

Clase No. 11:

Eigenvalores y eigenvectores. Método de la potencia

MAT-251

Dr. Alonso Ramírez Manzanares

Depto. de Matemáticas

Univ. de Guanajuato

e-mail: alam@ciamat.mx

web: http://www.cimat.mx/~alam/met_num/

Dr. Joaquín Peña Acevedo

CIMAT A.C.

e-mail: joaquin@ciamat.mx

Eigenvalores y eigenvectores de una matriz

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Definición

El polinomio $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ es llamado el *polinomio característico* de \mathbf{A} . Las raíces $p(\lambda) = 0$ del polinomio son los *eigenvalores* de \mathbf{A} .

Definición

Un vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ que satisface $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ es un *eigenvector* de \mathbf{A} . Al par ordenado (λ, \mathbf{v}) se le llama *eigenpar*.

Observaciones:

Eigenvalores y eigenvectores de una matriz

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Definición

El polinomio $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ es llamado el *polinomio característico* de \mathbf{A} . Las raíces $p(\lambda) = 0$ del polinomio son los *eigenvalores* de \mathbf{A} .

Definición

Un vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ que satisface $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ es un *eigenvector* de \mathbf{A} . Al par ordenado (λ, \mathbf{v}) se le llama *eigenpar*.

Observaciones:

- Como el grado del polinomio característico es n , entonces hay n eigenvalores asociados a \mathbf{A} .

Eigenvalores y eigenvectores de una matriz

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Definición

El polinomio $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ es llamado el *polinomio característico* de \mathbf{A} . Las raíces $p(\lambda) = 0$ del polinomio son los *eigenvalores* de \mathbf{A} .

Definición

Un vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ que satisface $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ es un *eigenvector* de \mathbf{A} . Al par ordenado (λ, \mathbf{v}) se le llama *eigenpar*.

Observaciones:

- Como el grado del polinomio característico es n , entonces hay n eigenvalores asociados a \mathbf{A} .
- Para cada eigenvalor λ , puesto que $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$, la matriz $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ es singular, por lo que podemos hallar un vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tal que $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Radio espectral de la matriz

El conjunto $\sigma(\mathbf{A})$ de todos los eigenvalores distintos de \mathbf{A} se llama el *espectro* de \mathbf{A} .

El *radio espectral* $\rho(\mathbf{A})$ de una matriz \mathbf{A} se define como

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_{\lambda \in \sigma(\mathbf{A})} |\lambda|.$$

Proposición

Sea \mathbf{A} una matriz $n \times n$. Entonces $\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|$ para cualquier norma natural.

Radio espectral de la matriz

El conjunto $\sigma(\mathbf{A})$ de todos los eigenvalores distintos de \mathbf{A} se llama el *espectro* de \mathbf{A} .

El *radio espectral* $\rho(\mathbf{A})$ de una matriz \mathbf{A} se define como

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_{\lambda \in \sigma(\mathbf{A})} |\lambda|.$$

Proposición

Sea \mathbf{A} una matriz $n \times n$. Entonces $\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|$ para cualquier norma natural.

Sea (λ, \mathbf{v}) un eigenpar de \mathbf{A} y construyamos la matriz $\mathbf{X} = [\mathbf{v} \ \mathbf{0} \ \cdots \ \mathbf{0}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Entonces $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{AX} = [\mathbf{Av} \ \mathbf{A0} \ \cdots \ \mathbf{A0}] = \lambda \mathbf{X}$. Entonces

$$|\lambda| \|\mathbf{X}\| = \|\lambda \mathbf{X}\| = \|\mathbf{AX}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{X}\| \implies |\lambda| \leq \|\mathbf{A}\| \quad \forall \lambda \in \sigma(\mathbf{A})$$

Lo anterior es válido para cualquier norma. En particular, para la norma natural: $\|\mathbf{A}\| = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|}$. En los casos en que hay que demostrar que una cantidad es acotada por $\|\mathbf{A}\|$, es mejor mostrar que es acotado por el radio espectral.

Observaciones

Dado $\delta \in \mathbb{R}$, ¿Cuales son los eigenvalores de $\mathbf{A} + \delta \mathbf{I}$?

Observaciones

Dado $\delta \in \mathbb{R}$, ¿Cuales son los eigenvalores de $\mathbf{A} + \delta \mathbf{I}$?

Si (λ, \mathbf{v}) es un eigenpar, entonces

$$(\mathbf{A} + \delta \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \delta \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} + \delta \mathbf{v} = (\lambda + \delta)\mathbf{v}$$

Entonces $(\lambda + \delta, \mathbf{v})$ es un eigenpar de $\mathbf{A} + \delta \mathbf{I}$.

¿Cuales son los eigenvalores de \mathbf{A}^{-1} ?

Observaciones

Dado $\delta \in \mathbb{R}$, ¿Cuales son los eigenvalores de $\mathbf{A} + \delta \mathbf{I}$?

Si (λ, \mathbf{v}) es un eigenpar, entonces

$$(\mathbf{A} + \delta \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \delta \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} + \delta \mathbf{v} = (\lambda + \delta)\mathbf{v}$$

Entonces $(\lambda + \delta, \mathbf{v})$ es un eigenpar de $\mathbf{A} + \delta \mathbf{I}$.

¿Cuales son los eigenvalores de \mathbf{A}^{-1} ?

Si (μ, \mathbf{u}) es un eigenpar de \mathbf{A}^{-1} , entonces

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} = \mu \mathbf{u} \quad \implies \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} = \mu \mathbf{A}\mathbf{u} \quad \implies \quad \frac{1}{\mu}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

Así, $(1/\mu, \mathbf{u})$ es un eigenpar de \mathbf{A}^{-1} .

Círculos de Gershgorin

Teorema de Gershgorin

Sea \mathbf{A} una matriz cuadrada arbitraria. Los eigenvalores λ de $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ están localizados en la unión de n discos definidos por

$$|\lambda - a_{ii}| \leq r_i \quad \text{donde} \quad r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad i = 1, \dots, n.$$

Círculos de Gershgorin

Teorema de Gershgorin

Sea \mathbf{A} una matriz cuadrada arbitraria. Los eigenvalores λ de $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ están localizados en la unión de n discos definidos por

$$|\lambda - a_{ii}| \leq r_i \quad \text{donde} \quad r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad i = 1, \dots, n.$$

Lo que nos dice el teorema es que todos los eigenvalores de \mathbf{A} están contenidos en la unión C_r de los n círculos con centro en a_{ii} y radio r_i .

Como $\sigma(\mathbf{A}^T) = \sigma(\mathbf{A})$, entonces la unión C_c de los círculos definidos por

$$|\lambda - a_{jj}| \leq c_j \quad \text{donde} \quad c_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| \quad j = 1, \dots, n.$$

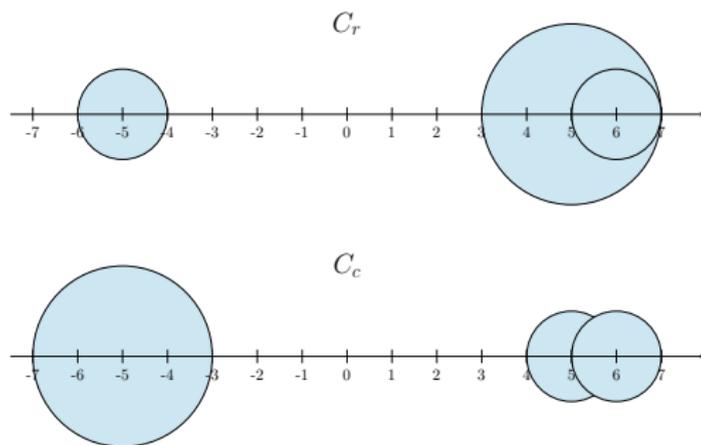
contienen a los eigenvalores de \mathbf{A} .

En resumen, los eigenvalores de \mathbf{A} están contenidos en $C_r \cap C_c$.

Ejemplo de los círculos de Gershgorin (I)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \implies \|\mathbf{A}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = 7.$$

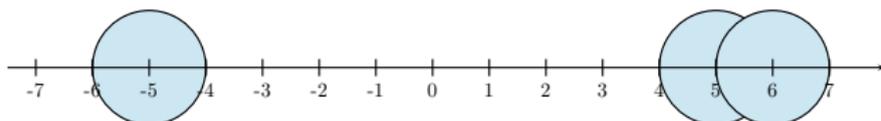
Como $|\lambda| \leq \|\mathbf{A}\|_{\infty}$, entonces todos los eigenvalores de \mathbf{A} están contenidos en un círculo centrado en 0 y radio 7. Con los círculos, se tiene



Ejemplo de los círculos de Gershgorin (II)

Si calculamos la intersección, tenemos

$$C_r \cap C_c$$



Para la matriz dada se tiene que

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{5, (1 \pm 5\sqrt{5})/2\} \approx \{5, 6.0902, -5.0902\}.$$

Método de la potencia (I)

- Este método puede encontrar el eigenvalor más grande en valor absoluto y su correspondiente eigenvector.

El algoritmo es el siguiente:

Método de la potencia

Dado un vector inicial \mathbf{v}^0 y fijando $k = 0$, repetimos hasta convergencia los siguientes pasos:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}^{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{v}^k \\ \mathbf{v}^{k+1} &= \mathbf{y}^{k+1} / \|\mathbf{y}^{k+1}\| \\ \lambda_{k+1} &= (\mathbf{v}^{k+1})^\top \mathbf{A}\mathbf{v}^{k+1} \\ k &= k + 1\end{aligned}$$

El criterio de convergencia puede ser que el residual sea menor que una cierta tolerancia, $|\mathbf{y}^k - \lambda_k \mathbf{v}^k| < \epsilon$.

Método de la potencia (II)

Proposición

Sea $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y definamos $\mathbf{r}(\mu) = \mathbf{A}\mathbf{u} - \mu\mathbf{u}$. Entonces el mínimo de $\|\mathbf{r}(\mu)\|_2$ es

$$\mu = \frac{\mathbf{u}^\top \mathbf{A}\mathbf{u}}{\mathbf{u}^\top \mathbf{u}}.$$

Para este valor, $\mathbf{r}(\mu)$ es ortogonal a \mathbf{u} .

Definición

Sean \mathbf{v} y \mathbf{u} dos vectores con $\mathbf{v}^\top \mathbf{u} \neq 0$. Entonces la cantidad

$$\frac{\mathbf{v}^\top \mathbf{A}\mathbf{u}}{\mathbf{v}^\top \mathbf{u}}.$$

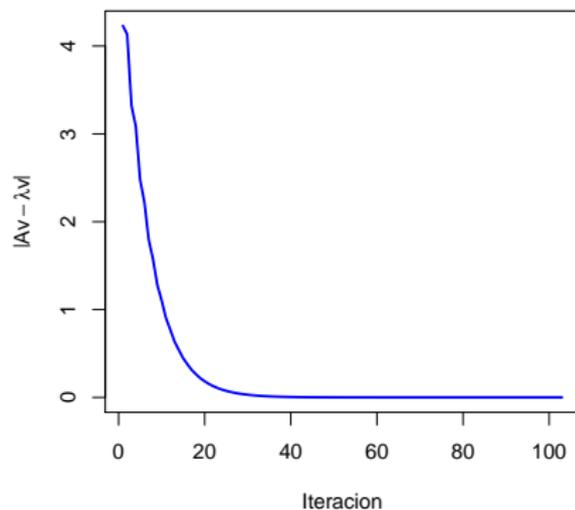
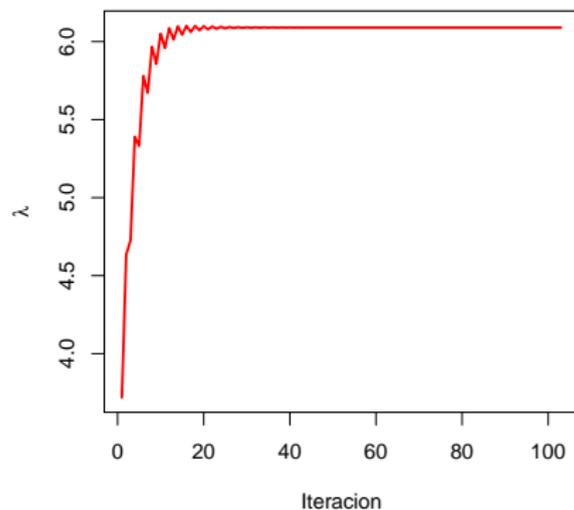
se llama un *cociente de Rayleigh*.

Ejemplo A

Usando la matriz \mathbf{A} del ejemplo anterior e inicializando con

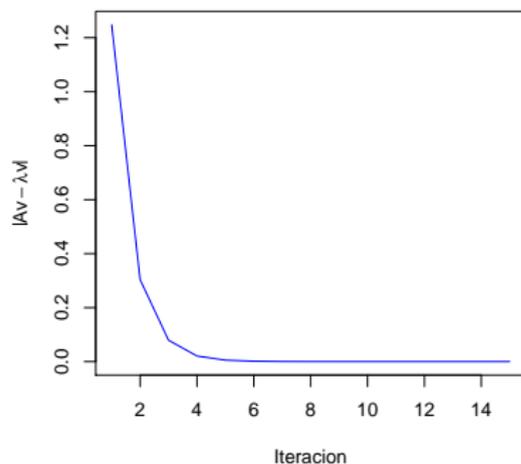
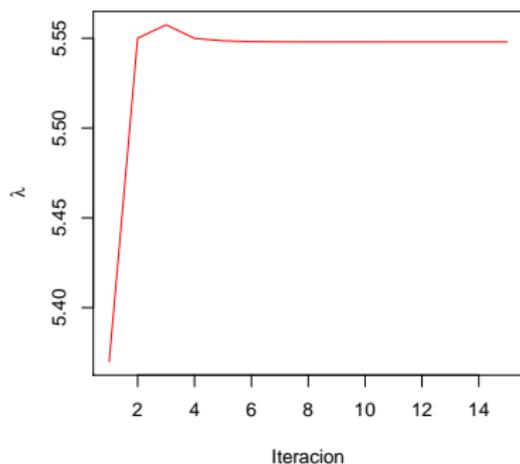
$$\mathbf{v}^0 = (1, 1, 1)^T$$

se obtiene el valor 6.090170 en 103 iteraciones con $\|\mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v}\| \approx 6.28 \times 10^{-8}$.



Ejemplo B

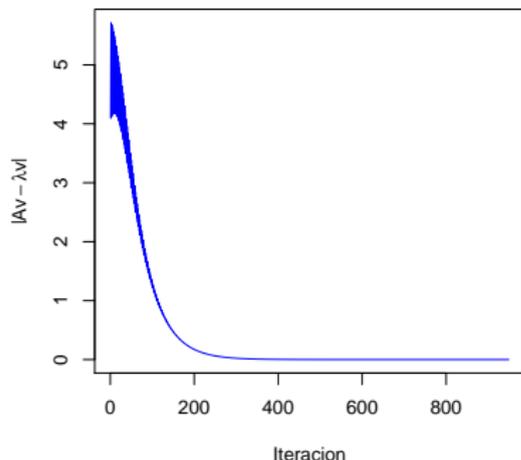
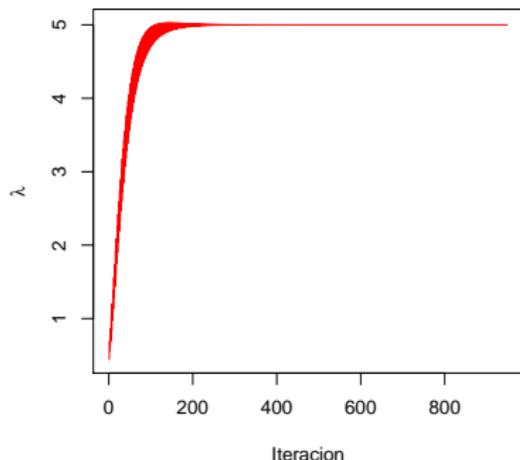
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5.0 & -0.10 & 0.9 & 1.00 & 0.40 \\ -0.5 & 1.45 & -0.05 & 0.00 & 0.25 \\ 0.2 & 0.05 & 1.13 & 0.10 & 0.35 \\ 1.6 & -0.25 & 0.5 & 1.00 & 0.30 \\ 1.4 & 0.40 & 0.2 & 0.25 & -0.80 \end{bmatrix}$$



$\lambda = 5.547928$, $\|Av - \lambda v\| \approx 1.04 \times 10^{-8}$ en 15 iteraciones

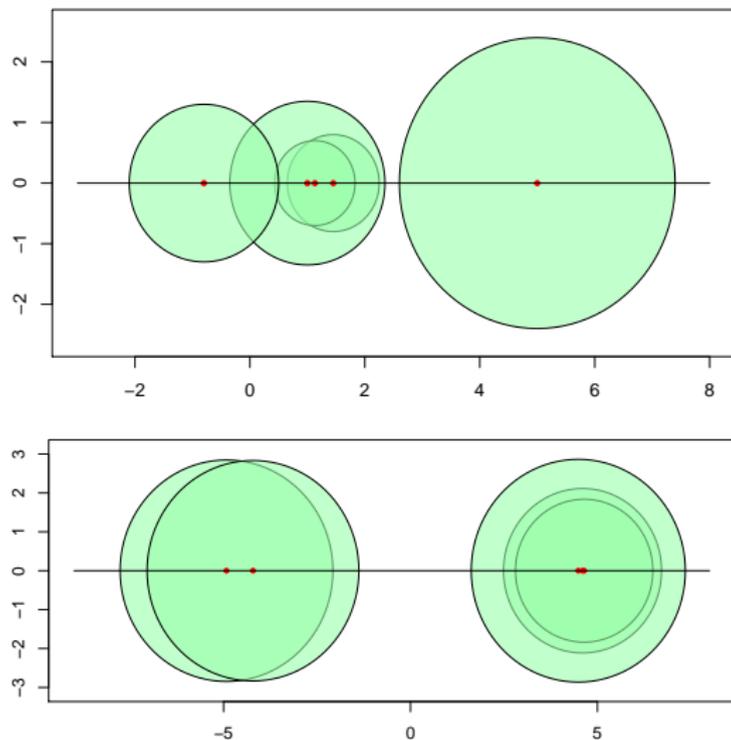
Ejemplo C

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4.6023708 & -0.6484326 & 2.6800333 & 0.1378698 & 0.3655997 \\ -0.3480484 & -4.9229298 & 0.0876574 & -1.2066205 & -1.2046782 \\ 1.0992412 & 0.0206325 & -4.2138133 & -0.3166074 & -1.3973391 \\ 0.5966447 & 2.3193512 & -2.5578133 & 4.6455689 & -0.1206493 \\ -0.0702810 & -1.8568523 & 0.7597306 & -0.1774737 & 4.4888034 \end{bmatrix}$$



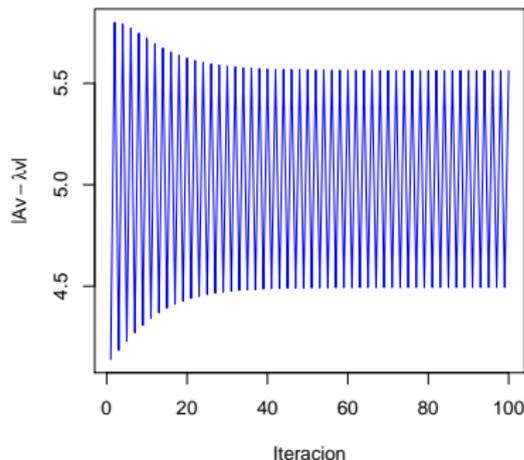
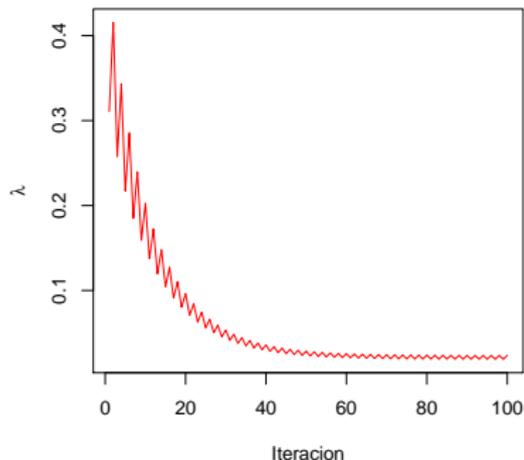
$\lambda = 5.0$, $\|A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v}\| \approx 4.62 \times 10^{-8}$ en 949 iteraciones

Comparación de los ejemplos B y C



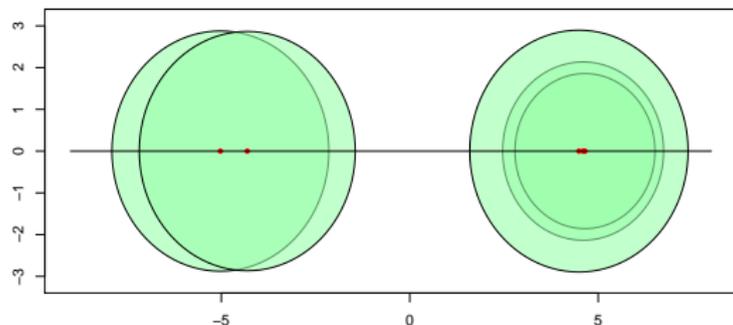
Ejemplo D (I)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4.5986464 & -0.6556048 & 2.7087409 & 0.1380393 & 0.3692491 \\ -0.3513251 & -5.0234452 & 0.0894931 & -1.2194504 & -1.2172484 \\ 1.1110924 & 0.0219267 & -4.3105139 & -0.3201127 & -1.4125578 \\ 0.6010043 & 2.3446976 & -2.5872029 & 4.6477059 & -0.1220816 \\ -0.0718948 & -1.8765426 & 0.7680468 & -0.1796849 & 4.4876068 \end{bmatrix}$$



$\|\mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v}\| \approx 5.56$ en 100 iteraciones

Ejemplo D (II)



Ejemplo Eigenvalores

B $-0.9419583, 0.6370984, 1.0520125, 1.4849196, 5.5479279$

C $-4.9000000, -4.5000000, 4.4000000, 4.6000000, 5.0000000$

D $-5.0000000, -4.6000000, 4.4000000, 4.6000000, 5.0000000$

Convergencia del método de la potencia (I)

Supongamos que $(\lambda_i, \mathbf{v}_i)$ es un eigenpar de $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots |\lambda_n|.$$

Dado $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$, se debe tener que $\mathbf{x}^0 = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{v}_i$. Así

$$\mathbf{A}^k \mathbf{x}^{(0)} = \sum_{i=1}^n \beta_i \lambda_i^k \mathbf{v}_i.$$

$$\frac{1}{\lambda_1^k} \mathbf{A}^k \mathbf{x}^{(0)} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \sum_{i=2}^n \beta_i \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} \mathbf{v}_i.$$

Como $|\lambda_1| > |\lambda_i|$ para $i = 2, \dots, n$, tenemos que

$$\frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} \longrightarrow 0 \quad \text{si } k \longrightarrow \infty$$

Entonces

$$\frac{1}{\lambda_1^k} \mathbf{A}^k \mathbf{x}^{(0)} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \epsilon^{(k)} \quad \text{con } \epsilon^{(k)} \longrightarrow 0 \quad \text{si } k \longrightarrow \infty$$

Convergencia del método de la potencia (II)

Sea \mathbf{u} un vector tal que $\mathbf{u}^T \mathbf{v}_1 \neq 0$. Entonces

$$\frac{\mathbf{u}^T \mathbf{A}^{k+1} \mathbf{x}^{(0)}}{\mathbf{u}^T \mathbf{A}^k \mathbf{x}^{(0)}} = \frac{\lambda_1^{k+1} (\beta_1 \mathbf{u}^T \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}^T \boldsymbol{\epsilon}^{(k+1)})}{\lambda_1^k (\beta_1 \mathbf{u}^T \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}^T \boldsymbol{\epsilon}^{(k)})} \rightarrow \lambda_1 \quad \text{si } k \rightarrow \infty$$

Puesto que $\mathbf{A} \mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1$, entonces

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{v}_1^T \mathbf{A} \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1},$$

una elección natural para el vector \mathbf{u} es

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^k \mathbf{x}^{(0)}$$

De esta forma tenemos que

$$\frac{(\mathbf{A}^k \mathbf{x}^{(0)})^T \mathbf{A}^{k+1} \mathbf{x}^{(0)}}{(\mathbf{A}^k \mathbf{x}^{(0)})^T \mathbf{A}^k \mathbf{x}^{(0)}} = \frac{(\mathbf{y}^{(k)})^T \mathbf{A} \mathbf{y}^{(k)}}{(\mathbf{y}^{(k)})^T \mathbf{y}^{(k)}} = \frac{(\mathbf{y}^{(k)})^T \mathbf{A} \mathbf{y}^{(k)}}{\|\mathbf{y}^{(k)}\|^2} = \left(\frac{\mathbf{y}^{(k)}}{\|\mathbf{y}^{(k)}\|} \right)^T \mathbf{A} \frac{\mathbf{y}^{(k)}}{\|\mathbf{y}^{(k)}\|}$$

Convergencia del método de la potencia (III)

$$\frac{(\mathbf{A}^k \mathbf{x}^{(0)})^\top \mathbf{A}^{k+1} \mathbf{x}^{(0)}}{(\mathbf{A}^k \mathbf{x}^{(0)})^\top \mathbf{A}^k \mathbf{x}^{(0)}} = (\mathbf{v}^{(k)})^\top \mathbf{A} \mathbf{v}^{(k)}$$

Las suposiciones importantes para que método converja son

- Hay un eigenvalor dominante, es decir,

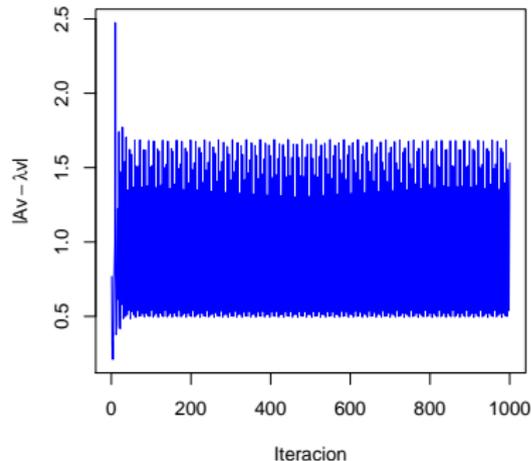
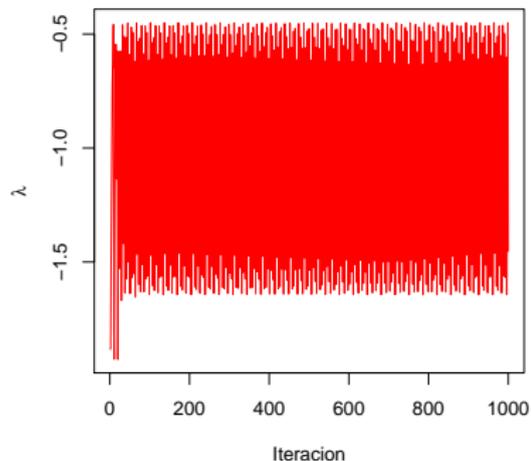
$$|\lambda_1| > |\lambda_i| \quad \text{para } i = 2, \dots, n.$$

- El vector inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ no puede ser ortogonal a \mathbf{v}_1 .

Hay que notar otro aspecto importante para el método de la potencia, que se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo E (I)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.2 & -0.5 & -0.7 & -0.3 \\ 0.1 & -0.3 & 0.4 & 0.4 & -0.3 \\ -2.9 & -0.6 & -1.1 & -0.9 & 1.0 \\ -1.4 & 0.0 & 0.6 & -0.5 & -0.3 \\ 0.8 & -1.5 & -0.6 & 1.2 & -0.7 \end{bmatrix}$$

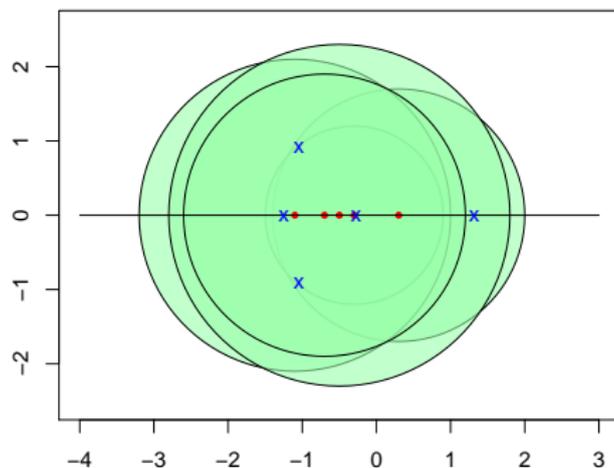


Ejemplo E (II)

$$\|\mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v}\| \approx 1.1 \quad \text{en 1000 iteraciones}$$

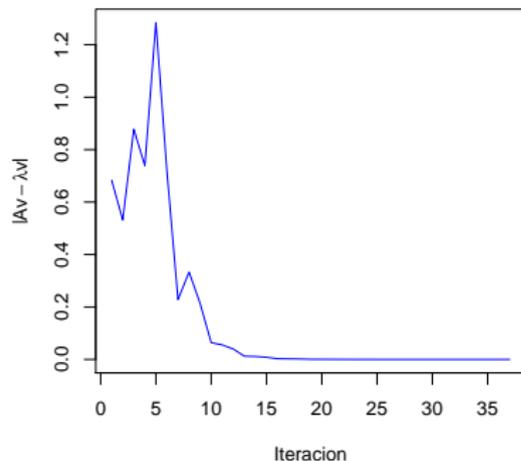
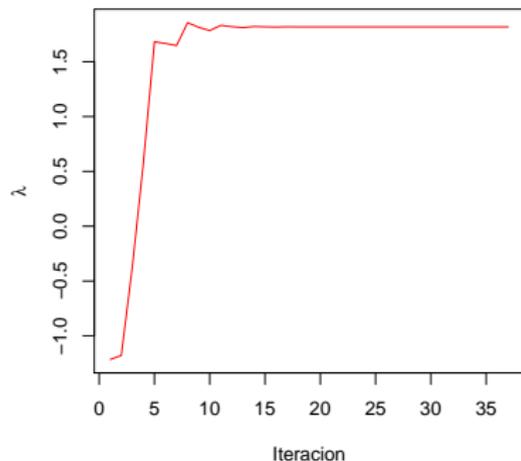
Los eigenvalores de la matriz anterior son

$$1.317638, -1.047000 + 0.914528i, -1.047000 - 0.914528i, \\ -1.248337, -0.275302$$



Ejemplo F (I)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 & -0.5 & -0.7 & -0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.4 & -0.3 \\ -2.9 & -0.6 & -0.6 & -0.9 & 1.0 \\ -1.4 & 0.0 & 0.6 & 0.0 & -0.3 \\ 0.8 & -1.5 & -0.6 & 1.2 & -0.2 \end{bmatrix}$$

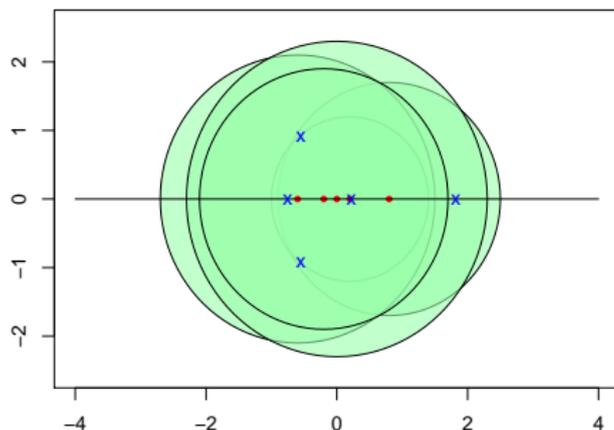


Ejemplo F (II)

$\lambda = 1.817638$, $\|A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v}\| \approx 4.68 \times 10^{-8}$ en 37 iteraciones

Los eigenvalores del matriz anterior son

1.817638, $-0.547000 + 0.914528i$, $-0.547000 - 0.914528i$
 -0.748337 , 0.224698



Observaciones (I)

Si $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_n]$ es la matriz que tiene por columnas los eigenvectores de \mathbf{A} , y $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ la matriz diagonal con los eigenvalores de \mathbf{A} , entonces

$$\mathbf{AV} = \mathbf{VD}.$$

Proposición

Supongamos que $(\lambda_i, \mathbf{v}_i)$ es un eigenpar de \mathbf{A} , y que λ_1 tiene multiplicidad 1. Si \mathbf{x} es un vector tal que $\mathbf{x}^T \mathbf{v}_1 = 1$, entonces

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{x}^T$$

tiene por eigenvalores $0, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, y eigenvectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$, donde

$$\mathbf{v}_i = (\lambda_i - \lambda_1) \mathbf{v}_1 + \lambda_1 (\mathbf{x}^T \mathbf{w}_i) \mathbf{v}_1$$

para $i = 2, 3, \dots, n$.

Método de la potencia inversa (I)

- En lugar de aplicar las iteraciones a la matriz \mathbf{A} , el método de la potencia inversa opera con la matriz $(\mathbf{A} - \delta \mathbf{I})^{-1}$.
- El método converge al eigenvalor más cercano a δ .

Método de la potencia inversa

Dado un vector inicial \mathbf{x}^0 , la escalar δ que define la traslación, y fijando $k = 0$, repetimos hasta que $\mathbf{r} < \epsilon$ para obtener el eigenpar (μ, \mathbf{x}^k) :

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} - \delta \mathbf{I})\mathbf{y} &= \mathbf{x}^k \\ \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{y}/\|\mathbf{y}\| \\ \mathbf{w} &= \mathbf{x}^k/\|\mathbf{y}\| \\ \rho &= \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{w} \\ \mu &= \delta + \rho \\ \mathbf{r} &= \mathbf{w} - \rho \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x}^{k+1} &= \hat{\mathbf{x}} \\ k &= k + 1\end{aligned}$$

Convergencia del método de la potencia inversa

El argumento es el mismo que el usado para el método de la potencia. Note que

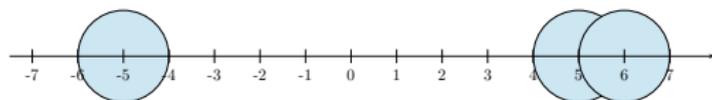
- $\mathbf{A} - \delta\mathbf{I}$ tiene los mismos eigenvectores que \mathbf{A} .
- Si λ_j es un eigenvalor de \mathbf{A} , entonces $\lambda_j - \delta$ es un eigenvalor de $\mathbf{A} - \delta\mathbf{I}$.
- Los eigenvalores de $(\mathbf{A} - \delta\mathbf{I})^{-1}$ son de la forma

$$\frac{1}{\lambda_j - \delta}$$

Eligiendo de manera apropiada δ podemos hacer que $\frac{1}{\lambda_j - \delta}$ sea el eigenvalor dominante.

Ejemplo (I)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$



Eigenvalores: -4.88959807 , 4.81228115 , 6.07731691 .

Tomamos $\mathbf{x}^0 = (1, 1, 1)^\top$. Para diferentes valores de σ se obtiene lo siguiente para una tolerancia 10^{-8} y un máximo de 200 iteraciones:

δ	Iteraciones	Valor final	$\ r\ $
-6	9	-4.88959807	7.6868×10^{-9}
4	24	4.81228115	8.4095×10^{-9}
7	200	7.92268309	1.8454
5.5	84	6.07731692	8.4447×10^{-9}