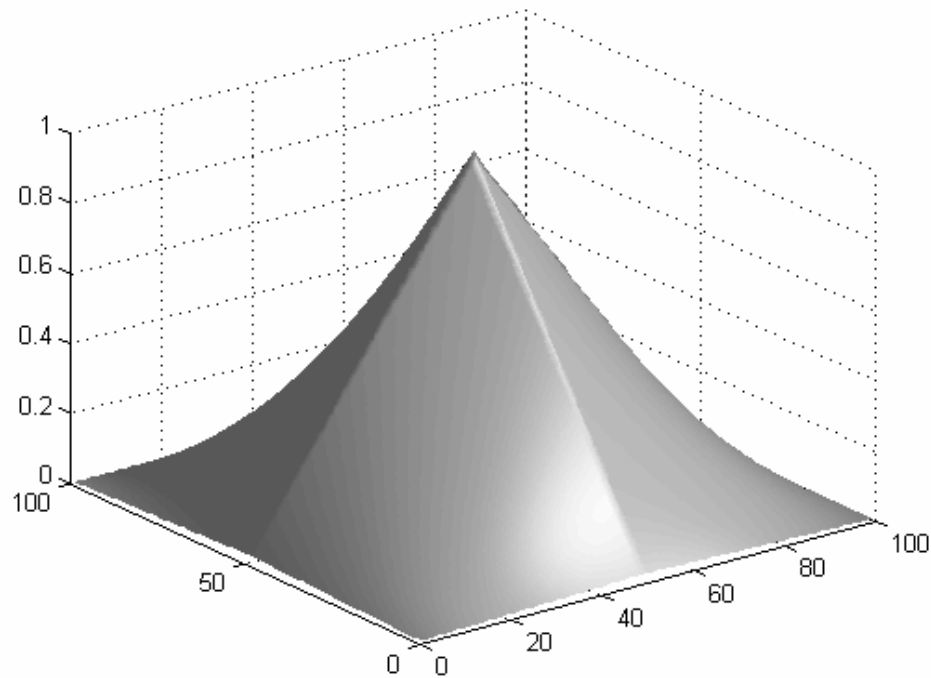


Intensidades no-uniformes: Modelos de membrana locales (elemento finito)



Modelos locales de membrana

$$\Phi(r, \theta_k) = \sum_{j=1}^m N_j(r) \theta_{kj}$$



Modelo a priori (CAM) para p :

$$P_p(p) = \frac{1}{Z} \exp \left[-\lambda \sum_{\langle r,s \rangle} |p(r) - p(s)|^2 \right]$$

(modelo de membranas desacopladas)

Distribución condicional:

$$\begin{aligned} P(I(r) | p, \theta) &= \sum_{k=1}^M P(I(r) | f(r) = k, p, \theta) P(f(r) = k | p, \theta) \\ &= \sum_{k=1}^M l_k(r, \theta) p_k(r) = l^T(r, \theta) \cdot p(r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_k(r, \theta) &= \Pr[I(r) | \theta, f(r) = k] \\ &= \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \exp\left[-\gamma | I(r) - \Phi(r, \theta, k) |^2\right] \end{aligned}$$

Distribución a posteriori:

$$P(p | I, \theta) = \frac{1}{Z} \exp[-U(p; I, \theta)]$$

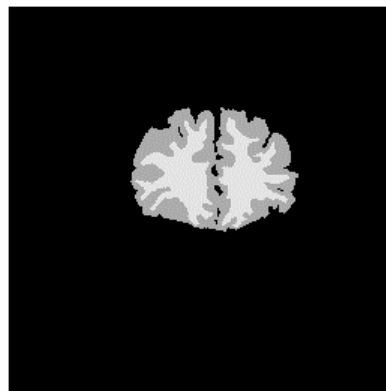
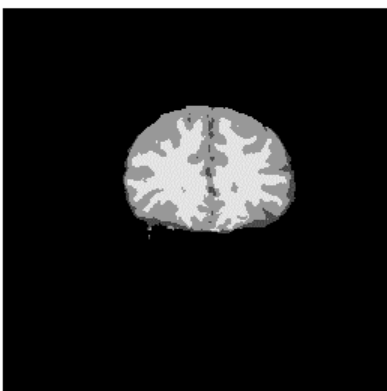
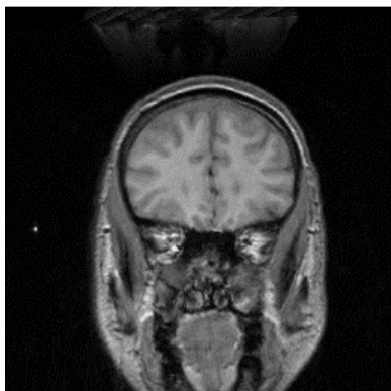
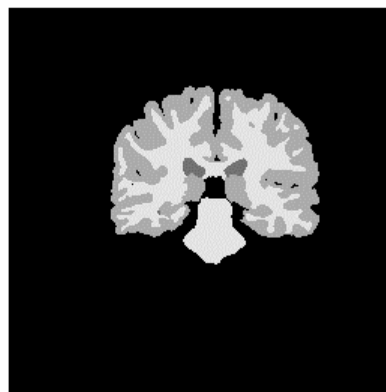
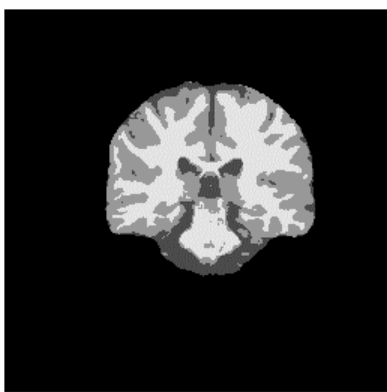
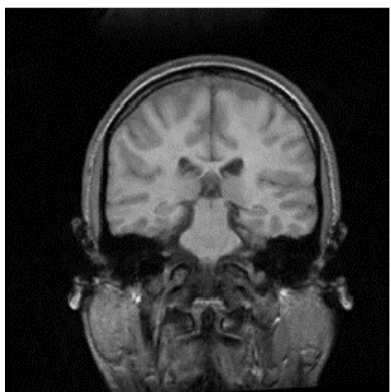
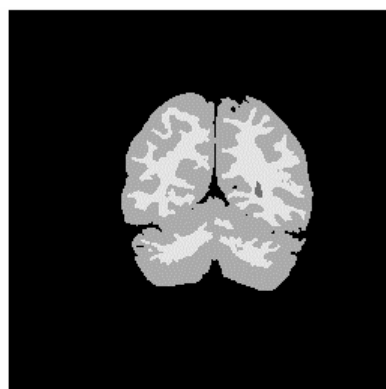
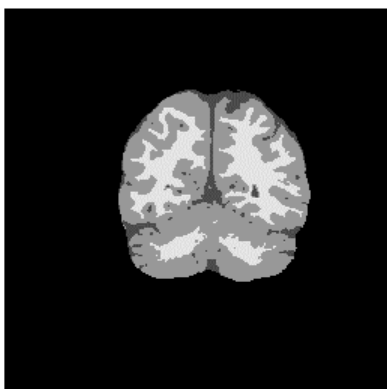
$$U(p; I, \theta) = -\sum_{r \in L} \log[l^T(r, \theta) \cdot p(r)] + \lambda \sum_{\langle r, s \rangle} |p(r) - p(s)|^2$$

→ Minimizar U para obtener estimadores óptimos para p y θ

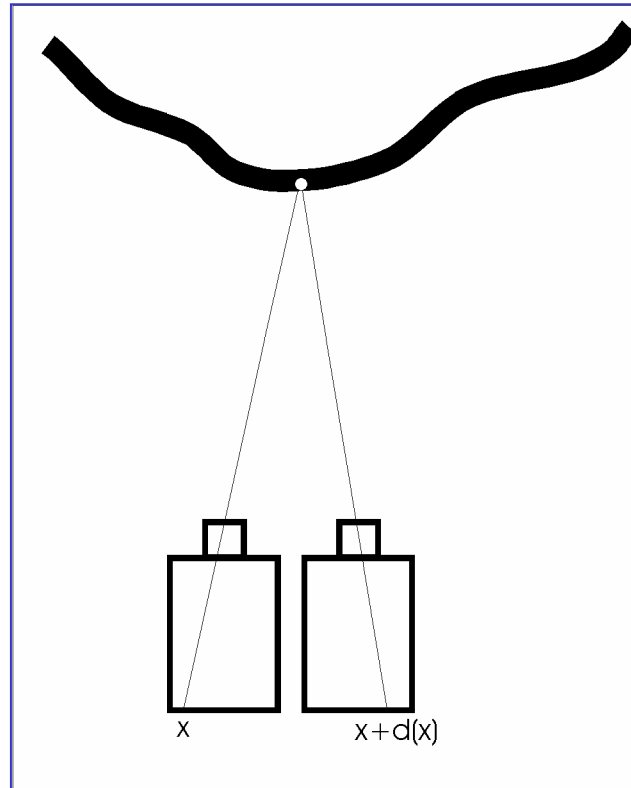
Original

MPM-MAP

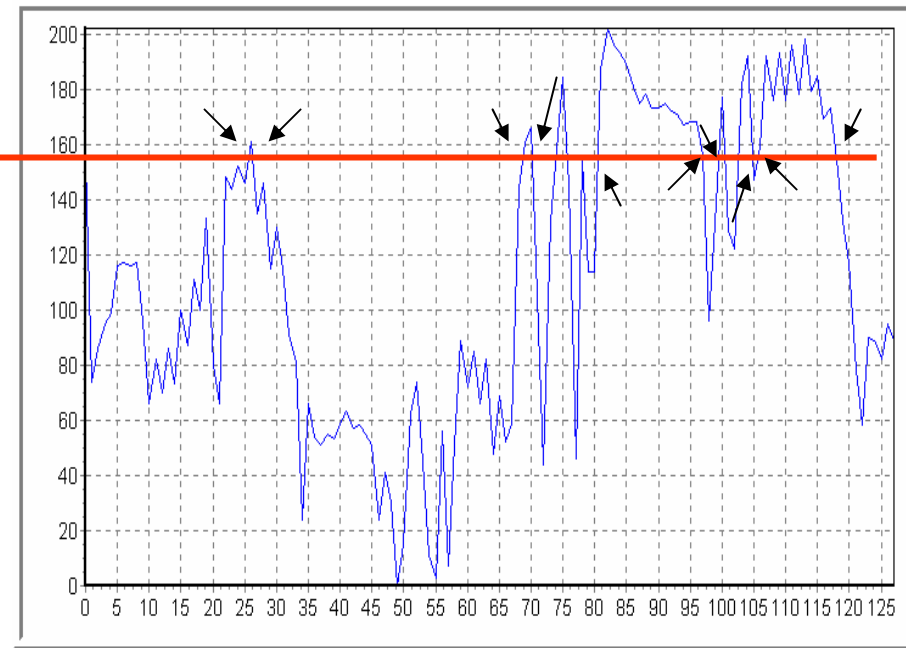
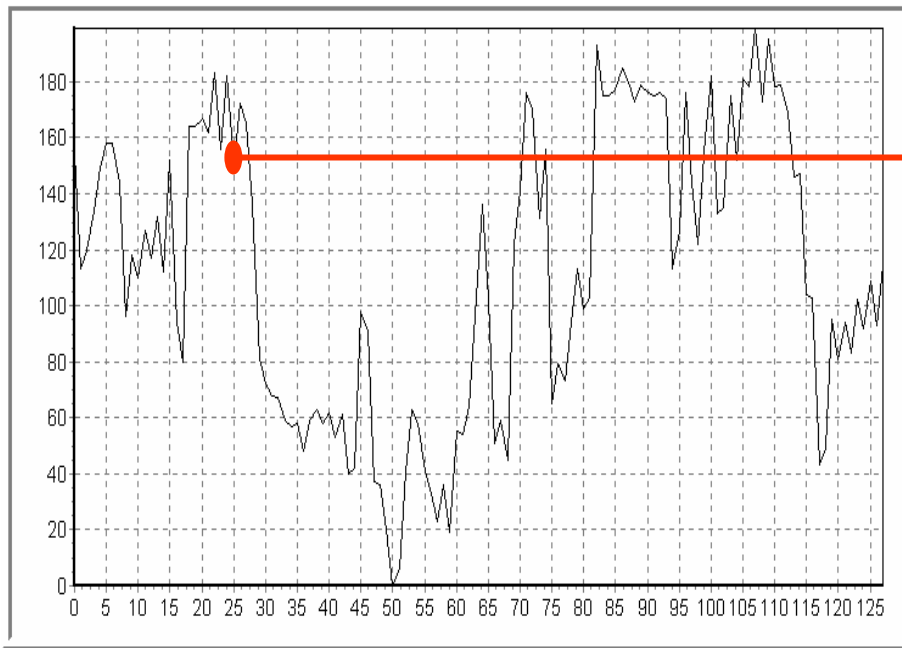
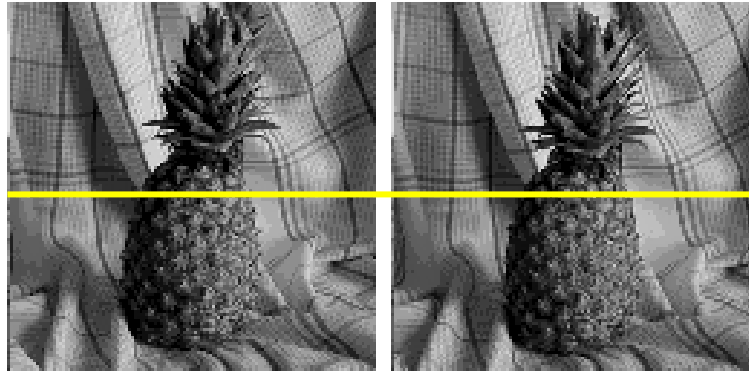
Experto



Cálculo de disparidades estereoscópicas



Problema de la correspondencia

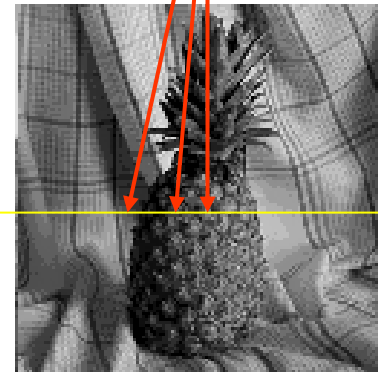
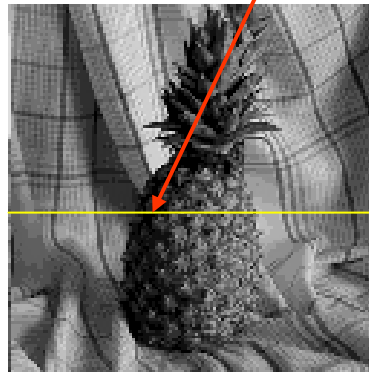


¿Cual es el punto correspondiente ?

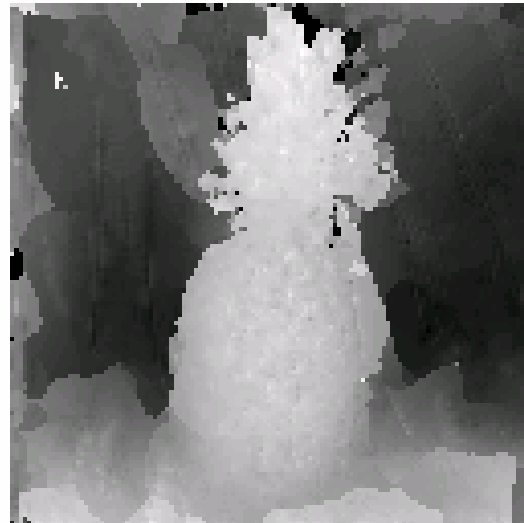
Espacio de estados: $d(r) \in \{q_1, \dots, q_M\}$

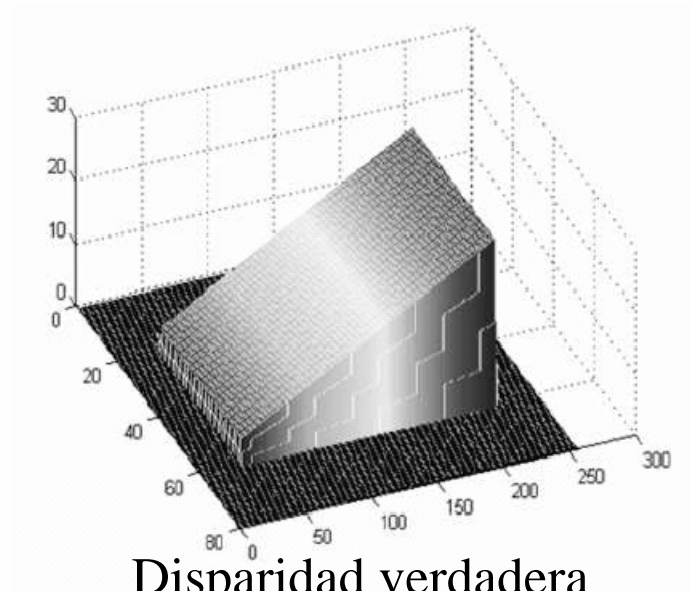
Verosimilitud:

$$\hat{p}_r(k) = \frac{1}{Z} \exp \left[-\beta (I_L(x) - I_R(x + q_k))^2 \right]$$

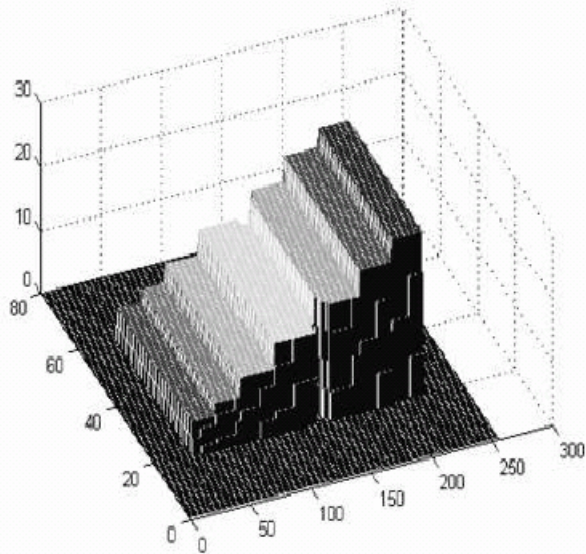


Estereoscopia: alta definición preservando bordes

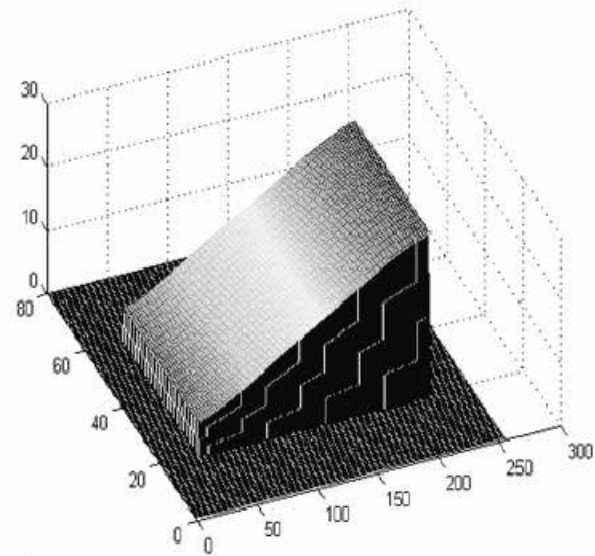




Disparidad verdadera



Disparidades enteras



Segmentación paramétrica

Corte óptimo de grafos (problemas binarios)

