

Desigualdades e Identidades de Correlación

Víctor Pérez-Abreu

Departamento de Probabilidad y Estadística
CIMAT, Guanajuato

IX Escuela de Probabilidad y Estadística

Guanajuato, enero 22 del 2007

Contenido y Objetivos

1. Recordar *Ley de los grandes números de Bernoulli*
2. Impacto del trabajo de *Jacobo Bernoulli*
3. Qué es una desigualdad de correlación
4. Para qué sirve una desigualdad de correlación
5. Algunos resultados sobre *identidades y desigualdades de correlación*
6. Caso *Gaussiano y Bernoulli*
7. Comentarios finales

1 Ley de Los Grandes Números

- Probabilidad de "éxito" es p , $0 < p < 1$.
- Ley de Grandes Números: S_n # éxitos en n ensayos

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > h\right) \leq \frac{1}{4nh^2}$$

- Demostración de Bernoulli es para p racional

$$p = \frac{r}{r + s}$$

con r y s naturales.

2 Jacobo Bernoulli (1654-1705)

Ars Conjectandi:

- Publicación *posmortum* en 1713 compilada por su sobrino Nicolas Bernoulli.
- Basado en *Meditaciones Matemáticas de Jacobo*
- Cuatro capítulos:
 1. Comentarios a trabajos de Huygens (1629-1759) sobre problemas en juegos de azar
 2. Combinatoria y permutaciones
 3. 24 nuevos problemas de azar
 4. Ley de los grandes números

Ley de los Grandes Números:

- *"Es bien conocido que la frecuencia relativa de un evento estará más cerca a la verdad si tenemos más observaciones"*
- *"Este problema lo he pensado durante 20 años. Su novedad y utilidad son tan importantes como su gran dificultad, excediendo la de los otros capítulos"*
- **Probabilidad clásica** *La razón del número de casos favorables entre el número de casos posibles*
- **Probabilidad frecuencial** *Frecuencia relativa aproximada al verdadero valor cuando no es posible conocer todos los casos posibles.*
- Lo que no se puede encontrar a priori se puede obtener a posteriori mediante la observación múltiple de resultados experimentales similares.

- Aplicaciones: Modelos de urnas
- “Considere la repetición sucesiva de un experimento aleatorio en el cual se considera exclusivamente la ocurrencia (éxito) o no ocurrencia (fracaso) de un evento. Si p es la probabilidad de éxito en cada repetición del experimento, entonces la probabilidad de que el número promedio de éxitos en las primeras n repeticiones difiera de p en más de una cantidad fija de antemano, es pequeña para n suficientemente grande”.
- Formulación moderna: $n \#$ número de observaciones, $S_n \#$ éxitos, $p = r/(r + s)$. $\forall h > 0, \forall c \in \mathbb{Z}^+ \exists n$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > h\right) < \frac{1}{1 + c}$$

- Demostración con alto rigor

- Convergencia en probabilidad
- **Cota superior muy grande.**
- $c = 1$, $h = 1/5000$ dan $n = 25550$.
- Para Bernoulli $h = 1/(r + s)$.
- Intuición "menos observaciones"
- Primer resultado límite en probabilidad

Posterior

- 1729 Moivre (1667-1754): Teorema Límite Central
- 1812 Laplace (1749-1827): Teorema del Límite Integral de Moivre-Laplace.
- Análisis de $\sqrt{n}\frac{S_n}{n} = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$
- 1837 Poisson (1781-1840): Probabilidad de evento varía en cada experimento
- Chebyshev (1821-1894):

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > h\right) < \frac{1}{4nh^2}$$

- Desviaciones grandes (Cramer (1893-1985)):

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > h\right) \leq 2 \exp(-2nh^2)$$

3 Qué es desigualdad de correlación

- X variable, vector aleatorio o matriz aleatoria, f y g funciones

Desigualdad de correlación:

$$E[f(X)g(X)] \geq E[f(X)]E[g(X)]$$

o

$$\text{Cov}(f(X), g(X)) \geq 0$$

Recordemos

$$\text{Cov}(f(X), g(X)) = E[f(X)g(X)] - E[f(X)]E[g(X)]$$

Más general

$$\text{Cov}(f(X), g(X)) \geq F(f, g, X)$$

$$\text{Cov}(f(X), g(X)) \leq F(f, g, X)$$

4 Para qué sirve una desigualdad de correlación

- Transcurso de la conferencia
- Ejemplo: $X = (X_1, \dots, X_n)$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$
 $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_n) / \sqrt{n}$, $g(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_{\{f(\mathbf{x}) \geq h\}}$

$$E[g(X)] = E[\mathbf{1}_{\{S_n \geq h\sqrt{n}\}}] = P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq h\right)$$

$$E[f(X)g(X)] = \frac{1}{\sqrt{n}} E[S_n \mathbf{1}_{\{S_n \geq h\sqrt{n}\}}] \geq h P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq h\right)$$

$$E[f(X)] = \frac{1}{\sqrt{n}} E[S_n]$$

$$P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq h\right) \leq \frac{1}{h} E[f(X)g(X)] = \frac{1}{h} \text{Cov}(f(X), g(X))$$

5 Resultados sobre identidades y desigualdades de correlación

5.1 Caso Gaussiano

X vector aleatorio con distribución normal multivariada $N(0, I)$ en \mathbb{R}^n , f, g funciones $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con derivada acotada

$$\text{Cov}(f(X), g(X)) = \int_0^1 \mathbf{E} \nabla f(X)^\top \nabla g(\alpha X + \sqrt{1 - \alpha^2} Y) d\alpha$$

$Y \sim N(0, I)$ independiente de X , ∇ gradiente.

Dimensión uno:

$$\text{Cov}(f(X), g(X)) = \int_0^1 \mathbf{E} f^{(1)}(X) g^{(1)}(\alpha X + \sqrt{1 - \alpha^2} Y) d\alpha$$

5.2 Aplicaciones

$$\text{Cov}(f(X), g(X)) = \int_0^1 \mathbf{E} f^{(1)}(X) g^{(1)}(\alpha X + \sqrt{1 - \alpha^2} Y) d\alpha$$

- *Desigualdad de Poincaré-Chernoff: $f = g$*

$$\text{Var}(f(X)) \leq \mathbf{E}[f^{(1)}(X)]^2$$

- *Desigualdad de correlación: f, g crecientes*

$$\text{Cov}(f(X), g(X)) \geq 0$$

- *Identidad de Stein: $g(x) = x$*

$$\mathbf{E} X f(X) = \mathbf{E} f^{(1)}(X)$$

- *f, g continuas y positivas definidas*

$$\text{Cov}(f(X), g(X)) \geq 0$$

- Desigualdad de *momento exponencial*: $\mathbf{E}f(X) = 0$

$$\mathbf{E} \exp(f(X)) \leq \mathbf{E} \exp \left| \nabla f(X)^2 \right|$$

- f, g Lipschitz $\|f\|_{\text{Lip}} \leq 1$

$$\text{Cov}(f(X), g(X)) \leq \mathbf{E} |\nabla g(X)|$$

- Desigualdad de *desviación*: f Lipschitz $\|f\|_{\text{Lip}} \leq 1$

$$P(|f(X) - \mathbf{E}f(X)| \geq h) \leq \mathbf{E} |f - \mathbf{E}f| \frac{1}{h} \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right)$$

- Problema abierto: f, g log concavas o cuasi concavas, ¿se cumple $\text{Cov}(f(X), g(X)) \geq 0$?

$$\text{¿}P(A \cap B) \geq P(A)P(B)\text{?}$$

A, B conjuntos simétricos y convexos, $n \geq 3$

5.3 Caso Bernoulli

- μ_n distribución uniforme en $\{-1, 1\}^n = J^n$

- Gradiente discreto: $f : J^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in J^n$,

$$\nabla f(x)^\top = (\nabla_1 f(x), \dots, \nabla_n f(x))$$

$$\nabla_i f(x) = \frac{1}{2}[f(x_1, \dots, x_{i-1}, \mathbf{1}, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, -\mathbf{1}, x_{i+1}, \dots, x_n)]$$

- Identidad de covarianza: $f, g : J^n \rightarrow \mathbb{R}$, $X \sim \mu_n$

$$\text{Cov}(f(X), g(X)) = \int_{J^n} \int_{J^n} \nabla f(x)^\top \nabla g(y) d\nu_n(x, y)$$

$$\frac{d\nu_n(x, y)}{d\mu_n(x)d\mu_n(y)} = \int_0^1 \prod_{i=1}^n (1 + \alpha x_i y_i) d\alpha$$

- Similar al caso Gaussiano: $|\nabla f(x)| \leq 1, x \in J^n$

$$\text{Cov}(f(X), g(X)) \leq \mathbf{E} |\nabla g(X)|$$

- Aplicación: *Sumas Bernoulli*: $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$.
Existe constante universal K

$$P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq h\right) \leq K \frac{1}{h} \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right), \quad h > 0$$

Prueba: $f(x) = (x_1 + \dots + x_n) / \sqrt{n}, g(x) = \mathbf{1}_{\{f(x) \geq h\}}$

- *Desigualdad de Pinelli*: Existe constante universal K tal que \forall función lineal

$$f(x) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

con $a_1^2 + \dots + a_n^2 = 1$

$$P(f(X) \geq h) \leq \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_h^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

6 Comentarios finales

- Expansiones para identidades de covarianza en términos de derivadas de ordenes mayores.
- X puede tener distribución más general que Normal o Bernoulli. En particular existen desigualdades de correlación e identidades y expansiones de covarianza cuando X tiene distribución *Infinitamente Divisible* (poisson, exponencial, gamma, estable, normal inversa gaussiana, etc.)
- Hay avances en la prueba de la famosa *conjetura de correlación*.
- *Posible tesis de licenciatura o maestría*: X matriz aleatoria infinitamente divisible. ¿Desigualdades de correlación para $f(X)$? f es traza, determinante, norma, etc. Caso interesante X es matriz no negativa definida.

7 Referencias

- 1) *The Art of Conjecturing*. Jacob Bernoulli. Traducción al inglés con introducción y notas de Edith Dudley Sylla. Johns Hopkins University Press. 2006.
- 2) S. Bobkov, F. Götze & C. Houdré (2001). On Gaussian and Bernoulli covariance representations. *Bernoulli* 7, pp 439-451
- 3) C. Houdré C. & V. Pérez-Abreu (1995). Covariance identities and inequalities for functionals on Wiener and Poisson spaces. *Annals of Probability* 23, pp 400-419.
- 4) C. Houdré, V. Pérez-Abreu & D. Surgailis (1998). Interpolation, correlation identities and inequalities for infinitely divisible processes. *Journal of Fourier Analysis and Applications* 4, pp 651-668.
- 5) I. Pinelis (1996). Extremal probability problems and Hotelling's T^2 test under symmetric condition. *Annals of Statistics* 22, pp 357-314.