Taller de Combinatoria

Joaquín Ortega y Adolfo Quiroz

Marzo 2011

http://www.cimat.mx/∼jortega/cursosJO.html

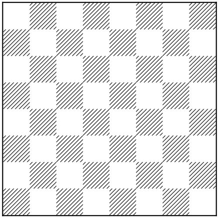
Introducción

La Teoría Combinatoria se ocupa del estudio de los arreglos que se pueden formar con los objetos de un conjunto en patrones que satisfagan reglas específicas.

Entre los principales problemas de interés están los siguientes:

- Existencia del arreglo.
- Enumeración o clasificación de los arreglos.
- Estudio de un arreglo específico.
- Construcción de un arreglo óptimo.

Tablero de Ajedrez



Tenemos una cantidad grande de dominós que cubren exactamente

dos cuadrados adyacentes del tablero: 

¿Es posible colocar 32 dominós sobre el tablero de modo que no haya superposiciones, cada dominó cubra 2 cuadros y todos los cuadros del tablero estén cubiertos?

Tablero de Ajedrez

- Vamos a decir que un cubrimiento de este tipo es un *cubrimiento perfecto*.
- Es fácil ver que sí hay cubrimientos perfectos para un tablero de ajedrez.
- Es más difícil contar de cuántas maneras podemos hacer esto. M. E. Fisher demostró en 1961 que hay exactamente 12,988,816 maneras de hacerlo.

Tablero de Ajedrez

Consideremos ahora un tablero más general, con m filas y n columnas.

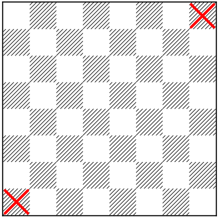
Consideremos ahora un tablero más general, con m filas y n columnas.

Podemos ver ahora que no siempre existen cubrimientos perfectos, por ejemplo, un tablero 3×3 no tiene cubrimientos perfectos.

Tablero de Ajedrez

Es fácil ver que un tablero $m \times n$ tiene una cubierta perfecta si y sólo si al menos uno de los enteros m y n es par, o equivalentemente si el número de cuadros en el tablero es par.

Consideremos de nuevo un tablero de ajedrez típico y cortemos dos cuadros en esquinas diagonalmente opuestas, lo cual nos deja un total de 62 cuadros.
¿Existe un cubrimiento perfecto para este tablero?



El siguiente argumento demuestra que no hay cubrimientos perfectos para esta configuración.

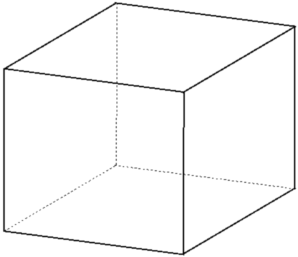
Hay que tener en cuenta que por la configuración del tablero, cada dominó cubre un cuadro negro y otro blanco. Por lo tanto 31 dominós cubren 31 cuadros blancos y 31 negros.

Pero al cortar cuadros diagonalmente opuestos hemos cortado dos cuadros del mismo color, en nuestra gráfica dos cuadros negros.

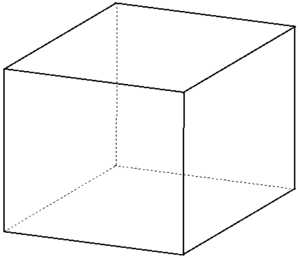
Por lo tanto el nuevo tablero tiene 62 cuadros: 32 blancos y 30 negros y no es posible cubrirlos de manera perfecta con los 31 dominós.

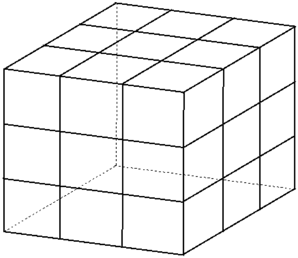
Cortar un Cubo

Tenemos un cubo de 3×3 y queremos cortarlo en 27 cubos más pequeños de lado 1. ¿Cuál es el menor número de cortes necesarios para hacer esto?



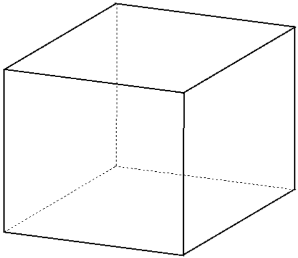
Tenemos un cubo de 3×3 y queremos cortarlo en 27 cubos más pequeños de lado 1. ¿Cuál es el menor número de cortes necesarios para hacer esto?





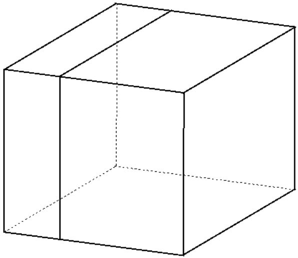
Cortar un Cubo

Una manera de hacerlo es hacer 2 cortes paralelos en cada dirección:

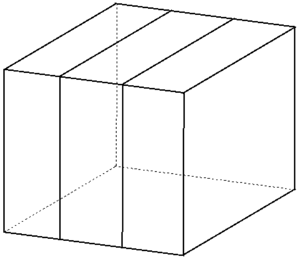


Cortar un Cubo

Una manera de hacerlo es hacer 2 cortes paralelos en cada dirección:

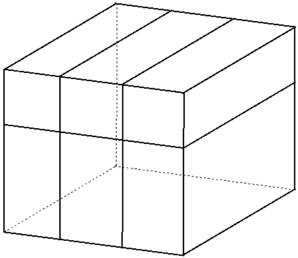


Una manera de hacerlo es hacer 2 cortes paralelos en cada dirección:



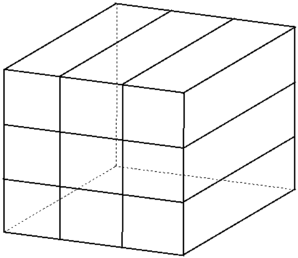
Cortar un Cubo

Una manera de hacerlo es hacer 2 cortes paralelos en cada dirección:

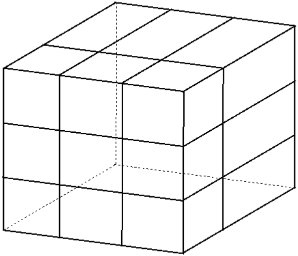


Cortar un Cubo

Una manera de hacerlo es hacer 2 cortes paralelos en cada dirección:

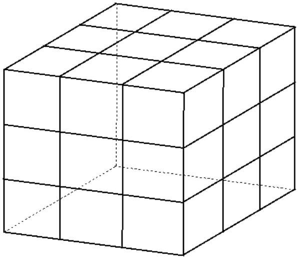


Una manera de hacerlo es hacer 2 cortes paralelos en cada dirección:



Cortar un Cubo

Una manera de hacerlo es hacer 2 cortes paralelos en cada dirección:



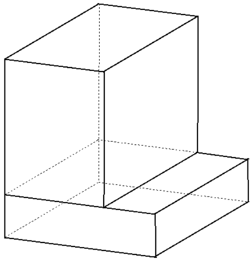
Cortar un Cubo

¿Es posible hacerlo con un número menor de cortes si podemos mover las piezas luego de cada corte?

Cortar un Cubo

¿Es posible hacerlo con un número menor de cortes si podemos mover las piezas luego de cada corte?

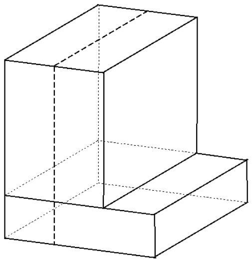
La figura muestra un ejemplo: un plano vertical cortaría una parte del cubo original que no se incluiría si no hubiésemos movido las piezas después del primer corte.



Cortar un Cubo

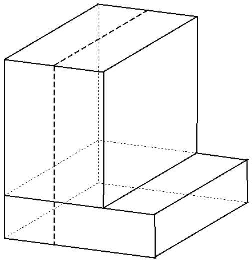
¿Es posible hacerlo con un número menor de cortes si podemos mover las piezas luego de cada corte?

La figura muestra un ejemplo: un plano vertical cortaría una parte del cubo original que no se incluiría si no hubiésemos movido las piezas después del primer corte.



Cortar un Cubo

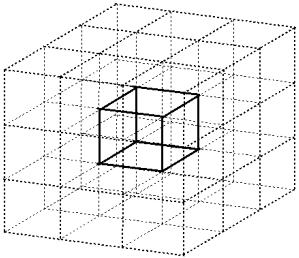
La posibilidad de mover las piezas después de cada corte dificulta el problema pues ahora deberíamos tener en cuenta todos los posibles desplazamientos de las piezas que obtenemos a cada paso, y como el número de piezas aumenta con cada corte, el número de desplazamientos también lo hará.



Cortar un Cubo

Hay un argumento sencillo que permite responder la pregunta.

De los 27 cubos que obtenemos al dividir el cubo inicial todos tienen al menos una cara que formaba parte de una de las caras del cubo inicial, salvo uno: el cubo del medio.

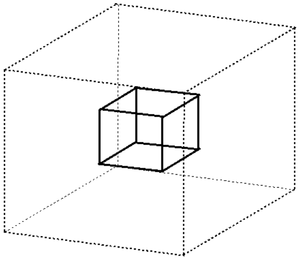


Cortar un Cubo

Hay un argumento sencillo que permite responder la pregunta.

Las caras de este cubo se forman a partir los cortes.

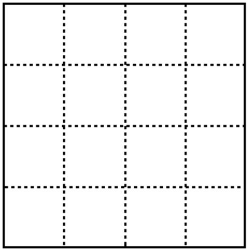
Como el cubo tiene seis caras hacen falta seis cortes para crearlo.



Por lo tanto siempre hacen falta al menos seis cortes.

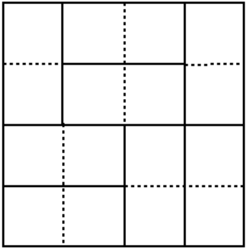
Cortar un Tablero

Consideremos un tablero de ajedrez 4×4,



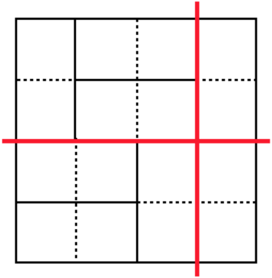
Cortar un Tablero

Consideremos un tablero de ajedrez 4×4, que puede cubrirse de manera perfecta con 8 dominós.



Cortar un Tablero

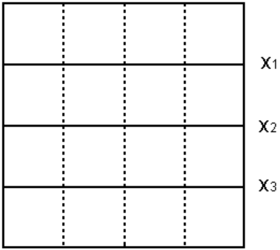
Demostrar que siempre es posible cortar el tablero en dos piezas horizontales no vacías o en dos piezas verticales no vacías sin cortar ninguno de los ocho dominós.



Llamaremos una recta que hace esto un *divisor*.

Supongamos que hay un cubrimiento perfecto de un tablero 4×4 tal que ninguno de las tres rectas horizontales ni las tres rectas verticales que cortan el tablero en dos partes es un divisor.

Sean x_1, x_2 y x_3 el número de dominós que cortan las rectas horizontales.

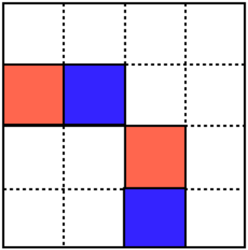


Cortar un Tablero

Como no hay divisores,

$$x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad x_3 > 0.$$

Un dominó horizontal cubre dos cuadros en una fila, mientras que un dominó vertical cubre dos cuadros en filas sucesivas.

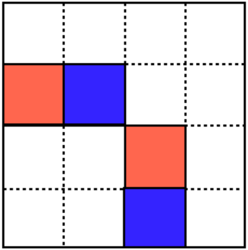


Cortar un Tablero

A partir de esto concluimos que x_1 es par, y de manera similar también lo son x_2 y x_3:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 + 2 + 2 = 6$$

de modo que hay al menos 6 dominós verticales en el cubrimiento.

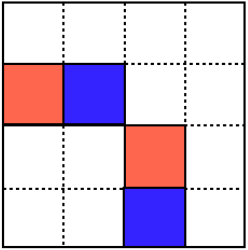


Cortar un Tablero

Un razonamiento similar muestra que hay al menos 6 dominós horizontales.

Como $12 > 8$ tenemos una contradicción.

Por lo tanto es imposible cubrir perfectamente un tablero 4×4 sin que haya un divisor.



Principio de Multiplicación. *Si tenemos dos conjuntos de k y n elementos, respectivamente, y queremos escoger dos elementos de modo que uno sea del primero y el otro del segundo, esto lo podemos hacer de $k \times n$ maneras.*

Principios Básicos

Principio de Multiplicación. *Si tenemos dos conjuntos de k y n elementos, respectivamente, y queremos escoger dos elementos de modo que uno sea del primero y el otro del segundo, esto lo podemos hacer de $k \times n$ maneras.*

Principio de Suma. *Si una situación puede ocurrir de k maneras distintas y una segunda situación excluyente de la primera puede ocurrir de n maneras, entonces existen $k + n$ maneras en las cuales puede ocurrir alguna de las dos situaciones.*

Subconjuntos de un conjunto finito

Si C es un conjuntos con n elementos:

$$C = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

el número de subconjuntos distintos de C que podemos formar (incluyendo el conjunto vacío) es

$$2^n.$$

C es un conjunto con n elementos y queremos formar sucesiones **ordenadas** (vectores) de longitud k permitiendo que los elementos se **repitan**.

El número de maneras de hacer esto se llama **Variaciones con repetición de n elementos tomados de k en k** y es

$$n^k.$$

Variaciones sin Repetición

C es un conjunto con n elementos y queremos formar sucesiones **ordenadas** (vectores) de longitud k **sin repetir** elementos.

El número de maneras de hacer esto se llama **Variaciones sin repetición de n elementos tomados de k en k** y es

$$V_k^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)$$

Usando la notación $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \cdots \times 2 \times 1$ tenemos

$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Caso especial: $k = n$.

Las permutaciones de un conjunto a n elemento son las maneras de **ordenar** los elementos del conjunto.

Hay $n!$ permutaciones de un conjunto de n elementos.

C es un conjunto con n elementos y queremos formar subconjuntos (**sin orden**) de tamaño k **sin repetir** elementos.

El número de maneras de hacer esto se llama **Combinaciones de n elementos tomados de k en k** y es

$$\binom{n}{k} = C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Triángulo de Pascal

Triángulo de Pascal

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} \quad (1 \leq n \leq m-1).$$

Resumen

- **Muestreo con orden y con repetición:** Variaciones con repetición.Si queremos seleccionar k elementos de un conjunto de tamaño n, con reposición y en orden, lo podemos hacer de n^k maneras.
- **Muestreo con orden y sin repetición:** Variaciones (sin repetición). Si queremos seleccionar k elementos de un conjunto de tamaño n, sin reposición y en orden, es necesario que $k \leq n$ y lo podemos hacer de

$$V_k^n = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

maneras.
Si $k = n$ son las permutaciones de n y $V_n^n = n!$.

Resumen

- **Muestreo sin orden y sin reposición:** Combinaciones. Si queremos seleccionar k elementos de un conjunto de tamaño n, sin reposición y sin orden, es necesario que $k \leq n$ y lo podemos hacer de $\binom{n}{k} = \frac{n!}{n!(n-k)!}$ maneras.
- **Muestreo sin orden y con reposición:** Este caso no tiene un nombre particular y es el más complicado de los cuatro. Si queremos seleccionar k elementos de un conjunto de tamaño n, con reposición y sin orden, esto lo podemos hacer de

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

maneras.