Series y Probabilidades.

Alejandra Cabaña[1] **y Joaquín Ortega** [2]

[1]IVIC, Departamento de Matemática, y Universidad de Valladolid.
[2]CIMAT, AC

Índice general

Capítulo 1

Sucesiones y Series Numéricas

1.1. Sucesiones

Un sucesión es un conjunto ordenado de números. Por ejemplo

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$$

es la sucesión de los números pares positivos. El primer elemento es 2, el segundo es 4, el quinto es 10 y el elemento que ocupa el lugar n es $2n$. Vemos en este ejemplo que lo que hemos hecho es asociar a cada número natural $1, 2, 3, \dots$ un número par $2, 4, 6, \dots$:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots & 2n & \cdots \end{array}$$

Por lo tanto, una sucesión no es más que una función definida sobre los números naturales que toma valores reales. La definición formal es la siguiente.

Definición 1.1 Una *sucesión* de números reales es una función $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Si $f(n) = x_n$, decimos que x_n es el *n-ésimo término de la sucesión.* Usualmente escribiremos $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ o $\{x_n, n \geq 1\}$ para denotar esta sucesión y en algunos casos simplemente (x_n).

Observación 1.1

1. En algunos casos consideraremos sucesiones que comienzan en cero en lugar de comenzar en uno: $\{x_n, n \geq 0\}$. También consideraremos sucesiones dóblemente infinitas: $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$
2. Aunque la mayoría de las sucesiones que veremos serán de números reales, también aparecerán sucesiones de números complejos e incluso sucesiones de funciones. La definición en cada caso es totalmente análoga.

Definición 1.2 Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$. Decimos que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge a x*, si para todo real positivo ϵ existe un entero positivo $N = N(\epsilon)$ tal que $|x_n - x| < \epsilon$, siempre que $n \geq \mathbb{N}$.

Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x escribimos $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$ o $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, decimos que x es el *límite* de la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y que la sucesión es *convergente.* Una sucesión que no es convergente, es *divergente.*

Esta definición formaliza la siguiente idea intuitiva: x es el límite de la sucesión (x_n) si a medida que crece el índice n los elementos x_n de la sucesión están cada vez más próximos al límite x.

Ejemplo 1.1

1. $x_n = \frac{1}{n}$. Esta sucesión converge a 0 en $\mathbb{R}$: dado $\epsilon > 0$ escogemos $N = N(\epsilon)$ tal que $\frac{1}{N} < \epsilon$ (esto es posible por la propiedad Arquimedeana de $\mathbb{N}$). Entonces tenemos que para todo $n \geq N$

$$|x_n - x| = \Big|\frac{1}{n} - 0\Big| = \Big|\frac{1}{n}\Big| \leq \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Gráficamente (ver figura 1.1), la convergencia equivale a que, para cualquier $\varepsilon > 0$, a partir de un cierto índice N, todos los miembros de la sucesión caigan dentro de una banda de ancho 2ε centrada en el valor del límite, que es cero en este caso.

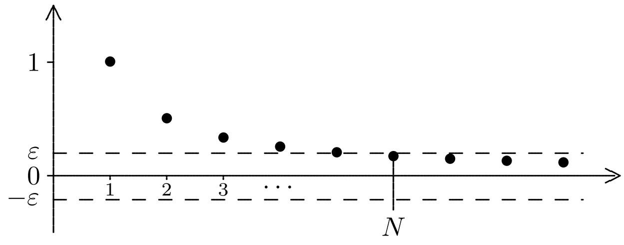


Figura 1.1: La sucesión $1/n$.

2. $x_n = n$ en $\mathbb{R}$. Esta sucesión es divergente ya que para cualquier $x \in \mathbb{R}$ y cualquier $\epsilon > 0$ fijo existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > x + \epsilon$ y la condición de la definición no se satisface.

3. Consideremos la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, donde $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Hemos visto en el primer ejemplo que la sucesión $(\frac{1}{n})$ converge a 0 y por lo tanto nuestra idea intuitiva es que la sucesión $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ debe converger a $1 + 0 = 1$. Veamos a partir de la definición que esto es efectivamente cierto. Sea $\epsilon > 0$, queremos ver que existe $N = N(\epsilon)$ tal que si $n \geq N, |x_n - 1| < \epsilon$.

$$|x_n - 1| = \left|1 + \frac{1}{n} - 1\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}.$$

Al igual que en el ejemplo 1, basta escoger N de modo que $\frac{1}{N} < \epsilon$ para tener

$$|x_n - 1| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon.$$

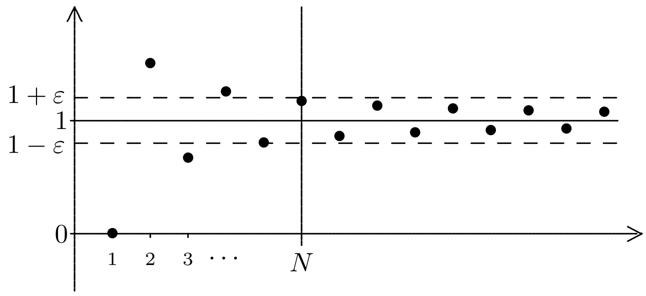


Figura 1.2: La sucesión $1 + \frac{(-1)^n}{n}$.

La noción de sucesión convergente es una de las ideas fundamentales del Análisis, y suponemos que el estudiante está familiarizado con ella. A continuación presentamos una colección de propiedades, cuya demostración dejamos como ejercicio.

Teorema 1.1 (Propiedades) *1. El límite de una sucesión convergente es único.*

2. Toda sucesión convergente es acotada.

3. *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x si y sólo si toda vecindad de x contiene todos los términos de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ excepto un número finito de ellos.*

4. *Si $E \subset \mathbb{R}$ y x es un punto de acumulación de E, existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en E para la cual $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.*

Supongamos que (x_n) e (y_n) son sucesiones de números reales y $x_n \to x, y_n \to y$. Entonces

5. $\lim(x_n + y_n) = x + y$

6. *Para* $c \in \mathbb{R},\ \lim(cx_n) = cx$

7. $\lim(x_n y_n) = xy$

8. $\lim(x_n/y_n) = x/y$ *si* $y \neq 0$ *e* $y_n \neq 0$ *para* $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.3 Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}^*$, decimos que esta sucesión tiene *límite infinito* o *tiende a infinito*, si dado cualquier $a \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $x_n > a$. Escribimos $x_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$ o $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

De manera similar decimos que la sucesión *tiene límite menos infinito* o *tiende a menos infinito* si dado cualquier $a \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $x_n < a$. Escribimos $x_n \to -\infty$ cuando $n \to \infty$ o $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Estas sucesiones no son convergentes.

Ejemplos 1.2

1. $x_n = n^2$. Esta sucesión tiende a infinito: como los términos de la sucesión son positivos basta considerar $a > 0$ en la definición. En este caso basta tomar $N \geq \sqrt{a}$ para obtener que
$$n \geq N \Longrightarrow x_n > a$$

2. Veamos que la sucesión $x_n = \dfrac{1}{(2n+1)^{1/2} - (2n-1)^{1/2}}$ también tiende a infinito.
$$\begin{aligned} x_n = \frac{1}{(2n+1)^{1/2} - (2n-1)^{1/2}} &= \frac{(2n+1)^{1/2} + (2n-1)^{1/2}}{(2n+1) - (2n-1)} \\ &= \frac{1}{2}((2n+1)^{1/2} + (2n-1)^{1/2}) \\ &\geq \frac{1}{2}(2(2n-1)^{1/2}) \\ &= (2n-1)^{1/2}. \end{aligned}$$
Dado $a > 0$ basta tomar $N > \frac{a^2+1}{2}$ para obtener que
$$n > N \Longrightarrow \frac{1}{(2n+1)^{1/2} - (2n-1)^{1/2}} > a.$$

Resaltamos la diferencia entre $x_n \to x$ y $x_n \to \infty$. En el primer caso x es un número y podemos medir la distancia entre x y x_n. En cambio ∞ no es un número y la distancia entre ∞ y x_n siempre vale ∞. Si $x_n \to \infty$ la sucesión x_n es divergente.

Las sucesiones que no tienen límite en el sentido que acabamos de describir (finito o infinito), se conocen como *sucesiones oscilantes*.

Ejemplo 1.3
Sea $x_n = (-1)^n$. Si n es par, $x_n = 1$ mientras que si n es impar, $x_n = -1$; pero ni 1 ni -1 pueden ser límites de esta sucesión: supongamos que 1 es límite, entonces a partir de un cierto entero N, todos los términos de la sucesión deberían satisfacer $|x_n - 1| < 1/2$. Pero si $n > N$ es impar entonces $|x_n - 1| = |-1-1| = 2 > 1/2$, y la sucesión no converge a 1. De manera similar se muestra que tampoco converge a -1.

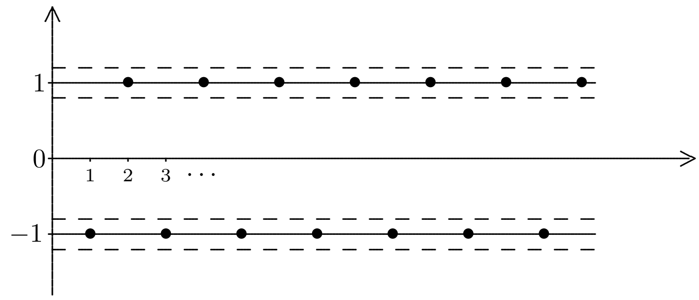


Figura 1.3: La sucesión $(-1)^n$

Uno podría pensar que si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente con límite x y b es un número real tal que $x_n < b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $x < b$ también, pero esto no es cierto: basta tomar $x_n = 1 - 1/n$ para todo n, $x = 1$ y $b = 1$. Con este ejemplo vemos que el resultado del próximo teorema es lo mejor que se puede esperar.

Teorema 1.2 *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente de números reales con límite x. Si $b \in \mathbb{R}$ es tal que $x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \leq b$.*

Demostración. Supongamos que $x > b$, entonces tomando $h = \frac{x-b}{2} > 0$ existe $N_h \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < h$ para todo $n \geq N_h$ y esto implica

$$x_n > x - h = x - \frac{1}{2}(x - b) > b + \frac{1}{2}(x - b) > b$$

lo que contradice la hipótesis. •

Corolario 1.1 *Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones convergentes de números reales con límites x e y respectivamente. Si $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \leq y$.*

Corolario 1.2 *Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de números reales con $y_n \leq x_n \leq z_n$ para todo n y $\lim y_n = \lim z_n = \ell$ entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente y $\lim x_n = \ell$.*

Definición 1.4 Si $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, decimos que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es *creciente*. Es útil considerar el crecimiento de la sucesión en sentido amplio, permitiendo que términos sucesivos sean iguales. Si $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, decimos que la sucesión es *estrictamente creciente*. Si $x_{n+1} \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, decimos que la sucesión es *decreciente* y si $x_{n+1} < x_n$ para todo n, que es *estrictamente decreciente*. Decimos además que cualquiera de estas sucesiones es *monótona*. Probaremos a continuación una propiedad importante de las sucesiones monótonas: no pueden ser oscilantes.

Teorema 1.3 *Toda sucesión monotona en $\mathbb{R}$ tiene límite en $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Una sucesión monotona en $\mathbb{R}$ converge si y sólo si es acotada.*

Demostración. Consideremos una sucesión creciente $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R} : x_1 \leq x_2 \leq \ldots$ y sea $x = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Veamos que $x = \lim x_n$:

Caso 1: $x = \infty$, es decir $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no está acotada superiormente. Por lo tanto, dado $M > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N > M$. Pero como la sucesión es creciente se cumple que

$$n \geq N \Longrightarrow \quad x_n \geq x_N > M$$

es decir, $\lim x_n = \infty$

Caso 2: $x \in \mathbb{R}$. Dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N > x - \epsilon$. De nuevo, como la sucesión es creciente

$$n \geq N \Longrightarrow \quad x - \epsilon < x_N \leq x_n \leq x$$

de modo que si $n \geq N, d(x_n, x) < \epsilon$ y concluimos que $\lim x_n = x$.

La demostración para sucesiones decrecientes es similar tomando $x = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ •

Corolario 1.3 *Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente en $\mathbb{R}$, $\lim x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente en $\mathbb{R}$, $\lim x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Ejemplo 1.4
La sucesión a^n.

Un ejemplo útil e importante es el de la sucesión $x_n = a^n$, para $a \in \mathbb{R}$. El comportamiento de esta sucesión cuando $n \to \infty$ depende del valor de a.

1. Si $a = 0, x_n = a^n = 0$ y $\lim x_n = 0$.

2. Si $a = 1, x_n = a^n = 1$ y $\lim x_n = 1$.

3. Si $a = -1$, la sucesión toma alternadamente los valores $+1$ y -1 y es oscilante.

4. Si $a > 1$ la sucesión $x_n = a^n$ es creciente:

   $$x_n - x_{n-1} = a^n - a^{n-1} = a(a^{n-1} - 1) > 0.$$

   Por el Corolario 1.3, $\lim x_n = \sup x_n$. Veamos que la sucesión no está acotada. Sea $k = a - 1$ y escribamos $a = 1 + k$. Usando el desarrollo binomial obtenemos

   $$x_n = a^n = (1+k)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} k^j > 1 + nk$$

   Como $k > 0$, la sucesión $(1 + nk)_{n=1}^{\infty}$ no está acotada y por lo tanto tampoco lo está $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

5. Si $0 < a < 1$ entonces $1 < a^{-1}$. Sea $\ell > 0$ tal que $a^{-1} = 1 + \ell$. Entonces

   $$0 < x_n = \frac{1}{(1+\ell)^n} < \frac{1}{1 + n\ell}$$

   Es fácil ver que cuando $n \to \infty, 1/(1 + n\ell) \to 0$, de modo que por el Corolario 1.1, $x_n \to 0$.

6. Si $a < -1$ entonces $a = -b$, con $b > 1$ y por (4) $b^n \to \infty$. Por lo tanto la sucesión $(b_n)^n$ toma alternadamente valores positivos y negativos que son cada vez mas grandes en valor absoluto, es decir la serie es oscilante y no es acotada.

Resumiendo tenemos

(1)	$a > 1,$	$a^n \to \infty.$
(2)	$a = 1,$	$a^n \to 1.$
(3)	$-1 < a < 1,$	$a^n \to 0.$
(4)	$a = -1,$	a^n oscila y es acotada.
(5)	$a < -1,$	a^n oscila y no es acotada.

Definición 1.5 Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una *sucesión de Cauchy* si para todo $\epsilon > 0$ hay un entero N tal que $|x_n - x_m| < \epsilon$ si $n \geq N, m \geq N$.

Toda sucesión convergente es de Cauchy: si $\lim x_n = x$ y $\epsilon > 0$ exite $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ para $n \geq N$. Por lo tanto, si $n \geq N, m \geq N$ se tiene

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \epsilon$$

El recíproco también es cierto y es una propiedad muy importante de los números reales con la distancia usual que se conoce como completitud: $\mathbb{R}$ con la distancia usual es completo.

Ejercicios 1.1

1. *Establezca la convergencia o divergencia de las siguientes sucesiones:*

$$x_n = \frac{n}{n+1}; \quad x_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}; \quad x_n = \frac{2n}{3n^2+1}; \quad x_n = \frac{2n^2+3}{3n^2+1}; \quad x_n = 2n^2 - n.$$

2. *(a) De un valor de N tal que, si $n > N, n^2 - 4n > 10^6$. (b) De un valor de N tal que si $n > N$ entonces $|x_n - x| < 10^{-100}$, donde $x_n = \frac{n^2+1}{n^2}$ y x es el límite de esta sucesión.*
3. *Si $s_1 > 0$ y $s_{n+1} \geq K s_n$, donde $K > 1$, para todos los valores de n, entonces $s_n \to +\infty$.*
4. *Si para todo n, $|s_{n+1}| \leq K|s_n|$, donde $0 < K < 1$, entonces $s_n \to 0$. La conclusión también es válida si la hipótesis se satisface sólo para $n > N$.*
5. *Si $\lim \frac{s_{n+1}}{s_n} = h$, con $-1 < h < 1$, muestre que $s_n \to 0$.*
6. *Demuestre el teorema 1.1*
7. *Discuta el comportamiento de la sucesión a^n/n^k cuando $n \to \infty$, donde k es un entero positivo.*
8. *Dé ejemplos de sucesiones s_n para las cuales $\lim \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$ y (a) $s_n \to \infty$, (b) $s_n \to 5$, (c) $s_n \to 0$.*
9. *Si (x_n) es una sucesión de números reales, (y_n) una sucesión de reales positivos y (x_n/y_n) es monótona, demuestre que la sucesión definida por $z_n = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$ también es monótona.*
10. *Sea $0 < a < b < \infty$. Definimos $x_1 = a, x_2 = b, x_{n+2} = (x_n + x_{n+1})/2$. ¿Es convergente la sucesión (x_n)? Si la respuesta es afirmativa, ¿Cuál es el límite?*
11. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones tales que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}$ es finito, entonces o bien ambas sucesiones convergen al mismo límite o bien ambas divergen.*
12. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión, $p \in \mathbb{N}$, e $y_n = x_{n+p}$ entonces o bien ambas sucesiones convergen al mismo límite o bien ambas divergen.*
13. **El número** *e. Para $n \in \mathbb{N}$ sean*

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n \qquad b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}.$$

Demuestre que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es creciente, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y ambas sucesiones convergen al mismo límite. Este límite común se denota por e y se cumple que $2 < e < 4$. (Puede usar el siguiente resultado, conocido como la desigualdad de Bernoulli: Si $x \geq -1$ y $k \in \mathbb{N}$ entonces $(1+x)^k \geq 1 + kx$).

14. *Demuestre que $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo: toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ converge.*

1.2. Límites Superior e Inferior de una Sucesión.

Definición 1.6 Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}^*$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$\alpha_k = \sup_{n \geq k} x_n; \qquad \beta_k = \inf_{n \geq k} x_n$$

Vemos que la sucesión $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente mientras que $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ es creciente. Definimos el *límite superior* de la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$: $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ ó $\limsup_{n\to\infty} x_n$ por

$$\overline{\lim}\, x_n = \lim_{k\to\infty} \alpha_k = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} x_n$$

y el *límite inferior*: $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ ó $\liminf_{n\to\infty} x_n$ por

$$\underline{\lim}\, x_n = \lim_{k\to\infty} \beta_k = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} x_n$$

Ambos límites estan siempre definidos y son elementos de $\mathbb{R}^*$. Por la monotonía de las sucesiones (α_k) y (β_k) tenemos

$$\overline{\lim}\, x_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} x_n = \inf_{k\geq 1} \sup_{n\geq k} x_n$$

$$\underline{\lim}\, x_n = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} x_n = \sup_{k\geq 1} \inf_{n\geq k} x_n$$

Además como $\beta_k \leq \alpha_k$ para todo k se tiene que

$$\underline{\lim}\ x_n \leq \overline{\lim}\, x_n.$$

Una forma equivalente de escribir ambas definiciones es la siguiente:

$$\overline{\lim}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{p\geq 1} x_{n+p}$$

$$\underline{\lim}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{p\geq 1} x_{n+p}$$

Teorema 1.4 *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y $a, b \in \mathbb{R}^*$. Entonces*

1. $\overline{\lim}\, x_n = a$ *si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:*
   a) Si $\alpha < a$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} :\ x_n > \alpha\}$ es infinito
   b) Si $\beta > a$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} :\ x_n > \beta\}$ es finito
2. $\underline{\lim}\, x_n = b$ *si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:*
   a) Si $\alpha < b$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} :\ x_n < \alpha\}$ es finito
   b) Si $\beta > b$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} :\ x_n < \beta\}$ es infinito.

Demostración. Haremos solo el caso (1) con a finito. Sea $\alpha_k = \sup_{n\geq k} x_n$ y $a = \lim \alpha_k$. Sea $\alpha < a$, entonces $\alpha_k > \alpha$ para todo k. Por la definición de α_k, para cada k existe $n_k \geq k$ tal que $\alpha_k \geq x_{n_k} > \alpha$. Por lo tanto

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n > \alpha\} \supset \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$$

y este último conjunto es infinito.

Sea ahora $a < \beta$. Como $\alpha_k \downarrow a$ existe k_0 tal que $\alpha_{k_0} < \beta$ y por lo tanto si $n \geq k_0,\ x_n \leq \alpha_{k_0} < \beta$. Esto quiere decir que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n > \beta\}$ es finito.

Supongamos que, por el contrario, se satisfacen las condiciones 1.a) y b). Si $-\infty < a < \infty$, dado $\beta > a$ podemos escoger $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq \beta$ para todo $n \geq k_0$. Por lo tanto $\alpha_k \leq \alpha_{k_0} \leq \beta$ para todo $k \geq k_0$ y $\limsup x_n = \lim_{k\to\infty} \alpha_k \leq \beta$. Como esto es cierto para todo $\beta > a$ concluimos que $\limsup x_n \leq a$. Por otro lado, si $\alpha < a$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n > \alpha\}$ es infinito y por lo tanto $\alpha_k > \alpha$ y $\limsup x_n = \lim \alpha_k \geq \alpha$. Como esto es válido para cualquier $\alpha < a$ concluimos que $\limsup x_n \geq a$. •

Teorema 1.5 *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Entonces* $\lim x_n$ *existe en* $\mathbb{R}^*$ *si y sólo si* $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$. *En este caso* $\lim x_n = \overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$

Demostración. Supongamos que $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = \ell$. Si $\ell \in \mathbb{R}$ entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{p\geq 1} x_{n+p}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{p\geq 1} x_{n+p}\right) = \ell$$

y dado $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que

$$\sup_{p\geq 1} x_{n+p} \leq \ell + \epsilon \quad \text{para todo } n \geq N$$

$$\inf_{p\geq 1} x_{n+p} \geq \ell - \epsilon \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Por lo tanto

$$\ell - \epsilon \leq x_n \leq \ell + \epsilon \quad \text{para todo } n \geq N + 1$$

aquí concluimos que $x_n \to \ell$ cuando $n \to \infty$.

Si $\ell = +\infty$, entonces 1.a) del Teorema 1.4 dice que para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > \alpha$ para todo $n > N$, y por lo tanto $\lim x_n = +\infty$. De manera similar se trata el caso $\ell = -\infty$.

Supongamos ahora que $\lim x_n = \ell$. Si $\ell \in \mathbb{R}$, dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$\ell - \epsilon < x_n < \ell + \epsilon \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Por lo tanto

$$\ell - \epsilon \leq \inf_{p\geq 1} x_{n+p} \leq \sup_{p\geq 1} x_{n+p} \leq \ell + \epsilon \ \ \text{para todo } n \geq N$$

y entonces

$$\ell - \epsilon \leq \lim\left(\inf_{p\geq 1} x_{n+p}\right) \leq \lim\left(\sup_{p\geq 1} x_{n+p}\right) \leq \ell + \epsilon$$

Como esto es cierto para cualquier ϵ concluimos

$$\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = \ell.$$

Si $\lim x_n = +\infty$, dado $M \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $x_n > M$. Por lo tanto

$$\inf_{p\geq 1} x_{n+p} \geq M \qquad \text{para } n \geq N$$

y en consecuencia

$$\underline{\lim}\, x_n = \lim \ \inf_{p\geq 1} x_{n+p} \geq M$$

esto quiere decir que $+\infty = \underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n \leq +\infty$.

De manera similar se muestra el resultado en el caso $\lim x_n = -\infty$. •

Observación 1.2 Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Un punto $x \in \mathbb{R}^*$ es un *punto de acumulación* de la sucesión si toda vecindad de x contiene a infinitos elementos de la sucesión. Es decir, si $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}, x$ es un punto de acumulación de la sucesión si y sólo si es punto de acumulación de B. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}^*$ y sea A el conjunto de puntos de acumulación de esta sucesión. Entonces $\underline{\lim}\, x_n \in A$ y $\overline{\lim}\, x_n \in A$. y además $\underline{\lim}\, x_n \leq c \leq \overline{\lim}\, x_n$ para todo $c \in A$. Como consecuencia, una sucesión en $\mathbb{R}$ tiene límite en $\mathbb{R}^*$ si y sólo si tiene un solo punto de acumulación.

Ejercicios 1.2

1. *Sea* $a_n = (-1)^n$. *Muestre que* $\operatorname{limsup} a_n = -\operatorname{liminf} a_n = 1$.
2. *Definimos la sucesión* (a_n) *por* $a_{2n} = 1/n$, $a_{2n-1} = 0$, $n \geq 1$. *Demuestre que* $\operatorname{limsup} a_n = \operatorname{liminf} a_n = 0$

3. *Si* (a_n) *y* (b_n) *son dos sucesiones de números reales que satisfacen* $a_n \geq b_n$ *demuestre que* $\limsup a_n \geq \limsup b_n$ *y* $\liminf a_n \geq \liminf b_n$.
4. *Sean* (x_n) *e* (y_n) *sucesiones reales positivas y acotadas, entonces* $\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \leq \underline{\lim}\,(x_n+y_n) \leq \overline{\lim}\,(x_n+y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$. *De ejemplos que muestren que estas desigualdades pueden ser estrictas.*
5. *Sean* (x_n) *e* (y_n) *sucesiones reales acotadas, entonces*
$$\underline{\lim}\, x_n \underline{\lim}\, y_n \leq \underline{\lim}\,(x_n y_n) \leq \underline{\lim}\, x_n \overline{\lim}\, y_n \leq \overline{\lim}\,(x_n y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n \overline{\lim}\, y_n$$
6. *Sea* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números reales positivos. Muestre que* $\underline{\lim}\, \frac{s_{n+1}}{s_n} \leq \underline{\lim}\, \sqrt[n]{s_n} \leq \overline{\lim}\, \sqrt[n]{s_n} \leq \overline{\lim}\, \frac{s_{n+1}}{s_n}$.

1.3. Subsucesiones

Definición 1.7 Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Si $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales, decimos que la sucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es una *subsucesión* de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Teorema 1.6 *Sea* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión en* $\mathbb{R}$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge a* $x \in \mathbb{R}$ *si y sólo si toda subsucesión de* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge a* x.

Demostración. Supongamos que $x_n \to x$ y sea $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Dado $\epsilon > 0$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, $|x_n - x| < \epsilon$. Para la subsucesión tomamos $K \in \mathbb{N}$ tal que $n_K > N$. Entonces para todo $k \geq K$ se tiene $|x_{n_k} - x| < \epsilon$ y $x_{n_k} \to x$ cuando $k \to \infty$.

Por otro lado, si toda subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x, basta considerar $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ como subsucesión de sí misma. •

Teorema 1.7 *Toda sucesión acotada en* $\mathbb{R}$ *tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Sea $E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, el conjunto de todos los valores que toma la sucesión. Por la observación 1.2, $\underline{\lim}\, x_n$ es punto de acumulación de E y por lo tanto existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ que converge a $\underline{\lim}\, x_n$. •

Ejercicios 1.3

1. *Construya una sucesión divergente en* $\mathbb{R}$ *que tenga una subsucesión convergente.*
2. *Sea* (a_n) *una sucesión acotada de números reales. Demuestre que hay una subsucesión* (a_{n_i}) *tal que* $a_{n_i} \to \liminf a_n$ *cuando* $i \to \infty$.
3. *Si* (a_n) *es una sucesión acotada y* (a_{n_i}) *es una subsucesión, demuestre que* $\liminf a_n \leq \liminf a_{n_i} \leq \limsup a_{n_i} \leq \limsup a_n$.

1.4. Series

Definición 1.8 Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$
La sucesión $(S_n)_{n\geq 1}$ se conoce como la *serie infinita* asociada a, o generada por, la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. La notación usual es
$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad \text{ó} \quad \sum x_n.$$

Decimos que x_n es el *n-ésimo sumando* y S_n es la *n-ésima suma parcial* de la serie. Si la sucesión de sumas parciales $(S_n)_{n\geq 1}$ converge decimos que $\sum x_n$ es una *serie convergente*. En caso contrario la serie es *divergente*. Si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ decimos que S es la *suma* de la serie $\sum x_n$ y escribimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$$

Así, para las series convergentes, el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ tiene un doble papel: representa la serie y también su suma. Es importante también que el lector distinga claramente entre la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y entienda la relación entre ambas.

Consideraremos ocasionalmente series de la forma $\sum_{n=p}^{\infty} x_n$ donde $p \in \mathbb{Z}$, las cuales definimos como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ donde $y_n = x_{n+p-1}$.

Ejemplo 1.5
Sea $x_n = 1/n$. Las sumas parciales (S_n) correspondientes a esta sucesión son

$$S_1 = 1; \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}; \quad S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}; \quad \ldots$$

En la figura 1.4 vemos, en la parte inferior, la gráfica de la sucesión x_n y en la parte superior, la de la sucesión de sumas parciales S_n. La primera sucesión es decreciente mientras que la segunda es creciente.

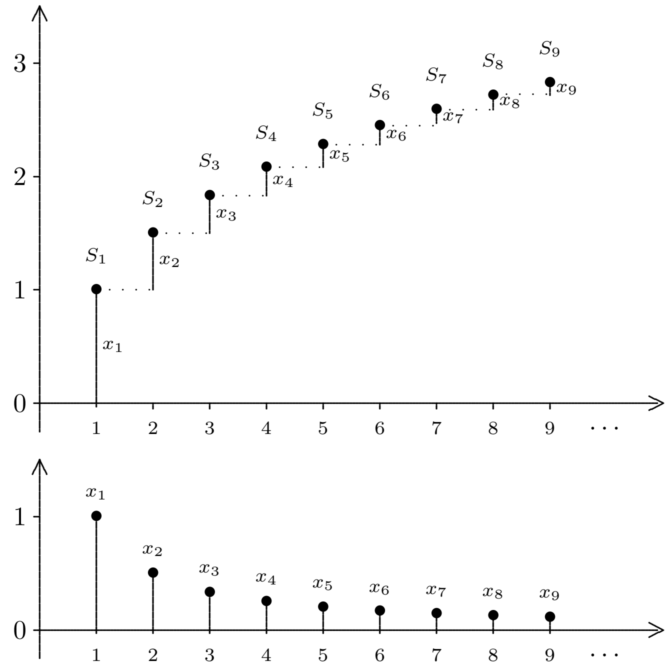


Figura 1.4: La sucesión $1/n$ y la serie asociada.

Está claro a partir de la definición que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ determina totalmente la serie $\sum x_n$ y sus propiedades. Lo contrario también es cierto ya que la serie $\sum x_n$ es la sucesión $(S_n)_{n\geq 1}$ de sumas parciales y $x_n = S_n - S_{n-1}$. Por lo tanto, todos los resultados que hemos visto para sucesiones tienen una versión para series. En particular, el Criterio de Cauchy para series es el siguiente:

Teorema 1.8 (Criterio de Cauchy) *La serie* $\sum x_n$ *es convergente si y sólo si para todo* $\epsilon > 0$ *existe un entero* N *tal que*

$$\left| \sum_{k=m}^{n} x_k \right| < \epsilon$$

siempre que $n \geq m \geq N$.

Si $\sum x_n$ converge entonces el teorema anterior con $m = n$ nos dice que $n \geq N \Rightarrow |x_n| < \epsilon$, es decir

Corolario 1.4 *Si* $\sum x_n$ *converge entonces* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

La condición enunciada en el Corolario 1.4 es sólo necesaria, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.6
Si $x_n = n^{-1/2}$ entonces $x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ pero

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$$

y como $\sqrt{n} \to \infty$ cuando $n \to \infty$, $\sum x_n$ diverge a ∞.

Haciendo $n \to \infty$ con m fijo en el teorema anterior obtenemos

Corolario 1.5 *Si* $\sum x_n$ *converge, dado* $\epsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $m \geq N$ *entonces* $|\sum_{k=m}^{\infty} x_n| < \epsilon$

Observación 1.3 Si se cambia un número finito de sumandos de una serie no se altera su convergencia o divergencia, pero puede variar el valor de su suma. En contraste, el cambio de un número finito de términos de una sucesión no altera su convergencia o divergencia, ni se altera el límite al cual converge, en caso de que sea convergente. La diferencia se debe a que el m-ésimo sumando de la serie $\sum x_n$ aparece en la k-ésima suma parcial $\sum_{j=1}^{k} x_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ si $k \geq m$ y en consecuencia, el cambio en el valor de un sumando de la serie altera el valor de todos los términos de la sucesión de sumas parciales, excepto por una cantidad finita de ellos.

‘

Ejemplo 1.7
Consideremos de nuevo el ejemplo de la sucesión $x_n = 1/n$ y supongamos que cambiamos los dos primeros términos de la sucesión: en lugar de 1 y $0,5$ ponemos 0 en ambos casos (Ver figura 1.5). En el caso de la sucesión x_n cambian los valores de estos dos términos pero el resto de la sucesión permanece igual, mientras que en el caso de la serie, el valor de todas las sumas parciales ha sido alterado: en lugar de $1;\ 1,5;\ 1,83;\ 2,08;\ 2,28;\ldots$ tenemos ahora $0;\ 0;\ 0,33;\ 0,58;\ 0,78;\ \ldots$. Como veremos más adelante, ambas series son divergentes, pero las sucesiones de sumas parciales son distintas.

Corolario 1.6 *Si* $\sum x_n$ *y* $\sum y_n$ *son series de términos reales y* $x_n = y_n$ *para todo n suficientemente grande, entonces o ambas series convergen o ambas divergen.*

Demostración. Para algún $N \in \mathbb{N}$ se tiene que $n > N$ implica que $x_n = y_n$. Por lo tanto para $n \geq m > N$ se tiene

$$\sum_{k=m}^{n} x_k = \sum_{k=m}^{n} y_k$$

y por el criterio de Cauchy ambas series convergen o ambas divergen. •

Usando los teoremas que hemos visto para sucesiones obtenemos el siguiente resultado para series.

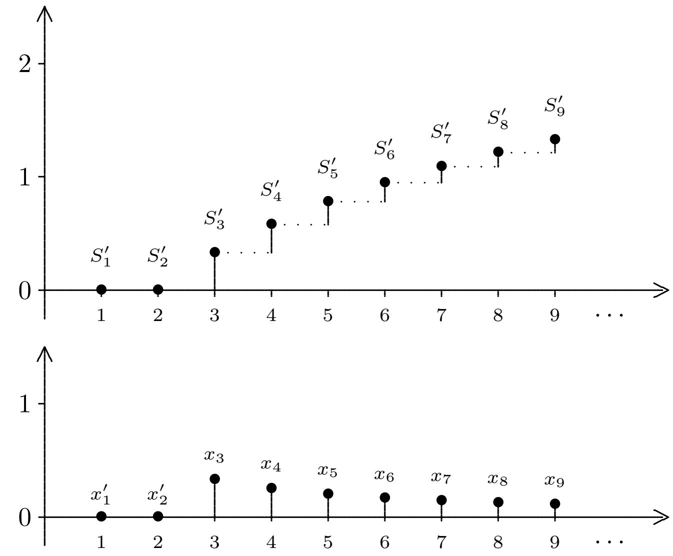


Figura 1.5: La sucesión $1/n$ y la serie asociada con los dos primeros términos cambiados.

Teorema 1.9 *Si $\sum x_n$ y $\sum y_n$ son series convergentes de términos reales y $c \in \mathbb{R}$ entonces*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} cx_n = c \sum_{n=1}^{\infty} x_n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$

En particular, las dos series de la izquierda convergen.

Demostración. Ejercicio.

Teorema 1.10 (Serie Geométrica) *Sean $a, x \in \mathbb{R}$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n$ converge y su suma es $a/(1-x)$ si $|x| < 1$. Si $a \neq 0$ y $|x| \geq 1$ esta serie diverge.*

Demostración. La fórmula para progresiones geométricas nos dice que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} ax^k = a\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Aplicando los resultados estudiados para sucesiones, si $|x| < 1$ obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-x}.$$

Si $a \neq 0$ y $|x| \geq 1$ entonces $|ax^n| \geq |a| > 0$ para todo n y el Corolario 1.4 muestra que la serie no puede converger. •

Definición 1.9 Una serie $\sum x_n$ *converge absolutamente* (o es *absolutamente convergente*) si $\sum |x_n|$ converge.

Teorema 1.11 *Si $\sum x_n$ converge absolutamente entonces converge.*

Demostración. El resultado sigue de la desigualdad

$$\left|\sum_{k=n}^{m} x_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |x_k|$$

y el criterio de Cauchy. •

Definición. Si $\sum x_n$ converge pero $\sum |x_n|$ diverge decimos que $\sum x_n$ *converge condicionalmente.*

Ejercicios 1.4

1. *Muestre que* $\sum_0^\infty \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ *converge a 1.*
2. *Construya series con las siguientes propiedades*
   a) Σa_n *converge y* Σa_n^2 *diverge.*
   b) Σb_n *converge y* Σb_n^3 *diverge.*
   c) Σc_n *converge y* Σc_n^2 *y* Σc_n^3 *divergen.*
3. *Si* $\sum x_n$ *converge muestre que* $\sum \frac{x_n}{n}$ *también converge.*
4. *Si* $\sum x_n$ *converge y* $\sum y_n$ *diverge demuestre que* $\sum(x_n + y_n)$ *diverge y que* $\sum z_n$ *donde* $z_{2n} = x_n$ *y* $z_{2n-1} = y_n$ $(n \in \mathbb{N})$ *también diverge.*
5. *Si* $\sum x_n$ *converge a* S, *demuestre que* $\sum x_{n+1}$ *converge a* $S - a_1$ *y que* $\sum kx_n$ *converge a* kS.
6. *Si* $\sum x_n$ *converge a* S, *demuestre que* $\sum(x_n + x_{n+1})$ *converge a* $2S - x_1$. *Construya una serie divergente* $\sum y_n$ *tal que* $\sum(y_n + y_{n+1})$ *converja.*
7. *Sea* (n_k) *una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos con* $n_1 = 1$ *y sea* $\sum x_n$ *una serie convergente. Para* $k \in \mathbb{N}$ *sea* $b_k = \sum\{x_n : n_k \leq n < n_{k+1}\}$. *Demuestre que* $\sum b_n$ *converge y tiene la misma suma que* $\sum x_n$.
8. *Si* $\sum(x_{2n} + \lambda x_{2n-1})$ *y* $\sum(x_{2n} + \mu x_{2n-1})$ *son series convergentes, donde* $\lambda \neq \mu$, *demuestre que* $\sum x_n$ *converge.*
9. *Si* $\sum |x_n|$ *converge demuestre que* $\sum x_n^2$ *converge.*
10. *Si* $\sum x_n$ *converge absolutamente e* y_n *satisface* $(1+x_n)(1-y_n) = 1$, *demuestre que* $\sum y_n$ *converge absolutamente.*
11. *Si* $\sum x_n^2$ *converge, entonces* $\sum \frac{x_n}{n}$ *converge absolutamente.*
12. *Si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión decreciente y* $\sum x_n$ *converge, pruebe que* $nx_n \to 0$ *cuando* $n \to \infty$. *Deduzca que si* $\alpha \leq 1$ *entonces* $\sum n^{-\alpha}$ *diverge.*

1.5. Series de Términos Positivos

Definición 1.10 Sea $\sum x_k$ una serie con términos $x_k \geq 0$ y sea $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ su n-ésima suma parcial. Como $(S_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente, tiene un límite $S \in \mathbb{R}^*$ (que puede ser $+\infty$) . Escribimos $\sum_{k=1}^\infty x_k = S$. S se conoce como la *suma* de la serie. Si $S < \infty$ esta definición coincide con la anterior y decimos que la serie *converge*. Si $S = \infty$ la serie *diverge*. En cualquier caso la serie tiene suma y escribimos

$$\sum x_k < \infty \quad \text{ó} \quad \sum x_k = \infty$$

según el caso.

Teorema 1.12 *Sea* $\sum x_n$ *una serie con términos positivos.* $\sum x_n$ *converge si y sólo si la sucesión de sumas parciales es acotada.*

Demostración. Este resultado es consecuencia del Teorema 1.3. •

Ejemplo 1.8
La serie $\sum_{n=1}^\infty 1/n$, conocida como la serie armónica, es divergente. Veamos que la sucesión de sumas parciales correspondiente a esta serie no está acotada. Usaremos el hecho de que $(1/n)$ es una sucesión decreciente.

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1\\
S_2 &= 1 + \frac{1}{2}\\
S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} = 1 + 2\frac{1}{2}\\
S_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{8} = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + 4\frac{1}{8} = S_4 + \frac{1}{2} > 1 + 3\frac{1}{2}\\
S_{16} &= S_8 + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} > S_8 + 8\frac{1}{16} = S_8 + \frac{1}{2} > 1 + 4\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

y en general

$$S_{2^n} = S_{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n} > S_{2^{n-1}} + 2^{n-1}\frac{1}{2^n} = S_{2^{n-1}} + \frac{1}{2}.$$

Por recurrencia obtenemos que

$$S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$$

y vemos que esta sucesión no es acotada y por lo tanto la serie no converge.

Teorema 1.13 *Si $y_n,\ x_n \in [0, +\infty)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $c \geq 0$ entonces*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Demostración. Si todas las sumas que aparecen son finitas, esto es el Teorema 1.9. En caso contrario el resultado es consecuencia de la definición. •

1.5.1. Pruebas de Convergencia para Series de Términos Positivos

Para las series de términos positivos hay varios criterios que permiten determinar si las series son convergentes. Presentamos a continuación cuatro de ellos sin demostración. Suponemos que el estudiante está familiarizado con ellos. Todos los resultados que presentamos dependen, de manera fundamental, de que los términos de las series sean positivos. En esta sección, $x_n \geq 0$ y $y_n \geq 0$ para todo $n \geq 1$.

Teorema 1.14 (Criterio de Comparación) *Si para algún $K > 0$ y algún $N \in \mathbb{N}$, se tiene que $0 \leq x_n \leq Ky_n$ para todo $n \geq N$, entonces*

1. *Si $\sum y_n$ converge se tiene que $\sum x_n$ converge y $\sum_{n=N}^{\infty} x_n \leq K\sum_{n=N}^{\infty} y_n$*
2. *Si $\sum x_n$ diverge, $\sum y_n$ también.*

Corolario 1.7 *Si $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = K$, $0 < K < \infty$ entonces ambas series convergen o ambas divergen. Si $K = 0$, la convergencia de $\sum y_n$ implica la convergencia de $\sum x_n$, mientras que si $K = \infty$, la divergencia de $\sum x_n$ implica la de $\sum y_n$.*

Teorema 1.15 (Prueba del Cociente, d'Alembert) *Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos.*

1. *Si para algún $N \in \mathbb{N}$ existe un número real $\alpha \in (0, 1)$ para el cual $x_{n+1}/x_n \leq \alpha$ siempre que $n \geq N$ entonces $\sum x_n$ converge.*
2. *Si para algún $N \in \mathbb{N}$, se tiene que $x_{n+1}/x_n \geq 1$ siempre que $n \geq N$ entonces $\sum x_n$ diverge.*

Corolario 1.8 *Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión con $x_n > 0$ para $n \geq 1$.*

1. *Si* $\limsup \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ *entonces $\sum x_n$ converge.*
2. *Si* $\liminf \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ *entonces $\sum x_n$ diverge.*

En general, la prueba del cociente sólo funciona para series que convergen rápidamente y su principal aplicación es a las series de potencias, que estudiaremos más adelante.

Para poder usar el Criterio de Comparación es necesario conocer el comportamiento de algunas series. El próximo resultado es importante en este sentido.

Teorema 1.16 *La serie $\sum n^{-\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ y diverge si $\alpha \leq 1$.*

Demostración. Hemos visto que si $\alpha = 1$ la serie diverge. Si $\alpha < 1$, $n^{-\alpha} > n^{-1}$ y por el Criterio de Comparación, $\sum n^{-\alpha}$ diverge.

Supongamos ahora que $\alpha > 1$ y consideremos la suma para los índices n que satisfacen $N+1 \leq n \leq 2N$; entonces

$$n^{-\alpha} \leq (N+1)^{-\alpha} < N^{-\alpha}$$

y

$$\sum_{n=N+1}^{2N} n^{-\alpha} < N^{-\alpha}(2N - N - 1) < N^{1-\alpha}$$

Tomemos ahora $N = 2^j$, para $j = 0,\ 1, \dots,\ k-1$; obtenemos que

$$\sum_{1}^{2^k} n^{-\alpha} \leq \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}} n^{-\alpha} \leq \sum_{j=0}^{k-1} 2^{(1-\alpha)j} \leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(1-\alpha)j} = \frac{1}{1-2^{(1-\alpha)}}$$

donde $\sum 2^{(1-\alpha)j}$ es una serie geométrica convergente porque $\alpha > 1$ y $2^{1-\alpha} < 1$. Como estamos considerando una serie de términos positivos, la sucesión de sumas parciales es creciente y hemos mostrado que esta sucesión está acotada. Por el Teorema 1.12 la serie es convergente. •

Teorema 1.17 (Prueba de la Raíz) *Definamos* $\beta = \operatorname{limsup}(x_n)^{1/n}$. *Entonces*

a) Si $\beta < 1$, $\sum x_n$ *converge.*

b) Si $\beta > 1$, $\sum x_n$ *diverge.*

c) Si $\beta = 1$, *la prueba no da información.*

La prueba de la raíz es más fuerte que la prueba del cociente, como lo muestran los siguientes ejemplos:

Ejemplos 1.9

1. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$x_n = \begin{cases} 2^{-n}, & \text{si } n \text{ es par} \\ 3^{-n}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

entonces $\sum x_n < \sum 2^{-n} < \infty$. Ahora bien,

$$\underline{\lim}\, \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \tag{1.1}$$

$$\underline{\lim}(x_n)^{1/n} = \lim \left(3^{-n}\right)^{1/n} = \frac{1}{3} \tag{1.2}$$

$$\overline{\lim}(x_n)^{1/n} = \lim \left(2^{-n}\right)^{1/n} = \frac{1}{2} \tag{1.3}$$

$$\overline{\lim}\, \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty. \tag{1.4}$$

Vemos que la prueba de la raíz detecta la convergencia, mientras que la del cociente no nos da información.

2. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$x_n = \begin{cases} 2^{n}, & \text{si } n \text{ es par} \\ 2^{-n}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

entonces $\sum x_n = \infty$ y

$$\overline{\lim}(x_n)^{1/n} = \overline{\lim}\,(2^n)^{1/n} = 2 \tag{1.5}$$

$$\underline{\lim}\,\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{-(n+1)}}{2^n}\right) = \lim 2^{2n+1} = 0 \tag{1.6}$$

$$\overline{\lim}\,\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\left(\frac{2^{n+1}}{2^{-n}}\right) = \infty. \tag{1.7}$$

La prueba de la raíz detecta la divergencia mientras que la prueba del cociente no da información.

Bajo ciertas circunstancias hay una estrecha relación entre el comportamiento de la integral $\int_1^\infty f dt$ y el de la serie $\sum f(n)$.

Teorema 1.18 *Si f está definida para $x \geq 0$, es decreciente y positiva entonces*

$$\int_1^N f dx - \sum_{n=1}^N f(n)$$

tiende a un límite finito cuando $N \to \infty$.

Demostración. Llamemos

$$k_N = \int_1^N f dx - \sum_{n=1}^N f(n).$$

Como f es decreciente

$$k_{N+1} - k_N = \int_N^{N+1} f dx - f(N+1) \geq 0$$

de modo que la sucesión (k_N) es creciente. Llamemos ahora

$$\ell_N = \int_1^N f dx - \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

Un argumento similar muestra que la sucesión (ℓ_N) es decreciente. Además

$$\ell_N - k_N = f(N) \geq 0$$

Por lo tanto $k_N \leq \ell_N \leq \ell_1$ de modo que k_N está acotada superiormente. Por lo tanto k_N converge a un límite finito. •

Corolario 1.9 (Prueba de la Integral) *Si f está definida para $x > 0$, es decreciente y positiva, entonces $\sum f(n)$ converge si y sólo si $\int_1^\infty f dx$ converge.*

Demostración. Si $\int_1^\infty f\, dx$ converge entonces $\int_1^N f dx$ tiende a un límite finito cuando $N \to \infty$ y por lo tanto

$$\sum_{n=1}^N f(n) = \int_1^N f dx - k_N$$

también converge a un límite finito. Por otro lado, si $\sum_{n=1}^N f(n)$ converge a un límite finito cuando $N \to \infty$ entonces $f(n) \to 0$ cuando $n \to \infty$ y

$$\int_1^N f dx = \sum_{n=1}^N f(n) + k_N$$

también tiende a un límite finito cuando $N \to \infty$. Si $N < x < N+1$ entonces

$$\left|\int_1^x f dt - \int_1^N f dt\right| = \left|\int_N^x f dt\right| \leq f(N)$$

que tiende a cero cuando $N \to \infty$ y en este caso $\int_1^x$ converge a un límite finito cuando $x \to \infty$. •

Ejemplos 1.10

1. Tomemos $f(x) = 1/x$ en el teorema anterior, entonces

   $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

   tiende a un límite finito cuando $n \to \infty$. Este límite se conoce como la constante de Euler, se denota por γ y es un número en $(0,1)$.

2. Tomemos ahora

   $$f(x) = \left(x \log x \cdots \log_{r-1} x \; (\log_r(x))^{\alpha}\right)^{-1}$$

   donde

   $$\log_s(x) = \log(\log_{s-1}(x)), \qquad \log_2(x) = \log(\log(x))$$

   Sea a suficientemente grande de modo que f esté definida si $x > a$, entonces

   $$\int_a^x f dt = \frac{1}{1-\alpha} (\log_r t)\Big|_a^x = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left[(\log_r x)^{1-\alpha} - (\log_r(a))^{1-\alpha}\right] & \text{si } \alpha \neq 1. \\ \log_{r+1}(x) - \log_{r+1}(a) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

   por lo tanto la serie $\sum f(n)$ converge si $\alpha > 1$ y diverge si $\alpha \leq 1$. Estas series son útiles a los efectos de la prueba de comparación.

El próximo teorema muestra que el orden en el cual aparecen los términos de una serie de términos positivos no afecta su suma.

Teorema 1.19 *Sea A un conjunto numerablemente infinito y sea $\{a_k, k \geq 1\}$ una enumeración de A. Para cualquier función $f : A \to [0,\infty]$ se tiene*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(a_k) = sup\left\{\sum_{a\in F} f(a) : F \text{ es finito}, F \subset A\right\} \tag{1.8}$$

Nota: El símbolo $\sum_{a\in F} f(a)$ denota la suma de los valores de f en los puntos del conjunto F. En vista del Teorema escribimos el segundo miembro de (4.1) como

$$\sum_{a\in A} f(a) \quad \text{o} \quad \sum\{f(a) : a \in A\}$$

para cualquier $A \neq \varnothing$ y $f : A \to [0,\infty]$. Si $A = \varnothing$, $\sum_{a\in A} f(a) = 0$ por definición.
Demostración. Sea $\alpha < \sum_{a\in A} f(a)$. Escogemos $F \subset A$ finito de modo que

$$\alpha < \sum_{a\in F} f(a).$$

Escogemos ahora $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $F \subset \{a_k : 1 \leq k \leq k_0\}$. Por lo tanto

$$\alpha < \sum_{a\in F} f(a) \leq \sum_{k=1}^{k_0} f(a_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(a_k).$$

y como α es arbitrario,

$$\sum_{a \in A} f(a) \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(a_k)$$

Además,

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(a_k) = \sup\{\sum_{k=1}^{n} f(a_k) : n \in \mathbb{N}\} \leq \sum_{a \in A} f(a).$$

y esto concluye la demostración. •

1.5.2. Pruebas para Convergencia Absoluta

Sea $\sum x_n$ una serie de números reales. La serie $\sum |x_n|$ de los valores absolutos es una serie de números reales positivos y podemos aplicarle los criterios de convergencia que estudiamos anteriormente para obtener de esta manera criterios de convergencia absoluta. Por ejemplo, si $\limsup(|x_n|)^{1/n} < 1$, la serie $\sum x_n$ es absolutamente convergente.

Ejercicios 1.5

1. *Determinar si las siguientes series convergen o divergen.*

   a) $\Sigma \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ *b)* $\Sigma \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ *c)* $\Sigma \frac{2}{n^n}$ *d)* $\Sigma \frac{3}{n(n+1)}$ *e)* $\Sigma \frac{4n}{(n+1)(n+2)}$ *f)* $\Sigma \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

   g) $\Sigma \frac{1}{\pi n}$ *h)* $\Sigma \frac{2}{n+2}$ *i)* $\Sigma \frac{1}{3^n+1}$ *j)* $\Sigma \frac{4}{\sqrt[n]{3}}$ *k)* $\Sigma \frac{1}{n^2+3}$ *l)* $\Sigma \frac{n}{2(n+1)(n+2)}$

   m) $\Sigma \frac{1}{3^n-1}$ *n)* $\Sigma\, n \, \frac{3}{4}^{\,n}$ *o)* $\Sigma \frac{4n}{2^n}$ *p)* $\Sigma \frac{3^n}{n2^n}$ *q)* $\Sigma \frac{n}{3^n}$ *r)* $\Sigma \frac{1}{(n+3)3^n}$

2. *Para cada una de las siguientes sucesiones determine si la serie asociada es convergente o no.*

   (1) $x_k = \frac{1}{4+k^2}$ (2) $x_k = \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ (3) $x_k = \frac{k^2}{k!}$

   (4) $x_k = \frac{3^{2k}(k!)^2}{(2k)!}$ (5) $x_k = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ (6) $x_k = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$

   (7) $x_k = ((k)^{1/k} - 1)^k$ (8) $x_k = (-1)^{k-1}\frac{k}{2k+1}$ (9) $x_k = (-1)^{k-1}\frac{k}{k^2+1}$

3. *Sea $\sum x_n$ una serie de términos positivos tal que la sucesión (x_n) es decreciente y sea $y_n = 2^n x_{2^n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que ambas series $\sum x_n$ y $\sum y_n$ convergen o ambas divergen.*

4. *Suponga que la serie de términos positivos $\sum x_n$ converge. Demuestre que $\sum (x_n x_{n+1})^{1/2}$ y $\sum (x_n n^{-1-\delta})^{1/2}$, $\delta > 0$ convergen.*

5. *Sean $\sum x_n$ y $\sum y_n$ series convergentes de términos positivos. Demuestre que $\sum (x_n y_n)^{1/2}$ converge.*

6. *La sucesión (x_n) es decreciente, $x_n > 0$ y $\sum (x_n x_{n+1})^{1/2}$ converge. Muestre que $\sum x_n$ converge. De un ejemplo de una serie positiva divergente $\sum y_n$ tal que $\sum (y_n y_{n+1})^{1/2}$ converge.*

7. *$\sum x_n$ es una serie divergente de términos estrictamente positivos.*

   (i) Determine si las siguientes series convergen o divergen:

   1) $\sum x_n/(1+x_n)$ 2) $\sum x_n/(1+nx_n)$ 3) $\sum x_n/(1+n^2x_n)$ 4) $\sum x_n/(1+x_n^2)$ *con x_n acotada*

   (ii) Sea $S_n = x_1 + \cdots + x_n$. Demuestre que $\frac{x_{N+1}}{S_{N+1}} + \cdots + \frac{x_{N+k}}{S_{N+k}} \geq 1 - \frac{S_N}{S_{N+k}}$ y deduzca que $\sum \frac{x_n}{S_n}$ diverge.

   (iii) Pruebe que $\frac{x_n}{S_n^2} \leq \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$ y deduzca que $\sum \frac{x_n}{S_n^2}$ converge.

1.6. Series Alternas.

Aunque la noción de convergencia absoluta nos provee una herramienta poderosa para estudiar la convergencia, puede suceder que una serie sea convergente sin ser absolutamente convergente. En esta situación hay algunas pruebas que permiten detectar en ciertos casos si la serie es convergente.

Definición 1.11 Si una serie es convergente sin ser absolutamente convergente decimos que es *condicionalmente* convergente.

El caso más frecuente es el de las series alternas, que son aquellas en las cuales los términos sucesivos cambian de signo (ver figura 1.6). Para este caso hay una prueba de convergencia sencilla e importante.

Teorema 1.20 (Prueba de Leibniz para Series Alternas) *Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión decreciente de números positivos con $x_n \to 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$ es convergente. Además, si $S_k = \sum_{n=1}^{k}(-1)^{k+1}x_k$ y $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$ entonces*

$$|S - S_k| \leq x_{k+1} \quad \textit{para todo } k \geq 1.$$

Demostración. Para k y p en $\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |S_{k+p} - S_k| &= \big|(-1)^{k+2}x_{k+1} + \cdots + (-1)^{k+p+1}x_{k+p}\big| \qquad (1.9) \\ &= \big|x_{k+1} - x_{k+2} + \cdots + (-1)^{p+1}x_{k+p}\big|. \qquad (1.10) \end{aligned}$$

La suma que aparece entre los signos de valor absoluto se puede escribir como

$$(x_{k+1} - x_{k+2}) + (x_{k+3} - x_{k+4}) + \cdots + \begin{cases} x_{k+p-1} - x_{k+p}, & \text{si } p \text{ es par} \\ x_{k+p}, & \text{si } p \text{ es impar.} \end{cases}$$

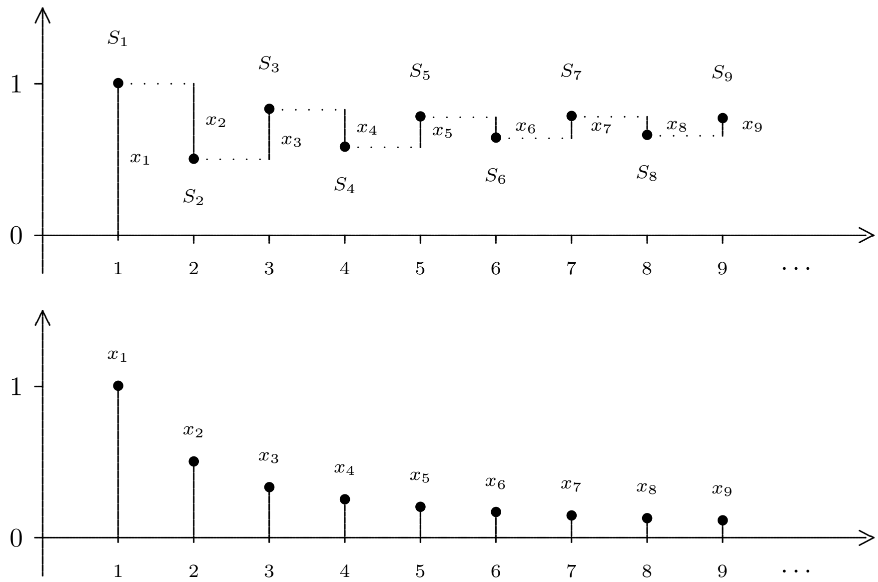


Figura 1.6: La sucesión x_n y la serie alterna asociada.

Como (x_n) es una sucesión decreciente, esto muestra que esta suma es positiva y por lo tanto podemos eliminar los signos de valor absoluto. La suma puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$x_{k+1} - (x_{k+2} + x_{k+3}) - \cdots - \begin{cases} x_{k+p}, & \text{si } p \text{ es par} \\ x_{k+p-1} - x_{k+p}, & \text{si } p \text{ es impar,} \end{cases}$$

lo cual muestra que

$$|S_{k+p} - S_k| < x_{k+1}. \tag{1.11}$$

Como $x_k \searrow 0$, dado $\epsilon > 0$ podemos hallar $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $p \in \mathbb{N}$

$$|S_{k+p} - S_k| < \epsilon$$

ya que basta tomar k de modo que $x_k < \epsilon$. Además, haciendo $p \to \infty$ en (4.2) obtenemos

$$|S - S_k| < x_{k+1},$$

lo que concluye la demostración. •

Ejemplos 1.11

1. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(1/n)$ es convergente, lo cual se deduce del teorema anterior, pero no es absolutamente convergente ya que al tomar el valor absoluto de los términos obtenemos la serie armónica. Este es un ejemplo de una serie condicionalmente convergente.

2. Usando la prueba de Leibniz vemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}1/\sqrt{n}$ también es convergente, pero vimos en el ejemplo 1.6 que la serie no es absolutamente convergente, igual que en el caso anterior.

Ejercicios 1.6

1. *Estudie la convergencia y la convergencia absoluta de las series:*

$$(1) \sum(-1)^n((n^2+1)^{1/2} - n) \qquad (2) \sum(-1)^n(2n + (-1)^{n+1})^{-1/2}$$

2. *Sea a_n una sucesión decreciente de números reales positivos. Demuestre que $\Sigma a_n z^n$ converge si $|z| \leq 1,\ z \neq 1$.*

3. *Construya una serie convergente Σa_n y una sucesión de números positivos b_n con $b_n \to 0$ de modo que $\Sigma a_n b_n$ diverja.*

1.7. Convergencia Condicional.

Ya vimos que una serie condicionalmente convergente es aquella que converge pero que no converge condicionalmente. En la sección anterior vimos dos ejemplos. Sea ahora $\sum x_n$ una serie de este tipo y llamemos $p_1, p_2, p_3, \ldots$ los términos positivos de esta serie, en el orden en el cual aparecen, y sean $-q_1, -q_2, -q_3, \ldots$ los términos negativos, también en el orden en el cual aparecen. Por ejemplo, para la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

tenemos

$$\begin{array}{llllll} p_1 = 1, & p_2 = \dfrac{1}{3}, & p_3 = \dfrac{1}{5}, & \ldots & p_n = \dfrac{1}{2n-1} & \ldots \\ q_1 = \dfrac{1}{2}, & q_2 = \dfrac{1}{4}, & q_3 = \dfrac{1}{6}, & \ldots & q_n = \dfrac{1}{2n}, & \ldots \end{array}$$

Consideramos ahora las dos series $\sum p_n$ y $\sum q_n$ que consisten sólo de términos positivos.

Teorema 1.21 *Si la serie $\sum x_n$ es absolutamente convergente, entonces cada una de las series $\sum p_n$ y $\sum q_n$ es convergente y $\sum x_n = \sum p_n - \sum q_n$. En cambio, si la serie $\sum x_n$ es condicionalmente convergente, las series $\sum p_n$ y $\sum q_n$ ambas divergen.*

Demostración. Supongamos que la serie $\sum x_n$ es absolutamente convergente con $\sum |x_n| = M$, entonces, para cualquier n,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq M. \tag{1.12}$$

Si consideramos ahora una suma parcial de la serie de términos positivos, digamos $p_1 + \cdots + p_k$, vemos que los términos de esta suma están incluidos en la suma $|x_1| + \cdots + |x_n|$ para n suficientemente grande, y por (1.12) concluimos que

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \leq M.$$

Como esta desigualdad es cierta para todo k concluimos por el teorema 1.12 que $\sum p_n$ es convergente.

De manera similar se demuestra que la serie $\sum q_n$ de términos negativos es convergente.

Para la suma parcial $x_1 + \cdots + x_n$ sea μ_n en número de términos positivos y ν_n el de términos negativos presentes. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} x_n = \sum_{i=1}^{\mu_n} p_i - \sum_{i=1}^{\nu_n} q_i. \tag{1.13}$$

Si la serie es absolutamente convergente hemos visto que ambas series del lado derecho son convergentes, y haciendo $n \to \infty$ obtenemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_n = \sum_{i=1}^{\infty} p_i - \sum_{i=1}^{\infty} q_i.$$

Es posible que sólo haya una cantidad finita de términos positivos, o de términos negativos, o incluso que no haya sino términos de un solo tipo. En estos casos la serie es absolutamente convergente si y sólo si es convergente, porque a partir de un cierto índice todos los términos tienen el mismo signo.

Consideremos el caso en el cual hay infinitos términos de cada signo, de modo que μ_n y $\nu_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Llamemos

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i; \qquad P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i; \qquad Q_n = \sum_{i=1}^{n} q_i.$$

Con esta notación (1.13) es $S_n = P_{\mu_n} - Q_{\nu_n}$ y además tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| = P_{\mu_n} + Q_{\nu_n} \tag{1.14}$$

Supongamos ahora que la serie $\sum x_n$ es convergente y consideremos las series $\sum p_n$ y $\sum q_n$. Si alguna de estas últimas es convergente, la otra también debe serlo. En efecto, por la relación $S_n = P_{\mu_n} - Q_{\nu_n}$, si, por ejemplo, $Q_n = \sum_1^n q_k$ es convergente, despejando P_n de la relación anterior tenemos $P_{\mu_n} = S_n + Q_{\nu_n}$, y como ambos sumandos de la derecha convergen cuando $n \to \infty$, también lo hace P_{μ_n}. Esto implica la convergencia de P_n por la definición de μ_n y porque se trata de una serie de términos positivos. Pero si ambas series $\sum p_n$ y $\sum q_n$ son convergentes la relación (1.14) implica que $\sum |x_n|$ también lo es. Vemos, así, que si $\sum x_n$ es condicionalmente convergente, ambas series $\sum p_n$ y $\sum q_n$ deben ser divergentes. •

1.8. Reordenamientos.

Si tenemos una suma finita de número reales $x_1 + \cdots + x_n$, sabemos, por la propiedad conmutativa, que podemos sumarlos en cualquier orden y el resultado de la suma es siempre el mismo. Nos preguntamos ahora si esto es cierto en el caso de series infinitas: Si cambiamos el orden en el cual se suman los términos de una serie, ¿obtenemos siempre el mismo resultado?

La respuesta, que puede resultar sorprendente para el lector, es que no necesariamente las dos series suman lo mismo. Más aún, puede suceder que al cambiar el orden de los términos de una serie convergente, obtengamos una serie que diverge.

Comencemos por ver un ejemplo.

Ejemplo 1.12
En un capítulo posterior demostraremos que

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \tag{1.15}$$

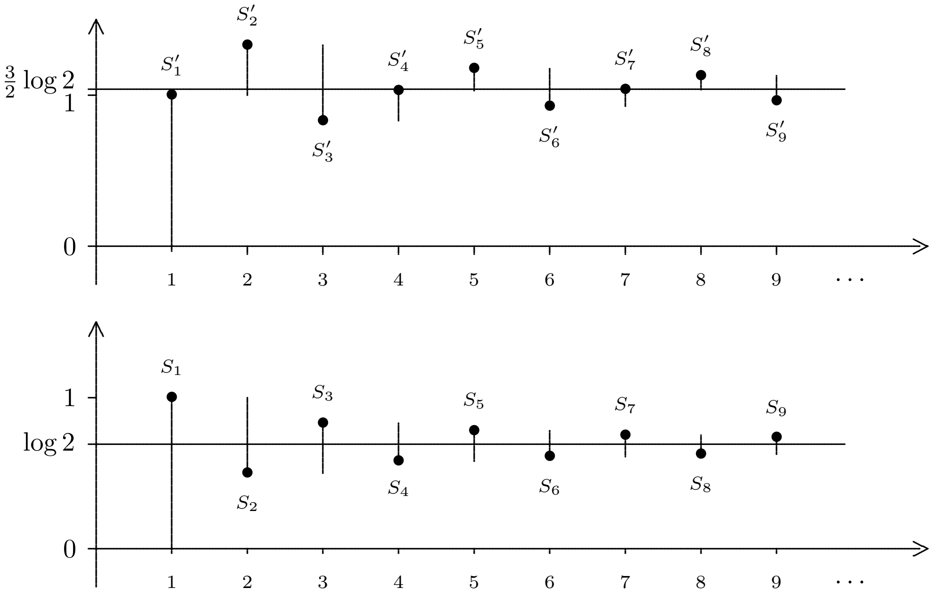


Figura 1.7: La sucesión $(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ y un reordenamiento.

Veamos que cambiando el orden de los sumandos de esta serie podemos obtener otro valor para la suma (ver figura 1.7):

$$\frac{3}{2}\log 2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots \tag{1.16}$$

El esquema en este nuevo arreglo de la suma es tomar dos términos positivos y uno negativo y así sucesivamente. Para demostrar este resultado observemos que si multiplicamos (1.15) por $1/2$ obtenemos

$$\frac{1}{2}\log 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{12} - \frac{1}{14} + \cdots$$

En esta última serie podemos insertar términos iguales a cero sin cambiar su valor:

$$\frac{1}{2}\log 2 = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \cdots \tag{1.17}$$

y ahora, por el teorema 1.9 podemos sumar las series (1.15) y (1.17) término a término para obtener (1.16).

Definición 1.12 Sean $\sum x_n$ una serie y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una biyección. La serie $\sum y_n$ donde $y_n = x_{f(n)}$ es un *rearreglo* de $\sum x_n$.

Como la función inversa $f^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ también es biyectiva, $\sum x_n$ es un rearreglo de $\sum y_n$.

Hablando informalmente, un rearreglo es un serie que tiene los mismos términos que la serie original pero que se suma en otro orden.

Ejemplo 1.13
Las series $\sum x_n$ y $\sum y_n$ donde $x_n = \frac{1}{n}$ y para $k \geq 1$

$$y_k = \begin{cases} 1/2k, & \text{si } n = 3k \\ 1/(4k-3), & \text{si } n = 3k-2 \\ 1/(4k-1), & \text{si } n = 3k-1 \end{cases}$$

son rearreglos. En este caso $y_n = x_{f(n)}$ donde f está definida para $n \geq 1$ por

$$f(3n-2) = 4n-3, \quad f(3n-1) = 4n-1, \quad f(3n) = 2n.$$

Definición 1.13 Si $\sum x_n$ y todos sus rearreglos convergen a la misma suma decimos que $\sum x_n$ *converge incondicionalmente.*

Veremos que esto es equivalente a convergencia absoluta. El siguiente teorema muestra que las series convergentes de términos positivos son incondicionalmente convergentes.

Teorema 1.22 $\sum x_n$ *converge absolutamente si y sólo si converge incondicionalmente.*

Demostración. Supongamos que $\sum x_n$ converge absolutamente y $\sum y_n$ es un rearreglo que se obtiene por la función f con $y_n = x_{f(n)}$. Entonces dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N}^{\infty} |x_n| < \epsilon$. Sea $M = \max_{1 \leq n \leq N} f(n)$, entonces para $m \geq M$,

$$\left| \sum_{1}^{\infty} x_n - \sum_{1}^{m} y_n \right| \leq \left| \sum_{n=N}^{\infty} x_n \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |x_n| < \epsilon$$

y esto muestra que $\sum y_n$ converge a $\sum x_n$, y por lo tanto la serie converge incondicionalmente.

Supongamos ahora que $\sum x_n$ converge incondicionalmente pero no absolutamente. Definimos la función f de la siguiente manera: sea $S = \sum x_n$ y considerando la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ llamemos $p_1, p_2, p_3, \dots$ los términos estrictamente positivos de la sucesión, listados en el orden en el cual aparecen. De manera similar llamaremos $-q_1, -q_2, -q_3, \dots$ los términos estrictamente negativos. Las sucesiones $(p_n)_{n\geq 1}$ y $(q_n)_{n\geq 1}$ son ambas infinitas pues en caso contrario, al ser convergente la serie $\sum x_n$ y tener signo constante a partir de un cierto índice $k_0 \in \mathbb{N}$, la serie tendría que ser absolutamente convergente. Por lo tanto, $\sum p_n$ y $\sum q_n$ son series de términos estrictamente positivos. Si $(P_n)_{n\geq 1}$ y $(Q_n)_{n\geq 1}$ son las sucesiones de sumas parciales, al menos una de ellas debe tender a ∞, porque si ambas fueran acotadas, la sucesión de sumas parciales de $\sum |x_n|$ también estaría acotada y la serie sería absolutamente convergente.

Si, por ejemplo, $P_n \to \infty$, construimos un rearreglo de la serie de la forma

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 + p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_2} - q_2 + p_{n_2+1} + \cdots + p_{n_3} - q_3 + p_{n_3+1} + \cdots \tag{1.18}$$

en el cual un grupo de términos positivos va seguido por uno negativo. Escogiendo adecuadamente los índices $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots$ podemos hacer que esta serie sea divergente, para lo cual basta tomar n_1 de modo que

$$P_{n_1} = p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} > q_1 + 1,$$

luego $n_2 > n_1$ de modo que

$$P_{n_2} > 2 + q_1 + q_2,$$

y en general n_j de modo que

$$P_{n_j} > j + Q_j$$

para $j = 1, 2, \cdots$. Siempre podemos encontrar una sucesión de índices que satisfaga estas condiciones porque $P_n \to \infty$. La serie (1.18) es divergente porque las sumas parciales de esta serie cuyo último término es q_j, para algún j, son estrictamente mayores que j, y la desigualdad también se satisface para las sumas parciales que siguen. Por lo tanto las sumas parciales tienden a ∞ y no a S, lo cual es una contradicción. •

En realidad, en la demostración del teorema anterior probamos que si la serie $\sum x_n$ converge condicionalmente hay un rearreglo que converge a $+\infty$. Es posible mostrar el siguiente resultado, que es mas fuerte: sean $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$ entonces existe un rearreglo $\sum y_n$ de $\sum x_n$ con sumas parciales $(T_n)_{n\geq 1}$ tal que

$$\underline{\lim}\, T_n = \alpha \qquad \overline{\lim}\, T_n = \beta$$

La demostración de este resultado puede encontrarse en el libro de W. Rudin, teorema 3.54.

Ejercicios 1.7

1. *La serie $\sum x_n$ es condicionalmente convergente. Dado $S \in \mathbb{R}$ demuestre que hay un rearreglo de $\sum x_n$ cuya suma es S.*
2. *Muestre que las series $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$ y $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$ ambas convergen y son rearreglos. Muestre que la suma de la segunda es la mitad de la primera.*

1.9. Multiplicación de Series

Consideremos dos series convergentes $\sum x_n$, $\sum y_n$ y, para fijar las ideas, supongamos que son series de términos positivos, lo cual nos va a permitir sumar estas series en cualquier orden y obtener siempre el mismo resultado. Hemos visto que si formamos una nueva serie $\sum z_n$ sumando término a término las series iniciales ($z_n = x_n + y_n$), el resultado es una serie convergente cuya suma es la suma de las series $\sum x_n$ e $\sum y_n$:

$$\sum z_n = \sum x_n + \sum y_n.$$

Queremos ahora definir el 'producto' de las series originales de modo que la 'serie producto' converja al producto de las series iniciales. Un primer ensayo podría ser definir $\sum z_n$ como el producto término a término de las series originales: $z_n = x_n \cdot y_n$. Es fácil ver, sin embargo, que esto no funciona.

Ejemplo 1.14
Definimos para $n \geq 1$,

$$x_n = \begin{cases} 2^{-n}, & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \qquad y_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par,} \\ 2^{-n}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Los productos término a término valen todos 0 mientras que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{4})^n = \frac{1}{3},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(2n-1)} = 2\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} = \frac{2}{3},$$

de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \neq 0.$$

Supongamos que las series comienzan con el índice 0 y llamemos $S_n = \sum_{i=0}^n x_i$, $T_n = \sum_{i=0}^n y_i$ a las sumas parciales de las respectivas series y S y T a los límites correspondientes, de modo que

$$S_n \to S, \qquad T_n \to T, \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$

Si multiplicamos término a término las sucesiones de sumas parciales tenemos que $S_nT_n \to ST$ y el producto de las sumas parciales es:

$$S_nT_n = \Big(\sum_{i=0}^n x_i\Big)\Big(\sum_{j=0}^n y_j\Big) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n x_iy_j.$$

Vemos que el producto de las sumas parciales es la suma de todos los productos posibles entre pares de términos formados tomando un elemento de cada suma. Si hacemos $n \to \infty$ esta suma converge a ST y por lo tanto, una posible definición del producto entre las series $\sum x_n$ e $\sum y_n$ es una serie $\sum z_n$ en la cual aparezcan todos los productos posibles formados multiplicando un término x_n por un término y_n, es decir, que aparezcan todos los términos de la tabla 1.9.

	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_{n-1}	y_n	y_{n+1}	$\cdots$
x_0	x_0y_0	x_0y_1	x_0y_2	$\cdots$	x_0y_{n-1}	x_0y_n	x_0y_{n+1}	$\cdots$
x_1	x_1y_0	x_1y_1	x_1y_2	$\cdots$	x_1y_{n-1}	x_1y_n	x_1y_{n+1}	$\cdots$
x_2	x_2y_0	x_2y_1	x_2y_2	$\cdots$	x_2y_{n-1}	x_2y_n	x_2y_{n+1}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$
x_{n-1}	$x_{n-1}y_0$	$x_{n-1}y_1$	$x_{n-1}y_2$	$\cdots$	$x_{n-1}y_{n-1}$	$x_{n-1}y_n$	$x_{n-1}y_{n+1}$	$\cdots$
x_n	x_ny_0	x_ny_1	x_ny_2	$\cdots$	x_ny_{n-1}	x_ny_n	x_ny_{n+1}	$\cdots$
x_{n+1}	$x_{n+1}y_0$	$x_{n+1}y_1$	$x_{n+1}y_2$	$\cdots$	$x_{n+1}y_{n-1}$	$x_{n+1}y_n$	$x_{n+1}y_{n+1}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$

Cuadro 1.1: Multiplicación de Series

Una manera cómoda de realizar esta suma es hacerla a lo largo de las diagonales. Esto equivale a fijar el valor de la suma de los índices en los productos, por ejemplo, $a_{n-1}y_1$ y a_0y_n están en la misma diagonal porque en ambos casos los índices suman n. Este es el sentido de la siguiente definición.

Definición 1.14 El *producto de Cauchy* de dos series $\sum_{n=0}^\infty x_n$ y $\sum_{n=0}^\infty y_n$ de términos reales es la serie $\sum_{n=0}^\infty z_n$ donde

$$z_n = \sum_{k=0}^n x_ky_{n-k}.$$

La sucesión (z_n) se conoce como la *convolución* de las sucesiones (x_n) e (y_n).

La figura 1.8 es una simplificación del cuadro 1.9 en la cual reemplazamos los términos del margen por sus índices y los productos por puntos.

El término z_n de la definición representa la suma de los productos que aparecen en la figura y que corresponden a la diagonal n (empezando la numeración de las diagonales con el 0, que corresponde al

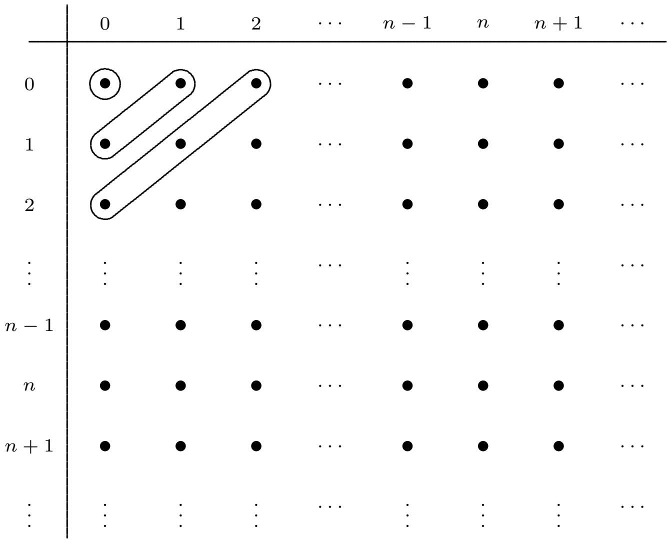


Figura 1.8: Definión de z_n.

término $x_0 y_0$). Queremos demostrar a continuación que, definido de esta forma y bajo ciertas condiciones, el producto de Cauchy de dos series convergentes es convergente y su valor es $ST = (\sum x_n)(\sum y_n)$.

Vimos ya que el producto de las sumas parciales $S_n T_n$ converge, cuando $n \to \infty$, al producto ST. Por lo tanto, bastaría ver que la diferencia entre la suma parcial para el producto de Cauchy $\sum_{k=1}^{n} z_n$ y el producto de las sumas parciales tiende a 0 cuando $n \to \infty$ (ver figura 1.9). Esto lo haremos en el próximo teorema bajo condiciones ms generales. Antes, veamos que no basta con la convergencia de las series que deseamos multiplicar para garantizar que su producto de Cauchy converja.

Ejemplo 1.15
Veamos una serie convergente cuyo producto de Cauchy consigo misma es divergente: sea

$$x_0 = 0 \qquad x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \qquad n \geq 1$$

entonces $\sum x_n$ converge por el Criterio de Leibniz (Teorema 1.20). Sin embargo,

$$\begin{aligned} z_0 &= z_1 = 0, \\ z_n &= \sum_{k=0}^{n} x_k x_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}, \\ |z_n| &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-1)}} = 1, \end{aligned}$$

por lo tanto $z_n \nrightarrow 0$ y $\sum z_n$ diverge.

Teorema 1.23 (Mertens) *Sean $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ una serie absolutamente convergente de suma S y $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ una serie convergente de suma T. Definimos $z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = ST$$

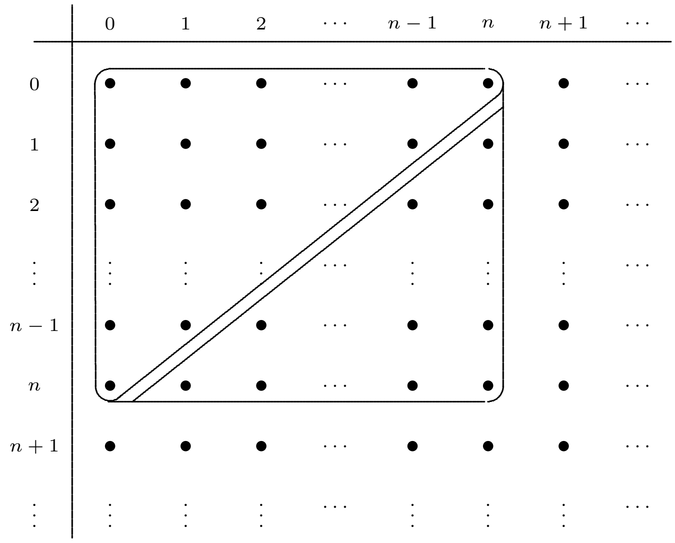


Figura 1.9: Diferencia entre $\sum_1^n z_j$ y $(\sum_1^n x_j)(\sum_1^n y_j)$.

Demostración. Sean

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k, \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} y_k, \qquad U_n = \sum_{k=0}^{n} z_k, \qquad \tau_n = T_n - T,$$

entonces

$$\begin{aligned} U_n &= x_0y_0 + (x_0y_1 + x_1y_0) + \cdots + (x_0y_n + x_1y_{n-1} + \cdots + x_ny_0) \\ &= x_0T_n + x_1T_{n-1} + \cdots + x_nT_0 \\ &= x_0(T + \tau_n) + x_1(T + \tau_{n-1}) + \cdots + x_n(T + \tau_0) \\ &= S_nT + x_0\tau_n + x_1\tau_{n-1} + \cdots + x_n\tau_0. \end{aligned}$$

Queremos ver que esta expresión converge a ST. Como $S_nT \to ST$ basta mostrar que

$$\eta_n = x_0\tau_n + x_1\tau_{n-1} + \cdots + x_n\tau_0 \to 0.$$

Llamemos $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ y sea $\epsilon > 0$. Como $\sum y_n$ converge a T, $\lim \tau_n = 0$ y existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\tau_n| < \epsilon$ para $n \geq N$ y entonces

$$\begin{aligned} |\eta_n| &\leq |x_0\tau_n + \cdots + x_{n-N-1}\tau_{N+1}| + |x_{n-N}\tau_N + \cdots + x_n\tau_0| \\ &\leq \epsilon|x_0 + x_1 + \cdots + x_{n+N-1}| + |x_{n-N}\tau_N + \cdots + x_n\tau_0| \\ &\leq \epsilon\sigma + |x_{n-N}\tau_N + \cdots + x_n\tau_0|. \end{aligned}$$

Como $x_n \to 0$, manteniendo N fijo y haciendo $n \to \infty$ obtenemos

$$\limsup |\eta_n| \leq \epsilon\sigma.$$

Teniendo en cuenta que ϵ es arbitrario se obtiene el resultado.

•

El siguiente teorema lo enunciamos sin demostración

Teorema 1.24 (Abel) *Si las series* $\sum x_n$, $\sum y_n$ *y* $\sum z_n$ *convergen a* S, T *y* U *respectivamente y* $z_n = x_0y_n + \cdots + x_ny_0$ *entonces* $U = ST$.

Ejercicios 1.8

1. *Para las series* Σa_n *y* Σb_n *calcule su producto de Cauchy* Σc_n*. Determine cuáles de estas series con convergentes y si todas lo son, calcule* Σc_n *en términos de* Σa_n *y* Σb_n*.*
   - *i)* $a_n = b_n = 1$ *para todo* n
   - *ii)* $a_0 = a_1 = 1/2,\ a_n = 0$ *para* $n > 1$*;* Σb_n *convergente.*
   - *iii)* $a_0 = 1, a_1 = -1,\ a_n = 0$ *para* $n > 1$*;* $b_n = 1/n$*.*
   - *iv)* $a_n = x^n/n!$*,* $b_n = y^n/n!$*.*
2. $\sum x_n$ *converge absolutamente e* $y_n \to 0$ *cuando* $n \to \infty$*. Muestre que* $x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1$ *tiende a 0 cuando* $n \to \infty$*.*
3. *Pruebe que si* $|x| < 1$ *entonces* $[1 + x + x^2 + x^3 + \cdots]^2 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$
4. *Demuestre por multiplicación de series que si* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$*, entonces* $f(x)f(y) = f(x+y)$ *para cualesquiera* x *e* y*.*
5. *Demuestre que el producto de Cauchy de las dos series divergentes*

$$(2 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots)(-1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots)$$

   converge absolutamente.

Capítulo 2

Sucesiones y Series de Funciones

2.1. Sucesiones de Funciones.

En el capítulo anterior vimos que una sucesión de números reales es, simplemente, una colección *numerable y ordenada* de números reales. De manera similar, una sucesión de funciones es una colección *numerable y ordenada* de funciones. En general supondremos que el conjunto de índices es $\mathbb{N}$, aunque ocasionalmente usaremos los enteros no-negativos o $\mathbb{Z}$. Usaremos la notación $(f_n)_{n\geq 1}$ o $\{f_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ para indicar una sucesión de funciones.

Ejemplos 2.1

1. Las funciones $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ n \geq 1$ definidas por $f_n(x) = x^n$ forman una sucesión cuyo conjunto de índices es $\mathbb{N}$.

2. Las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ definidas por $f_n(x) = nx$, también forman una sucesión pero con índices en $\mathbb{Z}$.

Definición 2.1 Sea $S \subset \mathbb{R}$ un conjunto y $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $f_n\colon S \to \mathbb{R}$ y sea también f una función de S en $\mathbb{R}$. Decimos que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge puntualmente* a f en S si, para todo $s \in S$, la sucesión $(f_n(s))_{n\geq 1}$ converge a $f(s)$:

$$f(s) = \lim_{n\to\infty} f_n(s)$$

y entonces escribimos $f_n \to f$ (puntualmente). Desarrollando esto en detalle, para cada $s \in S$ y cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(s) - f(s)| < \epsilon \qquad \text{siempre que } n \geq N.$$

Es fundamental observar que la selección de N se hace luego de conocer s y ϵ, de modo que N puede depender de ambos.

Ejemplos 2.2

1. $S = [0,1], f_n\colon S \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(s) = \begin{cases} 1 - ns & \text{si} \quad 0 \leq s \leq 1/n \\ 0 & \text{si} \quad 1/n < s \leq 1, \end{cases}$$

y sea $f\colon S \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(s) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 < s \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad s = 0. \end{cases}$$

Es trivial ver que $f_n(0)$ converge a $f(0)$, mientras que si $0 < s \leq 1$ y $\epsilon > 0$ tenemos $|f_n(s) - f(s)| = |f_n(s)| = 0 < \epsilon$ si $n > 1/s$, por lo tanto $f_n \to f$ puntualmente en S.

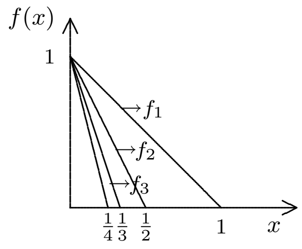


Figura 2.1: Ejemplo 2.2.1, la sucesión f_n.

2. $S = [0, 1]$ y para $n \in \mathbb{N}$, $f_n : S \to \mathbb{R}$ está definida por $f_n(s) = s^n$. Sea $f : S \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(s) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq s < 1 \\ 1 & \text{si} \quad s = 1. \end{cases}$$

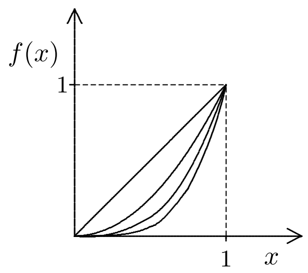


Figura 2.2: Ejemplo 2.2.2, la sucesión f_n.

Es fácil ver que $f_n(1) \to f(1)$, mientras que si $0 \leq s < 1$

$$|f_n(s) - f(s)| = |s^n| < \epsilon \qquad \text{si } n > \log \epsilon / \log s.$$

En este caso la dependencia de N en ϵ y s es clara.

3. $S = \mathbb{R}$ y para $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : S \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(s) = s/n$. Definimos $f : S \to \mathbb{R}$ por $f(s) = 0$ para $s \in \mathbb{R}$. De nuevo es claro que $f_n \to f$ puntualmente en $\mathbb{R}$: si $s \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$,

$$|f_n(s) - f(s)| = \frac{|s|}{n} < \epsilon \qquad \text{si } n > \frac{|s|}{\epsilon}.$$

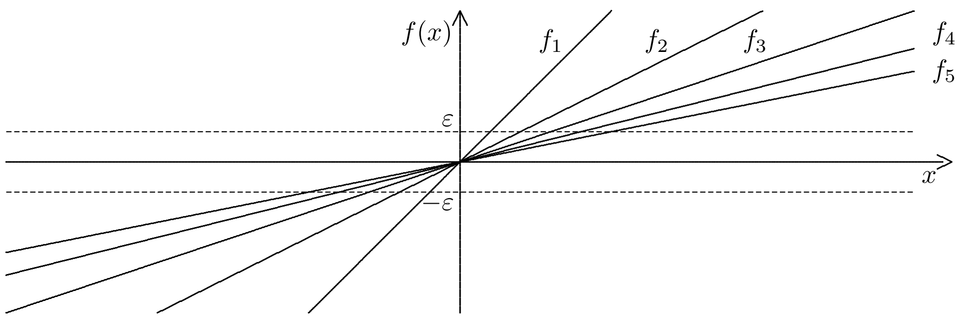


Figura 2.3: Ejemplo 2.2.3, la sucesión f_n.

Por lo tanto el menor valor de N para el cual la afirmación:

$$|f_n(s) - f(s)| < \epsilon \qquad \text{cuando } n > N$$

es cierta es la parte entera de $|s|/\epsilon$, y está claro que dado $\epsilon > 0$ no podemos escoger un solo N que haga cierta la afirmación anterior para todo s.

4. Si en el ejemplo anterior tomamos $S = [0, 1]$ tenemos, por supuesto, que $f_n \to f$ en S, pero en este caso si $\epsilon > 0$ y $N = [1/\epsilon]$ entonces

$$|f_n(s) - f(s)| < \epsilon$$

para $n > N$ y todo $s \in S$. La diferencia es que ahora, dado ϵ podemos hallar un solo N que sirve para todo $s \in S$.

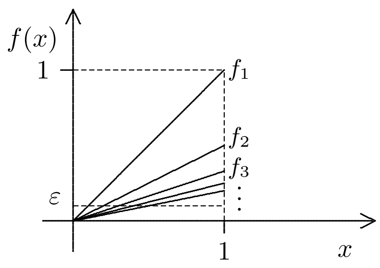


Figura 2.4: Ejemplo 2.2.4, la sucesión f_n.

El problema principal que nos planteamos ahora es determinar si ciertas propiedades de las funciones de la sucesión, también son compartidas por la función límite, en particular, si las funciones f_n son continuas, diferenciables o integrables, ¿es lo mismo cierto para f? ¿qué relación hay entre f_n' y f', o entre las integrales de las funciones f_n y la de f?

Por ejemplo, si $f_n \to f$ puntualmente, decir que f es continua en x quiere decir que

$$\lim_{t \to x} f(t) = f(x)$$

o sea

$$\lim_{t \to x} \lim_{n \to \infty} f_n(t) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

de modo que si las funciones f_n son continuas en x esto es

$$\lim_{t \to x} \lim_{n \to \infty} f_n(t) = \lim_{n \to \infty} \lim_{t \to x} f_n(t)$$

y la pregunta que nos estamos haciendo es si da lo mismo tomar los límites en cualquier orden. En general esto no es posible sin afectar el resultado: en los ejemplos 2.2.1 y 2 vemos funciones discontinuas que son límite de sucesiones de funciones continuas.

Ejemplos 2.3

1. Para m y $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$f_m(x) = \lim_{n \to \infty} (\cos m! \pi x)^{2n}$$

Cuando $m!x$ es entero, $f_m(x) = 1$. Para cualquier otro valor de x, $f_m(x) = 0$. Sea

$$f(x) = \lim_{m \to \infty} f_m(x)$$

Para x irracional, $f_m(x) = 0$ y por lo tanto $f(x) = 0$ Para x racional, $x = p/q$ digamos, vemos que $m!x$ es entero si $m \geq q$ y entonces $f(x) = 1$. Por lo tanto

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es racional} \end{cases}$$

2. Sea

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{sen} nx \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

entonces $f'(x) = 0$ y $f_n'(x) = \sqrt{n} \cos nx$, de modo que f_n' no converge a f', por ejemplo,

$$f_n'(0) = \sqrt{n} \to \infty \qquad (n \to \infty)$$

mientras que $f'(0) = 0$.

3. Sea $f_n(x) = n^2 x(1-x^2)^n$ para $x \in [0,1], n \in \mathbb{N}$. Podemos escribir $1 - x^2 = \frac{1}{1+y}$ donde $y = \frac{x^2}{1-x^2}$ y por lo tanto

$$(1-x^2)^n = \frac{1}{(1+y)^n} \ .$$

Por el teorema binomial

$$(1+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k > \binom{n}{j} y^j \qquad \text{para cualquier } 0 \leq j \leq n.$$

Si $j > 2$

$$n^2(1-x^2)^n = \frac{n^2}{(1+y)^n} < \frac{n^2}{\binom{n}{j} y^j} = \frac{n^2}{\frac{n!}{k!(n-j)!} y^j}$$

y como j está fijo, $j > 2$, esto tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Por otro lado es fácil ver que

$$\int_0^1 x(1-x^2)^n dx = \frac{-1}{2(n+1)} (1-x^2)^{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{2n+2}$$

de modo que

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{n^2}{2n+2} \to \infty.$$

Si en lugar de $f_n(x) = n^2 x(1-x^2)^n$ tenemos $nx(1-x^2)^n$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2}.$$

Ejercicios 2.1

1. *Halle el límite puntual (si existe) de la sucesión (f_n) de funciones de S en $\mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:*

i) $S = \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

ii) $S = \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} n & \textit{si } -n \le x \le n, \\ 0 & \textit{si } |x| > n \end{cases}$

iii) $S = \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } -n \le x \le n, \\ 0 & \textit{si } |x| > n \end{cases}$

iv) $S = [0,1],\ f_n(x) = nx(1-x^2)^n$

v) $S = [0,1],\ f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$

vi) $S = [0,1],\ f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$

vii) $S = [0,1],\ f_n(x) = \begin{cases} nx & \textit{si } 0 \le x \le 1/n \\ \frac{n(1-x)}{n-1} & \textit{si } 1/n < x \le 1 \end{cases}$

viii) $S = [0,\infty),\ f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n} & \textit{si } 0 \le x \le n \\ 1 & \textit{si } x > n \end{cases}$

ix) $S = [0,1],\ f_n(x) = \dfrac{x^n}{n+x^n}$

x) $S = \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{x^2+nx}{x}$

2.2. Convergencia Uniforme.

Definición 2.2 Sea $S \subset \mathbb{R}$ un conjunto, $(f_n)_{n\ge 1}$ una sucesión de funciones de S en $\mathbb{R}$ y $f\colon S \to \mathbb{R}$. Decimos que la sucesión $(f_n)_{n\ge 1}$ *converge uniformemente* a f en S si para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(s), f(s)| < \epsilon \qquad \text{si } n > N \text{ y } s \in S. \tag{2.1}$$

Decimos que f es el *límite uniforme* de (f_n) y que $f_n \to f$ *uniformemente* en S. Es importante observar que en este caso el valor de N a partir del cual vale la relación (2.1) es el mismo para todo $s \in S$.

Ejemplo 2.4

1. Sea $S = \{s\colon s > 0\}$ y para $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$f_n(s) = \frac{s}{1+ns}; \qquad f(s) = 0.$$

Si $s \in S$ tenemos

$$|f_n(s) - f(s)| = \left|\frac{s}{1+ns}\right| < \frac{s}{ns} = \frac{1}{n} < \epsilon$$

para $n > 1/\epsilon$. Por lo tanto (f_n) converge uniformemente a f en S.

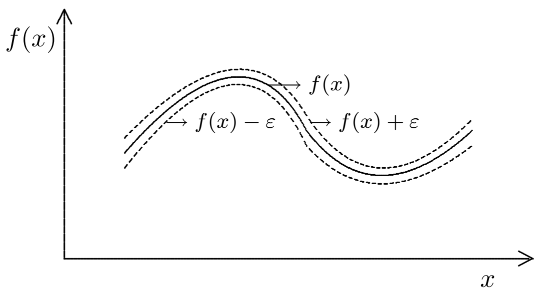


Figura 2.5: Convergencia Uniforme.

Si $Y \subset \mathbb{R}$ podemos ilustrar la noción de convergencia uniforme con un diagrama. Si $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente a f, dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon$$

siempre que $x \in [a, b]$ y $n > N$. Esto quiere decir que si $n > N$ la gráfica de la función f_n debe estar dentro de la banda del diagrama.

Es evidente a partir de las definiciones que si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f entonces también converge puntualmente.

Teorema 2.1 (Condición uniforme de Cauchy) *La sucesión de funciones (f_n) definidas en S con valores en $\mathbb{R}$ converge uniformemente en S si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que si $m \geq N,\ n \geq N$, y $s \in S$ entonces*

$$|f_n(s) - f_m(s)| < \epsilon. \tag{2.2}$$

Demostración. Supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en S, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ y $s \in S$

$$|f_n(s) - f(s)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

de modo que

$$|f_n(s) - f_m(s)| \leq |f_n(s) - f(s)| + |f(s) - f_m(s)| \leq \epsilon$$

siempre que $n \geq N, m \geq N$ y $s \in S$. Supongamos ahora que la condición de Cauchy es válida. Por la completitud de los números reales, para cada $s \in S$ la sucesión $(f_n(s))$ converge a un límite en $\mathbb{R}$ que llamaremos $f(s)$. Por lo tanto la sucesión (f_n) converge a f en S. Falta ver que la convergencia es uniforme.

Sea $\epsilon > 0$ dado y tomemos N de modo que (2.2) sea cierto. Fijando n y haciendo $m \to \infty$ obtenemos

$$|f_n(s) - f(s)| < \epsilon$$

para todo $n \geq N$ y todo $s \in S$. •

Teorema 2.2 *Supongamos que $f_n \to f$ puntualmente en S y sea $M_n = sup_{s\in S}|f_n(s) - f(s)|$. Entonces $f_n \to f$ uniformemente en S si y sólo si $M_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

Demostración. Inmediato a partir de la definición. •

Ejercicios 2.2

1. *En cada uno de los casos del ejercicio 2.1 determine si la convergencia es uniforme o no.*
2. *Estudiar la convergencia uniforme de la sucesión $f_n(x) = x^n$ i) en $X = [0, \eta]$ para $0 < \eta < 1$; ii) en $X = [0, 1]$; iii) en $[0, 1)$.*
3. *Verifique que la convergencia uniforme a 0 sobre un intervalo I de una sucesión de funciones es equivalente a la condición siguiente: Existe una sucesión (a_n) de números reales que tienden a 0 tal que para n suficientemente grande y para todo $x \in I$ se tiene que $|f_n(x)| \leq a_n$.*
4. *Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua y para $n \in \mathbb{N}$ definimos $f_n(x) = f(x + 1/n)$ sobre $\mathbb{R}$. Demuestre que (f_n) converge uniformemente.*
5. *Sea K un conjunto compacto y (f_n) una sucesión de funciones reales continuas definidas sobre K que convergen puntualmente en K a la función f. Si $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ para todo $x \in K$ y todo $n \in \mathbb{N}$ entonces f_n converge uniformemente a f.*

2.3. Convergencia Uniforme y Continuidad.

Teorema 2.3 *Si (f_n) es una sucesión de funciones continuas de $S \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que convergen uniformemente a $f : S \to \mathbb{R}$ entonces f es continua.*

$$\begin{tikzcd}
f(s) \arrow[d, dash, "\textit{cerca por convergencia uniforme}"'] & f(t) \arrow[d, dash, "\textit{cerca por convergencia uniforme}"] \\
f_n(s) \arrow[r, dash, "\textit{cerca por}", "\textit{continuidad}"'] & f_n(t)
\end{tikzcd}$$

Figura 2.6: Convergencia Uniforme y Continuidad.

Demostración. Tenemos que mostrar que si $x \in S$ y $\epsilon > 0$ entonces para algún $\delta > 0$

$$|f(x) - f(t)| < \epsilon \qquad \text{si } |x - t| < \delta.$$

Supongamos que $x \in S$ y $\epsilon > 0$, como $f_n \to f$ uniformemente en S, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{si } n > N \text{ y } t \in S.$$

Escogemos $n > N$, como f_n es continua existe $\delta > 0$ tal que

$$|f_n(x) - f_n(t)| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{si } |x - t| < \delta.$$

Por lo tanto, si $d|x - t| < \delta$

$$|f(x) - f(t)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(t)| + |f_n(t) - f(t)|$$

y cada uno de los términos de la derecha es menor que $\epsilon/3$, el primero y el último por (2.3), ya que $n > N$, y el segundo por (2.3), ya que $|x - t| < \delta$. Por lo tanto

$$|f(x) - f(t)| < \epsilon \qquad \text{si } |x - t| < \delta.$$

y esto concluye la demostración. •

Observación 2.1 En el ejemplo 2.2.3 la convergencia no es uniforme pero la función límite es continua. Esto muestra que la condición del teorema es suficiente pero no necesaria.

Para $S \subset \mathbb{R}$ llamaremos $\mathcal{C}(S)$ a la familia de las funciones reales continuas y acotadas definidas en S. Si S es compacto entonces basta con pedir que las funciones sean continuas. Para cada función $f \in \mathcal{C}(S)$ definimos la norma supremo de f por

$$||f||_\infty = \sup_{x \in S} |f(x)|.$$

Como hemos supuesto que f es acotada, $||f||_\infty < \infty$. Además, $||f||_\infty = 0$ si y sólo si $f(x) = 0$ para todo $x \in S$. Finalmente, si $g \in \mathcal{C}(S)$ y definimos $h(x) = f(x) + g(x)$ entonces $h \in \mathcal{C}(S)$ y tenemos

$$|h(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

para cualquier $x \in S$. Por lo tanto

$$||f + g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty.$$

Estas tres propiedades muestran que la función $\|\ \|_\infty \colon \mathcal{C}(S) \to \mathbb{R}^+$ es una norma.

Para $f, g \in \mathcal{C}(S)$ definimos la distancia entre ellas por

$$\rho(f, g) = ||f - g||_\infty = \sup_{x \in S} |f(x) - g(x)|.$$

Lo anterior muestra que ρ es una métrica sobre el espacio $\mathcal{C}(S)$ y el Teorema 2.2 nos dice que la sucesión (f_n) en $\mathcal{C}(S)$ converge a $f \in \mathcal{C}(S)$ si y sólo si $f_n \to f$ uniformemente en S.

Teorema 2.4 *$(\mathcal{C}(S),\rho)$ es un espacio métrico completo.*

Demostración. Usar los Teoremas 2.1 y 2.3. •

Ejercicios 2.3

1. *Dé contraejemplos que muestren que si la convergencia no es uniforme, el límite no tiene por que ser continuo.*
2. *Suponga que (f_n) es una sucesión de funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ que converge uniformemente a una función $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$. Para $n\in\mathbb{N}$ definimos $g_n(x)=f_n(x+1/n)$. Demuestre que la sucesión (g_n) converge puntualmente a f.*
3. *Si (f_n) es una sucesión de funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que converge uniformemente a la función $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, entonces para todo $x\in\mathbb{R}$ y cualquier sucesión (x_n) que converja a x, se tiene que $(f_n(x_n))$ converge a $f(x)$.*

2.4. Convergencia Uniforme y Diferenciación

Sea $I\subset\mathbb{R}$ un intervalo y $f_n\colon I\to\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$ una sucesión de funciones que convergen puntualmente a $f\colon I\to\mathbb{R}$. Si para algún $a\in I$ y para todo $n\in\mathbb{N}$, f_n es diferenciable en a, es natural preguntarse si f es diferenciable en a y si $(f_n'(a))$ converge a $f'(a)$. Planteadas de esta manera, la respuesta a ambas preguntas es negativa. Es posible que f no sea diferenciable en a y si lo es, puede suceder que $(f_n'(a))$ no converja a $f'(a)$ o simplemente que no converja en absoluto.

Ejemplos 2.5

1. Sea $I=\mathbb{R}, f_n(x)=\frac{x}{1+nx^2}$ para $x\in\mathbb{R}$ y $n\in\mathbb{N}$, y $f(x)=0$ para $x\in\mathbb{R}$. Entonces si $x\neq 0$, $|f_n(x)|\leq \frac{1}{n|x|}\to 0$ cuando $n\to\infty$ y como $f_n(0)=0$, vemos que $f_n\to f$ puntualmente en $\mathbb{R}$. Evidentemente $f'(0)=0$ y $f_n'(x)=\frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$, $f_n'(0)=1$ de modo que $f_n'(0)$ no converge a $f'(0)$ aún cuando $(f_n'(0))$ converge.

2. Sea $I=\mathbb{R}, f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$ para $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ y $f(x)=0$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Es fácil ver de nuevo que $f_n\to f$ puntualmente en $\mathbb{R}$ y que además $f_n'(0)=n$. En este caso f es diferenciable en 0 pero $f_n'(0)$ no converge.

3. Sea $I=(0,\infty), f_n(x)=\frac{1-x}{1+x^n}$ para $x\in I$, $n\in\mathbb{N}$ y $f\colon I\to\mathbb{R}$ definida por
$$f(x)=\begin{cases} 1-x & \text{si } 0<x\leq 1\\ 0 & \text{si } x>1\end{cases}$$
No es difícil ver que $f_n\to f$ puntualmente en I y que f no es diferenciable en 1. Como $f_n'(1)=-1/2$, $(f_n'(1))$ converge pero f no es diferenciable en 1.

4. Sea $I=(0,\infty), f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$ para $x\in I$, $n\in\mathbb{N}$ y
$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0<x<1\\ 1/2 & \text{si} \quad x=1\\ 1 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$
De nuevo es posible mostrar que $f_n\to f$ puntualmente en I y que $f_n'(1)=n/4$ de modo que f no es diferenciable en 1 y $(f_n'(1))$ no converge.

Teorema 2.5 *Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones diferenciables en $[a,b]$ con valores en $\mathbb{R}$ y tales que $(f_n(x_0))_{n\geq 1}$ converge para algún punto $x_0 \in [a,b]$. Si (f'_n) converge uniformemente en $[a,b]$ entonces (f_n) converge uniformemente en $[a,b]$ a una función f y*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x) \qquad \text{para todo } x \in [a,b]$$

Demostración. Veamos primero la convergencia uniforme de (f_n): Para ϵ dado, escogemos N de modo que si $n \geq N$ y $m \geq N$ entonces

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} \tag{2.3}$$

y

$$|f'_n(t) - f'_m(t)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \qquad \text{para } t \in [a,b].$$

Una aplicación del Teorema del Valor Medio a la función $f_n - f_m$ muestra que para algún ξ entre x y t se tiene

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t)| &\leq |x-t||f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| \\ &< \frac{|x-t|\epsilon}{2(b-a)} \leq \frac{\epsilon}{2} \end{aligned} \tag{2.4}$$

para cualesquiera x y t en $[a,b]$ si n y $m \geq N$. Usando (2.3) y (2.4) en la siguiente desigualdad obtenemos

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \epsilon$$

siempre que $x \in [a,b]$ y $n, m \geq N$, de modo que f_n converge uniformemente en $[a,b]$. Llamemos

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad x \in [a,b].$$

Veamos ahora la convergencia de las derivadas: fijemos un punto $x \in [a,b]$ y definamos

$$\varphi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} \qquad \varphi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

para $t \in [a,b], t \neq x$. Entonces

$$\lim_{t\to x} \varphi_n(t) = f'_n(x) \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Usando (2.4) obtenemos

$$|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| = \left| \frac{f_n(t) - f_n(x) - f_m(t) + f_m(x)}{t - x} \right| \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

para $n \geq N, m \geq N$, de modo que (φ_n) converge uniformemente para $t \neq x$. Como $f_n \to f$ concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$$

uniformemente para $t \in [a,b], t \neq x$, Por lo tanto

$$\lim_{t\to x} \varphi(t) = \lim_{t\to x} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x} \varphi_n(t) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x) \tag{2.5}$$

pero $\lim_{t\to x} \varphi(t) = f'(x)$. •

Observación 2.2 Las condiciones del teorema son suficientes pero no necesarias. Por ejemplo, en el intervalo $[0,1]$, $f_n(x) = x^n/n$ converge a $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$ y $f'_n \to f'$ puntualmente pero no uniformemente

Ejercicios 2.4

1. *Para $n \in \mathbb{N}$ definimos $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f_n(x) = x/(1 + nx^2)$. Muestre que (f_n) converge uniformemente a una función f y que la ecuación $f'(x) = \lim f_n'(x)$ es válida.*

2. *Estudie la convergencia de la serie $\Sigma e^{-n} \cos n^2 x$ y demuestre que su suma es una función infinitamente diferenciable en $\mathbb{R}$.*

3. *Demuestre la convergencia uniforme en $\mathbb{R}$ de la serie*

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos n^2 x}{n^2}.$$

¿Converge uniformemente la serie de derivadas?

2.5. Integración de Sucesiones de Funciones.

Antes de presentar los resultados de esta sección recordemos la definición de la integral de Riemann.

Definición 2.3 Una *partición* del intervalo $[a, b]$ es un subconjunto finito $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

es decir, es un subconjunto finito de $[a, b]$ que contiene los puntos a y b. Escribimos $\Delta x_i = x_i - x_{i-i}, \ i = 1, \cdots, n$. La familia de las particiones de $[a, b]$ la denotaremos por $\mathcal{P}[a, b]$ y llamaremos P a un miembro genérico de esta familia.

Sea $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$, definimos

$$M_i(f) = M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}; \qquad m_i(f) = m_i = inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\} \tag{2.6}$$

para $i = 1, \ldots, n$ y además las sumas superior $S(P, f)$ e inferior $I(P, f)$ correspondientes a la partición P por

$$S(P, f) = \sum_{j=1}^{n} M_i \Delta x_i; \qquad I(P, f) = \sum_{j=1}^{n} m_i \Delta x_i. \tag{2.7}$$

La *integral superior de Riemann* de f sobre $[a, b]$ se define por

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S(P, f) : P \in \mathcal{P}[a, b]\}$$

y la *integral inferior de Riemann* de f sobre $[a, b]$ por

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{S(P, f) : P \in \mathcal{P}[a, b]\}.$$

Si $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$ decimos que f es *integrable* según Riemann sobre el intervalo $[a, b]$, escribimos $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y denotamos el valor de la integral por

$$\int_a^b f(x)dx \qquad \text{ó} \qquad \int_a^b f dx.$$

El criterio de Riemann dice que una función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada es integrable si y sólo si dado $\epsilon > 0$ existe una partición $P \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que

$$0 \leq S(P,f) - I(P,f) \leq \epsilon.$$

Después de la discusión anterior es natural plantearse si dada una sucesión $f_n \in \mathcal{R}[a,b]$ con límite puntual f es cierto que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y si

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dx = \int_a^b f dx.$$

Ejemplos 2.6

1. Sea $\{q_n, n \geq 1\}$ una enumeración de los racionales en $[0,1]$. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{q_1, \ldots, q_n\} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Para cada n tenemos que $\int_0^1 f_n dx = 0$, pero la sucesión f_n converge puntualmente a la función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

y $f \notin \mathcal{R}[a,b]$.

2. Definimos $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in (0, 1/n) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

entonces $f_n \in \mathcal{R}[0,1]$ y $\int_0^1 f_n dx = 1$. Por otro lado $f_n \to f$ en $[0,1]$ donde $f(x) = 0$ para $x \in [0,1]$. En este caso $f \in \mathcal{R}[0,1]$ pero

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n dx = 1 \neq 0 \int_0^1 f dx.$$

Teorema 2.6 *Sea f_n una sucesión en $\mathcal{R}[a,b]$ que converge uniformemente en $[a,b]$ a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Entonces $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dx = \int_a^b f dx.$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, para algún $N \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{4(b-a)} \qquad \text{si } n \geq N,\ x \in [a,b] \tag{2.8}$$

de donde obtenemos

$$|f(x)| < |f_N(x)| + \frac{\epsilon}{4(b-a)}$$

para todo $x \in [a,b]$, de modo que f es acotada. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos $g_n = f - f_n$ a partir de (2.8) obtenemos que si $E \subset [a,b]$ no es vacío,

$$\frac{-\epsilon}{2(b-a)} \leq m(g_n, E) \leq M(g_n, E) \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

si $n \geq N$, donde $m(g_n, E) = \inf\{g_n(x)\colon x \in E\}$ y $M(g_n, E) = \sup\{g_n(x)\colon x \in E\}$. Por lo tanto para cualquier $P \in \mathcal{P}[a,b]$

$$S(P, g_n) - I(P, g_n) \leq \frac{\epsilon}{2}$$

si $n \geq N$ y además

$$S(P, f_n + g_n) \leq S(P, f_n) + S(P, g_n)$$
$$I(P, f_n + g_n) \geq I(P, f_n) + I(P, g_n).$$

Escogemos $n \geq N$ y lo fijamos, Como $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$ existe $P \in \mathcal{P}[a, b]$ tal que

$$S(P, f_n) - I(P, f_n) < \frac{\epsilon}{2}$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} S(P, f) - I(P, f) &= S(P, f_n + g_n) - I(P, f_n + g_n) \\ &\leq S(P, f_n) - I(P, f_n) + S(P, g_n) - I(P, g_n) < \epsilon \end{aligned}$$

de modo que $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Además, por (2.8) y monotonía, si $n \geq N$

$$\int_a^b |f - f_n| dx \leq \int_a^b \frac{\epsilon}{4(b-a)} dx = \frac{\epsilon}{4}$$

y entonces

$$\left| \int_a^b (f - f_n) dx \right| \leq \int_a^b |f - f_n| dx < \epsilon$$

si $n \geq N$. Por lo tanto

$$\int_a^b f_n dx \to \int_a^b f dx$$

y esto concluye la demostración. •

Corolario 2.1 *Si (f_n) es una sucesión de funciones en $\mathcal{C}[a, b]$ que converge uniformemente en $[a, b]$ a $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y*

$$\lim \int_a^b f_n dx = \int_a^b f dx.$$

Ejercicios 2.5

1. *Sea (f_n) una sucesión de funciones reales y continuas que converge uniformemente en $[a, b]$ a f. Definimos F_n y F en $[a, b]$ por $F_n(x) = \int_a^x f_n dt, F(x) = \int_a^x f dt$ para $x \in [a, b]$. Demuestre que F_n converge uniformemente a F en $[a, b]$.*

2. *Considere las siguientes sucesiones de funciones en $[0, 1]$*

$$f_n(x) = n^2 x \ \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}; \quad f_n(x) = -n^2(x - \frac{2}{n}) \ \text{ si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}: \quad f_n(x) = 0 \ \text{ si } \frac{2}{n} \leq x \leq 1.$$

   En cada caso dibuje la gráfica de f_n, halle el límite de la sucesión (f_n) y calcule $\int_0^1 f_n(x) dx$. ¿Qué concluye?

3. *Si g es una función real y continua definida sobre $[a, b]$ y (f_n) es una sucesión de funciones reales y continuas que converge uniformemente en $[a, b]$ a f, entonces $\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x) g(x) dx = \int_a^b f(x) g(x) dx$.*

4. *Suponga que g y $f_n, n \in \mathbb{N}$, están definidas sobre $(0, \infty)$, son integrables sobre $[t, T]$ para cualesquiera $0 < t < T < \infty, |f_n| \leq g, f_n \to f$ uniformemente en cualquier subconjunto compacto de $(0, \infty)$ y $\int_0^\infty g(x) dx < \infty$. Pruebe que $\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty f_n(x) dx = \int_0^\infty f(x) dx$.*

2.6. Series de Funciones

Definición 2.4 Sea $X \subset \mathbb{R}$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones reales sobre X. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos $S_n\colon X \to \mathbb{R}$ por

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j(x).$$

Llamamos a $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la serie infinita asociada a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y usamos la notación

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \quad \text{o} \quad \sum f_n.$$

Hay dos nociones de convergencia que podemos usar, si (S_n) converge puntualmente a $f\colon X \to \mathbb{R}$ decimos que la serie $\sum f_n$ converge puntualmente a f en X. Si (S_n) converge uniformemente a f, entonces $\sum f_n$ converge uniformemente a f.

Los teoremas que hemos obtenido anteriormente para sucesiones de funciones pueden aplicarse a las series de funciones.

Teorema 2.7 *Sea $\sum f_n$ una serie de funciones reales continuas definidas sobre $X \subset \mathbb{R}$, que converge uniformemente a f en X entonces f es continua.*

Demostración. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas que convergen uniformemente a f en X. Por el Teorema 2.3 f es continua. •

De manera similar pueden obtenerse los siguientes teoremas a partir de los resultados correspondientes de las secciones anteriores.

Teorema 2.8 *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y para $n \in \mathbb{N}$ $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en I. Si $\sum f_n$ converge puntualmente a f en I y si $\sum f_n'$ converge uniformemente en I entonces f es diferenciable en I y f' es la suma uniforme de $\sum f_n'$.*

Teorema 2.9 *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones en $\mathcal{R}[a,b]$ tal que $\sum f_n$ converge uniformemente a f en $[a,b]$ entonces $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y*

$$\int_a^b f\,dx = \sum_n \int_a^b f_n\,dx.$$

El siguiente teorema nos provee un criterio para determinar si una serie de funciones converge absolutamente.

Teorema 2.10 (Weierstrass) *Sea (f_n) una sucesión de funciones reales definidas sobre X y tales que* $\sup_{x\in X} |f_n(x)| \le M_n$ *para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $\sum M_n$ converge entonces $\sum f_n$ converge uniformemente en X.*

Demostración. Como $\sum M_n$ converge, dado $\varepsilon > 0$ existe N tal que si $n > m > N$

$$\left|\sum_{i=m}^{n} f_i(x)\right| \le \sum_{i=m}^{n} |f_i(x)| \le \sum_{i=m}^{n} M_i < \varepsilon \quad \text{para todo } \ x \in X.$$

Una aplicación del Teorema 2.1 completa la demostración. •

Ejemplo de una función continua en $\mathbb{R}$ que no es diferenciable en ningún punto.
Sea $\varphi(x) = |x|$ para $|x| \le 1$ y extendemos periódicamente esta función a todo $\mathbb{R}$ requiriendo que $\varphi(x+2) = \varphi(x)$. Entonces, para todo x, y

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le |x - y| \tag{2.9}$$

y concluimos que φ es continua en $\mathbb{R}$. Definimos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x).$$

Como $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, el teorema anterior muestra que esta serie converge uniformemente en $\mathbb{R}$, y por el Teorema 2.3, f es continua en $\mathbb{R}$.

Fijemos ahora $x \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$. Sea $\delta_m = \pm 1/2(4^m)$ donde el signo se escoge de modo que no haya ningún entero entre $4^m x$ y $4^m(x + \delta_m)$. Esto es posible ya que $4^m|\delta_m| = 1/2$.

Definimos

$$\gamma_n = \frac{[\varphi(4^n(x + \delta_m)) - \varphi(4^n x)]}{\delta_m}$$

cuando $n > m,\ 4^n\delta_m$ es un entero par y $\gamma_n = 0$ cuando $0 \leq n \leq m$, (2.9) implica

$$|\gamma_n| = \frac{|\varphi(4^n(x + \delta_m)) - \gamma(4^n x)|}{|\delta_m|} \leq 4^n$$

y además

$$|\gamma_m| = \frac{|\varphi(4^m(x + \delta_m)) - \varphi(4^m x)|}{\frac{1}{2}4^{-m}} = 2.4^m|\varphi(4^m x \pm \frac{1}{2}) - \varphi(4^m x)| = 4Im$$

por la forma como se escogió el signo de δ_m. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x + \delta_m) - f(x)}{\delta_m}\right| &= \left|\sum_{n=0}^{m} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n\right| \\
&\geq 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n = 3^m - \frac{(1 - 3^m)}{1 - 3} \\
&= \frac{1}{2}(3^m + 1)
\end{aligned}$$

cuando $m \to 0$, $\delta_m \to 0$ y por lo tanto f no es diferenciable en x.

Ejercicios 2.6

1. *Demuestre que $\Sigma 1/(n^2 + x^2)$ converge uniformemente en el conjunto $\{x\colon x \geq 0\}$.*
2. *Investigue la convergencia puntual y uniforme en $\mathbb{R}$ de la serie*

$$\sum \frac{1}{(1 + x^2)^n}$$

3. *Demuestre que la serie*

$$\sum \frac{nx^2}{n^2 + x^3}$$

es uniformemente convergente en $[0, a]$, para cualquier $a > 0$.

4. *Demuestre que la serie $\sum_0^\infty x^n$ converge uniformemente en $[-\eta, \eta]$ para $0 < \eta < 1$ pero que esto no es cierto en $(-1, 1)$.*
5. *Muestre que si (f_n) es una sucesión de funciones reales definidas en $S \subset \mathbb{R}$, entonces Σf_n converge uniformemente en X si y sólo si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entero n_0 tal que*

$$\sum_{r=n}^{m} f_r(x) \ < \varepsilon$$

si $m \geq n \geq n_0$ y $x \in X$.

6. *Investigue la convergencia puntual y uniforme de la serie Σf_n en el conjunto X y sus subconjuntos en cada uno de los siguientes casos:*

$$f_n(x) = \frac{x^n}{x^n+1}, \quad X = [0,\infty); \qquad f_n(x) = \frac{1}{(nx)^2}, \quad X = \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$f_n(x) = \frac{1}{x^n+1}, \quad X = [0,\infty); \qquad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}, \quad X = [0,\infty)$$

7. *Si (f_n) es una sucesión acotada de funciones reales sobre un conjunto X y Σa_n es absolutamente convergente, entonces $\Sigma a_n f_n$ es uniformemente convergente en X.*

2.7. Series de Potencias

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f_n(x) = x^n$. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

es una *serie de potencias* y a_n se llama el n-ésimo coeficiente de la serie. Escribiremos $\Sigma a_n x^n$ para denotar esta serie, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de coeficientes asociados a ella.

Teorema 2.11 *Si para $x_0 \neq 0, \Sigma a_n x_0^n$ converge e $|y| < |x_0|$ entonces $\Sigma a_n y^n$ es absolutamente convergente .*

Demostración. Si $\Sigma a_n x_0^n$ converge, la sucesión $(a_n x_0^n)$ converge a 0 y es acotada, es decir, existe M que depende de x_0 tal que $|a_n x_0^n| \leq M$, para $n \in \mathbb{N}$.

Si $|y| < |x_0|$ entonces $|a_n y^n| \leq M|y/x_0|^n$ y por el criterio de Weierstrass (teorema 2.10) la serie $\Sigma a_n y^n$ converge absolutamente ya que $|y/x_0| < 1$. •

Teorema 2.12 *Para cualquier serie de potencias $\Sigma a_n x^n$ ocurre alguna de las siguientes posibilidades:*

1. *$\Sigma a_n x^n$ converge puntualmente en $\mathbb{R}$*

2. *Existe $\rho > 0$ tal que la serie converge puntualmente en $(-\rho, \rho)$ y diverge puntualmente en $\{x : |x| > \rho\}$*

3. *$\Sigma a_n x^n$ converge únicamente para $x = 0$*

Demostración. Si no ocurren ni 1 ni 3 entonces existen reales x_0 y x_1 distintos de 0 tales que $\Sigma a_n x_0$ converge y $\Sigma a_n x_1^n$ diverge. Sea

$$A = \{x : \Sigma a_n x^n \text{ converge}\}$$

A no es vacío porque $x_0 \in A$ y es acotado ya que, por el teorema 2.10, si $|x| > x_1$ entonces $\Sigma a_n x^n$ diverge, de modo que $A \subset (-x_1, x_1)$. Sea $\rho = \sup\ A$, supongamos que $|y| < \rho$ y escojamos $x \in A,\ \ |y| < x \in A$. Por el teorema 2.10, como $\Sigma a_n x^n$ converge, también lo hace $\Sigma a_n y^n$ e $y \in A$, de modo que $(-\rho, \rho) \subset A$.

Para ver el recíproco supongamos que $|y| > x > \rho$ y $\Sigma a_n y^n$ converge, entonces por el teorema 2.10, $\Sigma a_n x^n$ converge y $x \in A$, lo cual contradice la definición de ρ. Por lo tanto $\Sigma a_n y^n$ diverge si $|y| > \rho$.•

Definición 2.5 El radio de convergencia de una serie de potencias $\Sigma a_n x^n$ es infinito en el caso 1, ρ en el caso 2 y 0 en el caso 3). El círculo de convergencia es $\mathbb{R}$ en el caso 1 y $(-\rho, \rho)$ en el caso 2.

Teorema 2.13 *Sea $\Sigma a_n x^n$ una serie de potencias con radio de convergencia distinto de 0 . Entonces*

1. *La serie converge absolutamente en cada punto de su círculo de convergencia*

2. *La serie converge uniformemente en todo intervalo cerrado contenido en su círculo de convergencia.*

Demostración

1. Supongamos que y está en el círculo de convergencia de $\Sigma a_n x^n$ y escojamos z en el círculo de convergencia de modo que $|y| < z$. Por el Teorema 2.10, $\Sigma |a_n y^n|$ converge lo cual muestra el primer resultado.

2. Supongamos que $[\alpha, \beta]$ es un intervalo cerrado contenido en el círculo de convergencia de $\Sigma a_n x^n$: Sea $\gamma = \max(|\alpha|, |\beta|)$ entonces γ está en el círculo de convergencia de $\sum a_n x^n$ y por la parte 1, $\Sigma |a_n \gamma^n|$ converge. Por lo tanto, si $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{r=m+1}^{n} |a_r \gamma^r| < \varepsilon \text{ si } n > m \geq N.$$

En consecuencia, si $x \in [\alpha, \beta]$ y $S_n(x) = \Sigma_{r=0}^{n} a_r x^r$

$$|S_m(x) - S_n(x)| \leq \sum_{r=m+1}^{n} |a^r x^r| \leq \sum_{r=m+1}^{n} |a^r \gamma^r| < \varepsilon$$

si $n > m > N$. Por lo tanto (S_n) es una sucesión de Cauchy y en consecuencia converge. •

Ejemplos 2.7

1. Tomemos la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde $a_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y sea $x \in \mathbb{R}$. La serie de potencias en x con coeficientes (a_n) es la serie geométrica $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n$, que como sabemos es convergente si $|x| < 1$ y es divergente si $|x| \geq 1$. Así, el radio de convergencia de esta serie es 1 y observamos que ella no converge ni en 1 ni en -1.

2. Consideramos la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n = 1/n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Sea $x \in \mathbb{R}$ y consideremos la serie $\Sigma x^n/n!$. Aplicando el criterio del cociente a la serie $\Sigma |x|^n/n!$ obtenemos

$$\frac{|x|^{n+1} n!}{|x|^n (n+1)!} = \frac{|x|}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

y por lo tanto la serie en cuestión es convergente. Esto es cierto para todo $x \in \mathbb{R}$ y esta serie de potencias tiene radio de convergencia ∞.

3. Consideremos ahora la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Sea $x \neq 0, x \in \mathbb{R}$. Para ver que la serie $\Sigma a_n x^n$ no converge mostraremos que $|a_n x^n|$ no tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Sea $t = 1/|x|$ y n_0 el menor entero positivo mayor que t. Para todo entero $n > n_0$ tenemos

$$|a_n x^n| = \frac{n!}{t^n} = \frac{n_0!}{t^{n_0}} \frac{(n_0+1)(n_0+2)\cdots n}{t^{n-n_0}} \geq \frac{n_0!}{t^{n_0}}.$$

Por lo tanto la sucesión $(a_n x^n)$ no tiende a 0 y $\Sigma a_n x^n$ no converge. El radio de convergencia de esta serie es 0.

Corolario 2.2 *Si $\Sigma a_n x^n$ tiene radio de convergencia distinto de cero, entonces converge puntualmente en su círculo de convergencia a una función que es continua en el círculo de convergencia.*

Demostración Sea C el círculo de convergencia de $\Sigma a_n x^n$ y f la función a la cual converge la serie de potencias. Si $x \in C$ podemos escoger un intervalo cerrado $[\alpha, \beta]$ tal que $x \in [\alpha, \beta] \subset C$, y como $\Sigma a_n x^n$ converge uniformemente en $[\alpha, \beta]$, obtenemos que la función f es continua en x. •

El estudio de la continuidad de una serie de potencias en un punto del borde de su círculo de convergencia es más delicada. Presentamos a continuación un resultado conocido como el Teorema de Abel, cuya demostración no incluiremos.

Teorema 2.14 (Abel) *Supongamos que la serie $\Sigma a_n x^n$ tiene radio de convergencia ρ positivo y supongamos que converge en uno de los extremos x_0 del intervalo de convergencia: $\Sigma a_n x_0^n = s$. Entonces la función $f(x) = \Sigma a_n x^n$ para $|x| < \rho$ tiende a s cuando $x \to x_0$.*

Teorema 2.15 *Si $\Sigma a_n x^n$ tiene radio de convergencia distinto de cero y converge puntualmente en su círculo de convergencia a la función f, entonces f es diferenciable en cada punto x de su círculo de convergencia y*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Demostración Sea C el círculo de convergencia de $\Sigma a_n x^n$, $x \in C$ y escojamos $y \in C$ de modo que $y > |x|$. Entonces $\Sigma |a_n y^n|$ es convergente y para algún $k \in \mathbb{R}$, $|a_n y^n| \leq k$ para $n \in \mathbb{N}$ y se tiene

$$|(n+1)a_{n+1}x^n| = (n+1)\left|\frac{x}{y}\right|^n |a_{n+1}y^n| \leq \frac{k}{y}(n+1)\left|\frac{x}{y}\right|.$$

En consecuencia, como $\Sigma(n+1)|x/y|^n$ converge, lo cual se ve fácilmente usando el criterio de la razón, podemos concluir por el criterio de comparación que $\Sigma(n+1)a_{n+1}x^n$ converge. Por lo tanto el círculo de convergencia C de $\Sigma a_n x^n$ está contenido en el círculo de convergencia C_1 de $\Sigma(n+1)a_{n+1}x^n$, de manera que si $x \in C$, existe $\delta > 0$ tal que $[x-\delta, x+\delta] \subset C \subset C_1$. Por el Teorema 2.13, tanto $\Sigma a_n x^n$ como $\Sigma(n+1)a_{n+1}x^n$ convergen uniformemente en $[x-\delta, x+\delta]$ y por el Teorema 2.5, para $t \in (x-\delta, x+\delta)$

$$f'(t) = \sum (n+1)a_{n+1}t^n.$$

Teorema 2.16 *Bajo las hipótesis del Teorema 2.15 f tiene derivadas de todos las ordenes en su círculo de convergencia C que están dadas por*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} \tag{2.10}$$

y en particular

$$f^{(k)}(0) = k!a_k \quad k = 0, 1, \cdots \tag{2.11}$$

Demostración La ecuación (2.10) se obtiene aplicando sucesivamente el teorema anterior a f. •

La ecuación (2.11) nos muestra que los coeficientes en el desarrollo de f en serie de potencias están determinados por los valores de f y sus derivadas en el origen. Por otra parte, si conocemos los coeficientes en el desarrollo de la función tenemos de inmediato los valores de las derivadas de f en el origen.

Observamos sin embargo que aún cuando una función f puede tener derivadas de todos las ordenes, la serie $\Sigma a_n x^n$ donde a_n se obtiene usando (2.11) no necesariamente converge a $f(x)$ para $x \neq 0$. En este caso f no puede ser desarrollada en serie de potencias ya que tendríamos $f(x) = \Sigma c_n x^n$, en consecuencia

$$n!c_n = f^{(n)}(0)$$

y necesariamente $c_n = a_n$

Ejemplo 2.8

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

es posible mostrar que f tiene derivada de todos los ordenes en $x = 0$ y $f^{(k)}(0) = 0$ para $n \geq 1$.

Teorema 2.17 *Si $\Sigma a_n x^n$ tiene radio de convergencia distinto de cero y converge puntualmente en su círculo de convergencia a la función f, entonces f es integrable según Riemann en cualquier subintervalo cerrado $[a,b]$ del círculo de convergencia y*

$$\int_a^b f dx = \sum \frac{a_n}{n+1}(b^{n+1} - a^{n-1})$$

Demostración Sea $[a,b]$ un subintervalo del círculo de convergencia de $\Sigma a_n x^n$. Por el Teorema 2.13 $\Sigma a_n x^n$ converge uniformemente en $[a,b]$ y por el Teorema 2.6 $f \in R[a,b]$ y

$$\int_a^b f dx = \sum \int_a^b a_n x^n dx$$

de donde se obtiene el resultado. •

Sea f una función real definida sobre un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ que contiene al 0, y supongamos que f tiene derivadas de todas los ordenes en 0. Podemos entonces escribir la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

donde $f^{(0)}(0) = f(0)$. Esta serie se conoce como la serie de Maclaurin de f.

Consideremos ahora la serie de potencias $\Sigma a_n x^n$. Si esta serie tiene radio de convergencia distinto de 0 y converge a f en su círculo de convergencia, entonces, por el Corolario 2.2, $a_n = f^{(n)}(0)/n!$, de modo que $\Sigma a_n x^n$ es la serie de Maclaurin correspondiente a f.

Otro tipo de series de potencias de gran interés son las series de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

con $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$. Esta serie se conoce como la serie de Taylor de f alrededor del punto x_0.

Por el Teorema de Taylor sabemos que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n \quad \xi \text{ entre } x_0 \text{ y } x.$$

Esta serie converge a f si y sólo si el resto tiende a 0 cuando $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(\xi)\frac{(x - x_0)^n}{n!} = 0.$$

Teorema 2.18 *Supongamos que f tiene derivadas de todos los ordenes en un intervalo de la forma $(x_0 - r, x_0 + r)$ y que existe una constante M (que puede depender de x_0) tal que*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

y $n \geq N$ (algún $N \in \mathbb{N}$). Entonces, para todo $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ la serie de Taylor de f alrededor de x_0 converge a $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Demostración. En cada uno de estos puntos tenemos un desarrollo de Taylor cuyo resto puede estimarse:

$$\left|\frac{f^{(n)}(\xi)(x - x_0)^n}{n!}\right| \leq M\frac{|x - x_0|^n}{n!} = M\frac{a^n}{n!} \text{ con } a = |x - x_0|$$

pero $\frac{a^n}{n!} \to 0$ y el límite del resto tiende a 0. •

Ejemplo 2.9 (Las funciones esponencial y logarítmica)
Definimos

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{2.12}$$

Por la prueba del cociente sabemos que esta serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$. Aplicando el teorema sobre multiplicación de series absolutamente convergentes obtenemos

$$\begin{aligned} E(x)E(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\ &= E(x+y) \end{aligned} \tag{2.13}$$

Como consecuencia tenemos que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$E(x)E(-x) = E(x-x) = E(0) = 1 \tag{2.14}$$

y por lo tanto $E(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

A partir de la definición observamos que $E(x) > 0$ si $x > 0$ y por lo tanto $E(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A partir de (2.12) vemos que $E(x) \to +\infty$ si $x \to +\infty$ y (2.14) nos dice que $E(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$.

A partir de (2.12) vemos que $0 < x < y \Rightarrow E(x) < E(y)$ y por (2.14) obtenemos $E(-y) < E(-x)$, de modo que E es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.

Además por (2.14):

$$\lim_{n\to 0} \frac{E(z+h) - E(z)}{h} = E(z) \lim_{h\to 0} \frac{E(h) - 1}{h} = E(z)$$

Iterando (2.13) obtenemos

$$E(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) = E(z_1) \cdots E(z_n).$$

Como $E(1) = e$ obtenemos

$$E(n) = e^n.$$

Si $\rho = n/m, \ \ n, m \in \mathbb{N}$ entonces

$$[E(\rho)]^m = E(m\rho) = E(n) = e^n$$

es decir,

$$E(\rho) = e^{\rho} \quad \rho > 0, \rho \in \mathbb{Q}$$

y por (2.14) sabemos que

$$E(-\rho) = e^{-\rho} \ \text{ si } \ \rho > 0, \rho \in \mathbb{Q}.$$

Si definimos

$$e^x = \sup\{e^{\rho} : \rho < x, \rho \in \mathbb{Q}\}$$

las propiedades de continuidad y monotomía de E implican

$$E(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Resumiendo tenemos

Teorema 2.19 *a)* e^x *es continua y diferenciable para todo* x.

b) e^x *es estrictamente creciente y estrictamente positiva.*

c) $e^{x+y} = e^x e^y$

d) $e^x \to +\infty$ $(x \to +\infty)$, $\quad e^x \to 0$, $(x \to -\infty)$.

e) $\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sólo demostraremos e). A partir de $e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ para $x > 0$, obtenemos

$$x^{-n}e^x > \frac{(n+1)!}{x} \to \infty.$$

•

Como E es estrictamente creciente y diferenciable en $\mathbb{R}$, tiene una función inversa L que también es estrictamente creciente y diferenciable y cuyo dominio es $(0, \infty)$. L está definida por

$$L(E(x)) = x \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.15}$$

Derivando obtenemos

$$L'(E(x))E(x) = 1$$

Poniendo $y = E(x)$,

$$L'(y) = 1/y \quad y > 0.$$

Tomando $x = 0$ en (2.15) vemos que $L(1) = 0$ y en consecuencia

$$L(y) = \int_1^y \frac{dx}{x}.$$

Si $u = E(x), v = E(y)$

$$L(uv) = L(E(x)E(y)) = L(E(x+y)) = x + y = L(u) + L(v).$$

Usualmente escribimos $\log x$ en lugar de $L(x)$. Tenemos

$$\begin{aligned} \log x \to \infty & \quad x \to \infty, \\ \log x \to -\infty & \quad x \to 0. \end{aligned}$$

Es posible mostrar como antes que

$$x^\alpha = E(\alpha L(x)) = e^{\alpha \log x}$$

derivando

$$(x^\alpha)' = E(\alpha L(x))\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Veamos que $x^{-\alpha}\log x \to 0$ $(x \to \infty)$, $\alpha > 0$. Si $0 < \varepsilon < \alpha$ y $x > 1$

$$\begin{aligned} x^{-\alpha}\log x &= x^{-\alpha}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt < x^{-\alpha}\int_1^x t^{\varepsilon-1}dt \\ &= x^{-\alpha}\frac{x^\varepsilon}{\varepsilon}\Big|_1^x < \frac{x^{\varepsilon-\alpha}}{\varepsilon} \end{aligned}$$

y como $\alpha > \varepsilon$ esta expresión tiende a 0 cuando $x \to \infty$.

Ejercicios 2.7

1. *Verificar que i) el círculo de convergencia de $\Sigma\beta^n x^n$ es $(-1/\beta, 1/\beta)$; ii) $\Sigma x^n/n^2$ converge si $|x| \le 1$ y diverge si $|x| > 1$.*

2. *Hallar el radio de convergencia de las siguientes series y determinar su comportamiento en los extremos del intervalo de convergencia.*

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\sqrt[n]{n}}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3/2)^n x^n}{n+1}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^n}{n}$ 7) $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2}$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$ 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1}$ 11) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n(n-1)}$ 12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^{n-1}3^n}$

3. *Sea* $\sum c_n x^n$ *una serie de potencias y* $\gamma = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$. *Definimos*

$$\rho = \begin{cases} 1/\gamma & \textit{cuando } 0<\gamma<\infty \\ \infty & \textit{si } \gamma = 0 \\ 0 & \textit{si } \gamma = \infty \end{cases}$$

Demuestre que ρ *es el radio de convergencia de la serie. Esta es la fórmula de Hadamard.*

4. *Si en el enunciado del ejercicio anterior cambiamos la definición de* ρ *por*

$$\rho = \limsup_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}$$

demuestre que la conclusión sigue siendo cierta.

5. *Hallar el radio de convergencia de las siguientes series y determinar su comportamiento en los extremos del intervalo de convergencia.*

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(x-1)^{n-1},\quad 2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n!},\quad 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^{2n-2}}{(2n-2)!},\quad 4)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(x+3)^{2n-2}$$

6. *Halle la serie de MacLaurin para las siguientes funciones y determine su radio de convergencia*

$$1)\ \textit{sen}\ x,\qquad 2)\cos x,\qquad 3)(1+x)^{\alpha},\qquad 4)\log(1+x)$$

Observe que en tercer caso el intervalo de convergencia de la serie y el dominio de la función no coinciden.

7. *A partir de la relación* $\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-x^2}}$, *desarrolle el integrando en una serie de potencias e integre para obtener la serie de MacLaurin de* $\arcsin x$. *El mismo procedimiento aplicado a la relación* $\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$ *permite obtener la serie para* $\log(1+x)$.

8. *Sea* $\sum c_n$ *una serie convergente y definamos* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *para* $-1 < x < 1$. *Demuestre que*

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

es decir, que la serie de potencias es continua en 1.

Capítulo 3

Funciones generatrices.

3.1. Variables Aleatorias no Negativas.

Supongamos que X es una variable aleatoria que toma valores en el conjunto $\{0, 1, 2, 3, \ldots, +\infty\}$, por ejemplo, el tiempo que transcurre hasta que ocurra un determinado suceso aleatorio (podría no ocurrir, de ahí que $+\infty$ sea un valor posible para X). Todas las variables aleatorias que vamos a considerar en el resto del curso serán enteras y no negativas, aunque muchos de los resultados que expondremos se pueden generalizar a variables aleatorias con valores en conjuntos más generales.

Llamemos

$$\mathbf{P}(X = k) = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

de modo que $\mathbf{P}(X < +\infty) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k$, y $p_\infty = \mathbf{P}(X = +\infty) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} p_k$ define la probabilidad p_∞ de que X tome el valor $+\infty$.

Si $p_\infty > 0$, definimos la *esperanza* de X, $\mathrm{E}\,X = \infty$, si no,

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, p_k = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k).$$

Algunas consecuencias de la definición precedente son que E tenga las siguientes propiedades:

- E es lineal
- Si X, Y son variables aleatorias independientes (es decir, si para cada par x, y con x en el recorrido de X e y en el recorrido de Y, se cumple $\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y)$) entonces $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\ \mathrm{E}(Y)$.
- Si $X_1, \ldots X_k$ son tales que $\mathrm{E}(X_i)^2 < \infty$, $\mathbf{Cov}(X_i, X_j) = 0$ para todo $i \neq j$, entonces $\mathbf{Var}(\sum_{i=1}^{k} a_i\, X_i)$ $= \sum_{i=1}^{k} a_i^2\, \mathbf{Var}(X_i)$

3.1.1. Sumas de Variables Independientes.

Si X, Y son variables aleatorias independientes, no negativas, que solamente toman valores enteros, entonces

$$\mathbf{P}(X + Y = n) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(X = i, Y = n - i) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(X = i)\mathbf{P}(Y = n - i)$$

Ejemplo 3.1
Si $X \sim$ Poiss(λ) e $Y \sim$ Poiss(μ), y son independientes, entonces $X + Y \sim$Poiss$(\lambda + \mu)$.

Si X tiene distribución de Poisson con parámetro λ, entonces, para cada $k = 0, 1, \ldots,$ $\mathbf{P}(X = k) = \lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}/k!$, de manera que para cada $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X=k)\mathbf{P}(Y=n-k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!} \frac{\mu^{n-k}\mathrm{e}^{-\mu}}{(n-k)!} \\ &= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} = \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}, \end{aligned}$$

es decir, es la probabilidad de que una variable con distribución de Poisson de parámetro $\lambda + \mu$ valga n.

Ejercicios 3.1
Si $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ *e* $Y \sim \mathrm{Bin}(m, p)$, *y son independientes, entonces* $X + Y \sim \mathrm{Bin}(n + m, p)$.

3.2. Funciones Generatrices de Probabilidad

Si $X \sim F$ es una variable aleatoria entera, no negativa, con función de distribución F (i.e. $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ para $x \in \mathbf{R}$), vamos a definir la *función generatriz de probabilidades* de X (o de su distribución) así:

$$g(t) = \mathrm{E}\, t^X = \sum_k t^k \mathbf{P}(X = k).$$

Esta es una serie geométrica con coeficientes $\mathbf{P}(X = k)$ y como $g(1) = \sum_k \mathbf{P}(X = k) \leq 1$ entonces, el radio de convergencia de la serie es al menos 1.

El coeficiente del término t^k es precisamente $\mathbf{P}(X = k)$, de ahí que se la conozca como función generatriz de probabilidades.

Es claro que, como se trata de un polinomio (si el recorrido de X está acotado) o de una serie de potencias, g caracteriza a la distribución de X.

Ejemplos 3.2

1. Si $X \sim\mathrm{Poiss}(\lambda)$ entonces $g(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$

   En efecto, $g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}/k! = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$.

2. Si $X \sim\mathrm{Bern}(p)$, es decir, si $\mathbf{P}(X = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(X = 0)$, entonces $g(t) = pt + (1 - p)$

   En este caso, $g(t) = t^0\mathbf{P}(X = 0) + t\mathbf{P}(X = 1) = pt + (1 - p)$.

3. Si X representa el número de fracasos antes del primer éxito en una sucesión de ensayos de Bernoulli independientes diremos que X tiene distribución *geométrica*, entonces $g(t) = p/(1 - (1 - p)t)$.

Ahora tenemos que $\mathbf{P}(X = k) = (1 - p)^k p$, para $k = 0, 1, 2, \ldots,$ de manera que

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k t^k = p\frac{1}{1-(1-p)t}.$$

Como vimos en el capítulo precedente, dentro del radio de convergencia de la serie, se puede intercambiar el orden de la suma y la derivada, de manera que

$$\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_k t^k\, \mathbf{P}(X=k) = \sum_k k\, t^{k-1}\, \mathbf{P}(X=k)$$

y, en general,

$$\frac{\mathrm{d}^n g(t)}{\mathrm{d}t^n} = \sum_k k(k-1)\cdots(k-n+1)t^{k-n}\mathbf{P}(X=k) = \sum_k \frac{k!}{(k-n)!} t^{k-n}\mathbf{P}(X=k)$$

Observación 3.1

$$\left.\frac{\mathrm{d}^n g(t)}{\mathrm{d}t^n}\right|_{t=0} = n!\mathbf{P}(X = n)$$

de modo que, en efecto, g caracteriza la distribución de X. En particular, $g(0) = P(X = 0)$.

Observación 3.2

$$\left.\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1} = \sum_k k\mathbf{P}(X = k) = \mathrm{E}(X),$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=1} = \sum_k k(k-1)\mathbf{P}(X = k) = \mathrm{E}(X(X-1)),$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^n g(t)}{\mathrm{d}t^n}\right|_{t=1} = \sum_k k(k-1)\dots(k-n+1)\mathbf{P}(X = k) = \mathrm{E}(X(X-1)\dots(X-n+1)).$$

Por esta razón, también se la llama *función generatriz de momentos factoriales.*

Observación 3.3 Es importante notar que 1 podría ser un punto del borde del círculo de convergencia, pero en este caso, si las series anteriores convergen, el Teorema de Abel garantiza que las igualdades anteriores son correctas.

Observación 3.4 Si X, Y son variables aleatorias independientes, entonces g_{X+Y}, la función generatriz de $X + Y$ y las generatrices de X, g_X y de Y, g_Y se relacionan de la siguiente forma:

$$g_{X+Y}(t) = g_X(t)\, g_Y(t)$$

Esto ocurre porque si X,Y son independientes, también lo son t^X y t^Y, de manera que

$$g_{X+Y}(t) = \mathrm{E}(t^{X+Y}) = \mathrm{E}(t^X)\,\mathrm{E}(t^Y) = g_X(t)g_Y(t).$$

Evidentemente, esto se extiende a cualquier número finito de sumandos independientes:

$$g_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} g_{X_i}(t).$$

Ejemplos 3.3

1. Con esta observación podemos volver a verificar que la suma de dos variables independientes $X \sim \mathrm{Poiss}(\lambda)$ e $Y \sim \mathrm{Poiss}(\mu)$, tiene distribución de Poisson con parámetro $\lambda + \mu$.

   De acuerdo con la observación anterior,

   $$g_{X+Y}(t) = g_X(t)g_Y(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}\mathrm{e}^{\mu(t-1)} = \mathrm{e}^{(\lambda+\mu)(t-1)}.$$

2. Si $S_n \sim\mathrm{Bin}(n, p)$, la función generatriz de S_n es $g_{S_n}(t) = (1 - p + pt)^n$.

   La variable aleatoria S_n con distribución $\mathrm{Bin}(n, p)$ puede pensarse como una suma de n variables X_i independientes con distribución de Bernoulli de parámetro p, por lo tanto, $g_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} g_{X_i}(t) = (1 - p + pt)^n$

Ejercicios 3.2

1. *Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son variables independientes, con distribución* $\mathrm{N}(0{,}1)$*, calcular* $\mathrm{E}(X_1^2 + \cdots + X_n^2)$ *y* $\mathbf{Var}(X_1^2 + \cdots + X_n^2)$*. Nota: La distribución de $Y = X_1^2 + \cdots + X_n^2$ se conoce como χ_n^2 (Ji-cuadrado con n grados de libertad).*

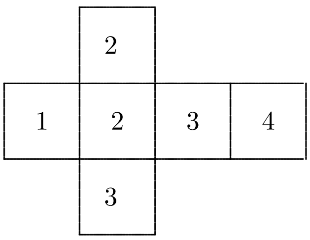
2. **La generatriz de las colas**. *Suponga que X toma valores enteros no negativos, y tiene función generatriz $g_X(s)$. Defina $t_n = \mathbf{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbf{P}(X = k)$ y la función generatriz de la cola de X como $T(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n t_n$.*

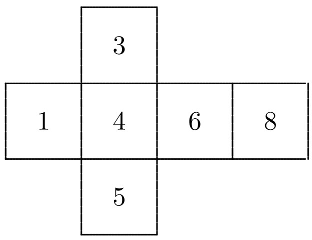
   (1) Muestre que
   $$(1-s)T(s) = 1 - g_X(s)$$
   cuando ambos lados de la igualdad están bien definidos. Deduzca de allí que
   $$\sum_{j=0}^{\infty} s^j \mathbf{P}(X \le j) = \frac{g_X(s)}{1-s}.$$

   (2) Muestre que $\mathrm{E}\, X = T'(1)$, *y si* $\mathrm{E}\, X < \infty$, $\mathbf{Var} X = 2T'(1) + T(1) - T^2(1)$

3. *Considere una sucesión $X_1, X_2, \dots$ de variables aleatorias independientes con distribución uniforme en el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, llame S_k a la suma de las primeras k variables, $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$, y defina $T_n = \min\{k : S_k > n\}$, es decir, el menor número de X_i necesario para conseguir que la suma pase de n. Encuentre la función generatriz de T_n y calcule su esperanza y varianza.*

4. **Dados:** *Suponga que va a jugar un juego de dados cuyo resultado depende sólo de la suma obtenida al lanzar dos dados. Su rival insiste en jugar con unos dados que tienen los puntos sobre las caras como se indica en el dibujo. Su argumento es que la distribución de la suma con estos dados es la misma que si se usaran dados corrientes, y con estos dados no se corre el riesgo de que alguien subrepticiamente los cambie por dados desbalanceados. ¿Tiene razón?*





3.2.1. Distribución de la Suma de un Número Aleatorio de Sumandos.

Supongamos que $X_1, X_2, \dots$ es una sucesión de variables aleatorias independientes, y N es otra variable aleatoria, independiente de las anteriores, que solamente toma valores en $\{0, 1, 2, \dots\}$. Veamos cómo es la función generatriz de $S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$:

$$\begin{aligned}
g_{S_N}(t) &= \mathrm{E}(t^{S_N}) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i \mathbf{P}(S_N = i) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} t^i \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_k = i, N = k) \right) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_k = i)\mathbf{P}(N = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} t^i \mathbf{P}(S_k = i) \right) \mathbf{P}(N = k) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{S_k}(t) \mathbf{P}(N = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (g_{X_1}(t))^k \mathbf{P}(N = k) = g_N(g_{X_1}(t)).
\end{aligned}$$

Ejemplos 3.4

1. Cierta pizzería tiene un servicio de entrega a domicilio. El sábado en la noche se recibe un número N ~Poiss(λ) de órdenes. El encargado de recibir los pedidos ha tomado unos tragos de más, y con

probabilidad $1-p$ anota mal la dirección de entrega que le da cada cliente. Cada anotación es independiente de las anteriores y de cuántos clientes llamen. ¿Cuál es la distribución del número de pizzas repartidas correctamente?

Consideremos variables aleatorias X_i, con $X_i = 1$, si la dirección del i-ésimo cliente fue anotada correctamente y $X_i = 0$ en caso contrario. Las X_i son independientes y $X_i \sim$Bern(p). Si $N \sim$Poiss(λ), independiente de las X_i, entonces el número de pizzas repartidas correctamente es $S_N = X_1 + \cdots + X_N$.

De acuerdo con el resultado anterior, como $g_{X_1}(t) = pt + (1-p)$ y $g_N(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$, entonces

$$g_{S_N}(t) = g_N(g_{X_1}(t)) = \mathrm{e}^{\lambda(pt+1-p-1)} = \mathrm{e}^{\lambda p(t-1)}$$

lo cual indica que la distribución de un número $N \sim$Poiss(λ) de sumandos independientes con distribución Bern(p) tiene distribución de Poisson con parámetro λp.

2. El encargado de la pizzería tiene tendencia a manejar a exceso de velocidad, y lo paran los agentes de tránsito. La mitad de las veces que ésto ocurre, le ponen una multa de \$ 50, y la otra mitad, de \$ 100. Además, suele pelearse con los agentes de tránsito, de modo que con probabilidad p, además de multarlo, le quitan la licencia. ¿Cuál es la esperanza de la cantidad que tiene que pagar en multas antes de quedarse sin licencia?

   Llamemos N al número de veces que lo paran antes de quitarle la licencia. Así, $\mathbf{P}(N=k) = (1-p)^{k-1}p$, y el recorrido de N es $\{1, 2, 3, \dots\}$. La función generatriz de N es

$$g_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} t^k (1-p)^{k-1} p = pt \sum_{k=1}^{\infty} (t(1-p))^{k-1} = pt \sum_{k=0}^{\infty} (t(1-p))^k = \frac{pt}{1-t(1-p)}.$$

   Por otro lado, si X_i representa la cantidad que tiene que pagar en multas la i-ésima vez que lo paran,

$$X_i = \begin{cases} 50 & \text{con probabilidad } 1/2 \\ 100 & \text{con probabilidad } 1/2 \end{cases}$$

   y $g_{X_i}(t) = \dfrac{t^{50} + t^{100}}{2}$, de modo que, si llamamos $S_N = X_1 + \dots X_N$ a la cantidad que tiene que pagar en multas antes de quedarse sin licencia,

$$g_{S_N}(t) = g_N(g_{X_1}(t)) = \frac{p(t^{50} + t^{100})}{(2 - (t^{50} + t^{100})(1-p))}.$$

   La esperanza de S_N es $\left.\dfrac{\mathrm{d}g_{S_N}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}$, y es sencillo dar una fórmula general para para ella: como $g'_{S_N} = g'_N(g_{X_1}(t))g'_{X_1}(t)$ y $g_{X_1}(1) = 1$ y $g'_{X_1}(1) = 1$, entonces

$$\mathrm{E}(S_N) = \left.\frac{\mathrm{d}g_N(g_{X_1}(t))(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1} = \mathrm{E}(N)\,\mathrm{E}(X_1).$$

   En el ejemplo anterior, $\mathrm{E}(N) = 1/p$, y $\mathrm{E}(X_1) = 75$, de modo que la esperanza de la cantidad que tiene que pagar en multas antes de quedarse sin licencia es de \$ $75/p$.

Ejercicios 3.3

1. *Suponga que se lanzan misiles "inteligentes" contra un blanco particular, y la probabilidad de acertar en cada lanzamiento es p. Suponga demás que por cada intento fallido se destruye un número X de blancos civiles, con distribución de Poisson con parámetro λ. Calcule la esperanza del número de blancos civiles destruidos antes de conseguir destruir el objetivo del ataque.*

2. *Una tarjeta de circuito impreso tiene un cierto número de huecos que se hacen usando un taladro numérico controlado automáticamente. El control tiene un número de fallas aleatorio, k con distribución de Poisson(λ). Si el control falla, la probabilidad de que el taladro no haga el hueco correspondiente es p. La tarjeta se descarta cuando le falta al menos un hueco. Calcule la probabilidad de que una tarjeta resulte aceptable. Aprovechar el resultado anterior para deducir la distribución del número de tarjetas aceptables.*
3. *Se lanza una moneda balanceada repetidamente, cada vez que salga AGUILA se lanza un dado balanceado y se anota el número obtenido. El proceso se para la primera vez que aparezca un SOL al lanzar la moneda. Escriba la función generatriz de la suma total de las caras del dado.*

3.3. Procesos de Ramificación.

Vamos a mirar un ejemplo muy sencillo de lo que se conoce como "procesos de ramificación", el proceso de Galton-Watson, que puede describirse así:

Comenzamos con un "progenitor", que constituye la generación 0. Este progenitor da origen a k descendientes con probabilidad p_k ($\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$). Estos descendientes forman la primera generación. Cada uno de ellos en forma independiente da origen a un número aleatorio de descendientes, con la misma distribución de probabilidades anterior, es decir, la probabilidad de que cada uno de los individuos de esta generación tenga k descendientes es p_k. Este proceso continúa desarrollándose hasta la extinción, es decir, cuando todos los miembros de una generación tienen 0 descendientes.

Este modelo puede usarse como el modelo para el crecimiento de una población en la cual no hay amenazas del medio ambiente, depredadores, etc. Originalmente apareció en el contexto de la supervivencia de los apellidos. También se usa este tipo de procesos para el estudio de ciertos tipos de "colas": la descendencia de un cliente del sistema es el número de clientes que llegan mientras él está siendo atendido.

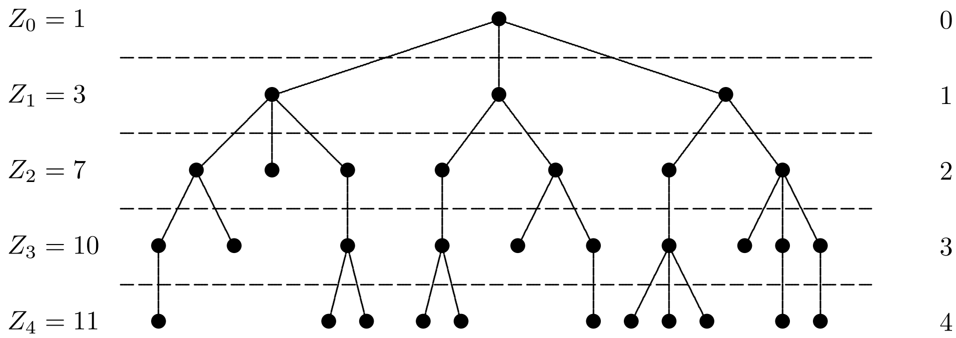


Figura 3.1: Proceso de Ramificación.

Para definir formalmente este proceso, consideramos una colección de variables aleatorias enteras, no negativas $\{Z_{n,j}, n \geq 1, j \geq 1\}$, independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.), donde cada $Z_{n,j} \sim \{p_k\}$. Definimos el proceso de ramificación $\{Z_n, n \geq 0\}$, donde cada Z_n representa el número de individuos de la n-ésima generación así:

$$\begin{array}{rll} Z_0 = & 1 & \text{número de individuos en la generación 0} \\ Z_1 = & Z_{1,1} & \text{número de individuos en la generación 1} \\ Z_2 = & Z_{2,1} + Z_{2,2} + \cdots + Z_{2,Z_1} & \text{número de individuos en la generación 2} \\ \vdots & & \\ Z_n = & Z_{n,1} + Z_{n,2} + \cdots + Z_{n,Z_{n-1}} & \text{número de individuos en la generación n} \end{array}$$

donde $Z_{n,j}$ es el número de individuos de la generación n que descienden del individuo j de la generación anterior.

Si $Z_n = 0$, entonces $Z_{n+1} = 0$, por lo tanto, cuando la sucesión $\{Z_n\}$ llega a 0, allí se queda.

Por la construcción, Z_{n-1} es independiente de las $\{Z_{n,j}, j \geq 1\}$.

Vamos a estudiar la función generatriz de probabilidades de Z_n para poder determinar su distribución y sus momentos.

Definamos, para $n \geq 0$, $g_n(s) = g_{Z_n}(s) = \mathrm{E}(s^{Z_n})$, y llamemos $g(s) = \mathrm{E}(s^{Z_1}) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$. Observemos que Z_n es una suma de Z_{n-1} sumandos, cada uno de ellos con distribución dada por la sucesión $\{p_k\}$. Así que tenemos

$$
\begin{aligned}
g_0(s) &= \mathrm{E}(s^{Z_0}) = \mathrm{E}(s^1) = s \\
g_1(s) &= g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \\
g_2(s) &= g_1(g(s)) = g(g(s)) \\
&\vdots \\
g_n(s) &= g_{n-1}(g(s)) = g(g_{n-1}(s)),
\end{aligned}
$$

es decir que el efecto de la ramificación se refleja en la composición funcional. En principio un cálculo explícito no tiene por qué ser fácil de hacer, pero en algunos ejemplos concretos lo es.

Ejemplo 3.1
Cada individuo puede tener un sólo descendiente con probabilidad p o ninguno con probabilidad $q = 1 - p$, es decir, $Z_{n,j} \sim$Bern(p).

En este caso,

$$
\begin{aligned}
g(s) &= 1 - p + ps = q + ps \\
g_2(s) &= q + p(q + ps) = q + pq + p^2 s \\
&\vdots \\
g_n(s) &= q + pq + \cdots + p^{n-1} q + p^n s.
\end{aligned}
$$

Observemos que la probabilidad de que en la n-ésima generación la población se haya extinguido es $\mathbf{P}(Z_n = 0) = g_n(0)$, y como $\lim_{n\to\infty} g_n(0) = q \sum_{j=0}^{\infty} p^j = \frac{q}{1-p} = 1$, entonces con probabilidad 1 esta población se extinguirá en algún momento. Volveremos a hablar sobre este tema un poco más adelante.

Cálculo de momentos.

Supongamos que la esperanza y la varianza de Z_1 son finitas, digamos, $\mathrm{E}(Z_1) = \mu$, $\mathbf{Var}(Z_1) = \sigma^2$. Definamos $\mu_n = \mathrm{E}(Z_n) = g_n'(1)$. Como $g_n'(s) = (g_{n-1}(g(s)))' = g_{n-1}'(g(s))g'(s) = g_{n-2}'(g(s))(g'(s))^2$, si ponemos $s = 1$, obtenemos $\mu_n = \mu_{n-1}\mu = \mu_{n-2}\mu^2 = \ldots = \mu_1 \mu^{n-1} = \mu^n$.

Volviendo al ejemplo de las $Z_{n,j} \sim$Bern(p), la esperanza del tamaño de la n-ésima generación es p^n.

Probabilidad de extinción.

Queremos calcular

$$\pi = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}\right).$$

Como $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n-1} = 0\}$, para $n = 1, 2, \ldots$, entonces

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \{Z_k = 0\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{Z_n = 0\} = \lim_{n\to\infty} g_n(0).$$

Llamemos $\pi_n = g_n(0) = \mathbf{P}\{Z_n = 0\}$, es decir, a la probabilidad de que la extinción ocurra en la n-ésima generación o antes.

Teorema 3.1 *Si la esperanza μ de Z_1 es finita, entonces $\pi = 1$, si en cambio $\mu > 1$ entonces $\pi < 1$ y es la menor de las soluciones de la ecuación*

$$g(s) = s.$$

Demostración. Comenzaremos mostrando que π es solución de $g(s) = s$. Ya observamos que $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$ de manera que la sucesión $\{\pi_n\}$ es no decreciente y está acotada, por lo tanto tiene un límite al que llamaremos π.

Como $g_{n+1}(s) = g(g_n(s))$ para todo s, en particular, con $s = 0$, resulta que $\pi_{n+1} = g(\pi_n)$. Como g es continua, pasando al límite cuando n tiende a ∞, tenemos que $\pi = g(\pi)$.

Veamos ahora que π es la menor de las soluciones de $g(s) = s$ en $[0, 1]$. Tomemos x en $[0, 1]$ solución de $g(s) = s$.

Observemos que tanto g' como g'' son positivas, por lo tanto g es creciente y convexa.

Como g es creciente, $\pi_1 = g(0) \leq g(x) = x$, $\pi_2 = g_2(0) = g(g(0)) = g(\pi_1) \leq g(g(x)) = x$, y con el mismo razonamiento se obtiene que $\pi_n \leq x$ para todo n, por lo tanto $\pi \leq x$, es decir, π es la menor de las soluciones de $g(s) = s$.

Como g es convexa y $g(0) > 0$, los gráficos de $g(s)$ y s tienen a lo sumo dos puntos en común. Uno de ellos es el 1, pues $g(1) = 1$.

Si $\mu = g'(1) \leq 1$, a la izquierda de 1, g crece más lentamente que $f(x) = x$, por lo tanto, como g es convexa, no puede haber una raíz de $g(x) = x$ menor que 1, de modo que $\pi = 1$.

En cambio, si $\mu > 1$, hay otra raíz menor que 1, y como observamos antes, π tiene que ser la más chica. •

Por ejemplo, en el caso de las Bernoulli, como $g(s) = 1 - p + ps = s$ tiene solución única $s = 1$, la probabilidad de extinción π es 1 (observe que $\mu = p < 1$).

En realidad, hay un resultado un poco más fuerte (que no estudiaremos en estas notas): $\mathbf{P}\{Z_n \to 0 \text{ ó } Z_n \to +\infty\} = 1$, es decir, que con probabilidad 1 la población, o se extingue o explota.

Ejemplo 3.5

El cajero de un banco quiere irse a tomar café, pero no puede dejar la caja vacía mientras haya clientes. Tarda en promedio 3 minutos en atender a cada cliente, y mientras atiende a cada uno, hay probabilidad p_j de que lleguen j clientes más a la cola. Suponga que $p_0 = .2$, $p_1 = .2$ y $p_3 = .6$. Si esta situación no cambia, ¿cuál es la probabilidad de que el cajero pueda irse a tomar café en algún momento?

Pensemos la cola como un proceso de ramificación, con distribución para los descendientes dada por $\{.2, .2, .6, 0, 0, \dots\}$. El cajero se puede ir a tomar café si y sólo si el proceso se extingue, por lo tanto, basta calcular la probabilidad π de extinción.

La discusión anterior conduce a que π es la menor de las soluciones de la ecuación $t = g(t)$, donde $g(t) = .2 + .2t + .6t^2$

Observemos que $g'(t) = .2 + 1.2t$ de manera que $\mu = 1.4$.

La menor de las soluciones de $t = .2 + .2t + .6t^2$ es $1/3$, de manera que, con probabilidad $1/3$ el cajero podrá ir a tomar café.

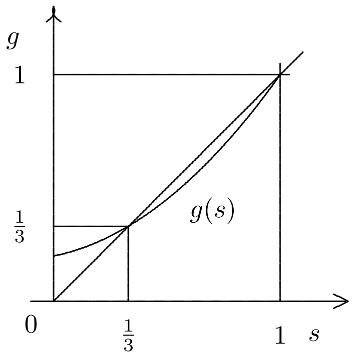


Figura 3.2: Probabilidad de Extinción.

Ejercicios 3.4

1. *Encontrar la probabilidad de extinción, y dar condiciones para la extinción segura en un proceso de ramificación con distribución de la descendencia dada por: $p_n = p(1-p)^n$, $n \geq 0$, $0 < p < 1$.*
2. **Ramificación en ambiente variable.** *Vamos a considerar un modelo como el de ramificación simple estudiado antes, excepto que ahora los individuos en la n-ésima generación se reproducen de acuerdo a la ley $\{p_{nk}, k \geq 0\}$, con función generatriz $g_n(t) = \sum_k p_{nk} t^k$. Llamemos, como antes Z_n al número de individuos de la n-ésima generación.*

   (1) Construir un modelo para esta población (es decir, describir las variables Z_n).

   (2) Escribir la función generatriz $\mathrm{E}\, t^{Z_n}$, en términos de $g_n(t)$.

   (3) Calcular $\mathrm{E}\, Z_n$ en función de $\mu_i = g_i'(1)$.

3.4. Distribuciones Límite: el Teorema de Continuidad.

Muchas veces resulta interesante obtener convergencia en distribución de cierta sucesión de variables aleatorias.

Diremos que la sucesión $\{X_n, n \geq 0\}$ converge en distribución a una variable aleatoria X y lo denotaremos por $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ si la sucesión de las funciones de distribución de las X_n, F_{X_n}, converge a la función de distribución de la X, F_X en cada punto de continuidad del límite: $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ si y sólo si $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ para cada x donde F_X sea continua. En el caso de variables aleatorias que solamente toman valores en un conjunto discreto, ésto se traduce en que $\mathbf{P}(X_n = k) \to \mathbf{P}(X = k)$ para $k = 0, 1, \dots$.

Vamos a mostrar que ésto es equivalente a que

$$g_{X_n(s)} \to_{n\to\infty} g_X(s) \qquad \text{para } 0 \leq s \leq 1,$$

es decir, basta ver que las funciones generatrices convergen.

En muchos ejemplos resulta más simple ver que las funciones generatrices convergen que ver lo que ocurre con las funciones de distribución. El siguiente teorema se conoce como el **Teorema de continuidad**.

Teorema 3.2 *Supongamos que para cada $n = 1, 2, \dots$ la sucesión $\{p_k^{(n)}, k \geq 0\}$ es una función de masa, es decir, hay variables aleatorias $X_1, X_2, \dots$ tales que*

$$p_k^{(n)} = \mathbf{P}(X_n = k)$$

y por lo tanto $\sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(n)} = 1$, y la función generatriz $g_n(t) = \mathrm{E}\, t^{X_n}$ está definida.

Entonces, existe una sucesión $\{p_k, k \geq 0\}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} p_k^{(n)} = p_k \quad \text{para } k = 0, 1, \dots$$

sí y sólo si existe una función $g(t)$, $0 \leq t \leq 1$ tal que para todo $t \in (0, 1)$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} t^k p_k^{(n)} = g(t).$$

En este caso, $g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k p_k$, y $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ sí y sólo si $\lim_{t\uparrow 1} g(t) = 1$.

Nota: Si $\lim_{n\to\infty} p_k^{(n)} = p_k$, $0 \leq p_k \leq 1$, pero de allí no se deduce que $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, porque podría estar concentrándose masa en $+\infty$, por ejemplo, si $p_k^{(n)} = 1$ para $k = n$ y $p_k^{(n)} = 0$ para $k \neq n$: para k fijo, $\lim_{n\to\infty} p_k^{(n)} = 0$, por lo tanto $p_0 = p_1 = \dots = 0$.

Antes de dar una demostración del teorema de continuidad, veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.6 (Aproximación de Poisson a la binomial)
Si $X_n \sim$Bin$(n, p(n))$, y $\lim_{n\to\infty} np(n) = \lambda$ entonces X_n converge en distribución a una variable aleatoria X con distribución Poiss(λ).

Esta es una forma razonable para introducir las variables aleatorias con distribución de Poisson: pensemos que queremos contar el número de "accidentes" que se producen en un intervalo de tiempo $[0, T]$, cuando la propensión a que ocurran accidentes permanece constante en el tiempo. Vamos a partir el intervalo en n pedacitos tales que

$$\mathbf{P}(\text{ocurra exactamente un accidente en un pedacito}) = p(n)$$

$$\mathbf{P}(\text{ no ocurra ningún accidente }) = 1 - p(n)$$

$$\mathbf{P}(\text{ocurran 2 o más accidentes}) = 0$$

Con estas consideraciones, el número X de accidentes en $[0, T]$ será la suma de los pedacitos en los cuales hubo accidentes, de modo que $X_n \sim$ Bin$(n, p(n))$, es decir,

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p(n)^k (1 - p(n))^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p(n)^k (1 - p(n))^{n-k}$$

y poniendo $p(n) \sim \lambda/n$ y pasando al límite cuando $n \to \infty$, tenemos que

$$\mathbf{P}(X = k) \to \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}.$$

Una forma alternativa de verificar el resultado anterior es usar el resultado del teorema de continuidad:

$$\lim_{n\to\infty} (1 - p(n) + p(n)t)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{(t-1)p(n)n}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-\lambda(t-1)}.$$

Demostración del Teorema de Continuidad.

Supongamos que hay convergencia en distribución, es decir, que $\lim_{n\to\infty} p_k^{(n)} = p_k$ para $k = 1, \dots,$ veamos que entonces las funciones generatrices convergen.

Fijemos $t \in (0, 1)$. Dado $\varepsilon > 0$, arbitrario, podemos elegir m tal que $\sum_{i=m+1}^{\infty} t^i < \varepsilon$, y escribir:

$$|g_n(t) - g(t)| \le \sum_{k=1}^{\infty} |p_k^{(n)} - p_k| t^k = \sum_{k=1}^{m} |p_k^{(n)} - p_k| t^k + \sum_{k=m+1}^{\infty} |p_k^{(n)} - p_k| t^k$$

$$\le \sum_{k=1}^{m} |p_k^{(n)} - p_k| + \sum_{k=m+1}^{\infty} t^k \le \sum_{k=1}^{m} |p_k^{(n)} - p_k| + \varepsilon$$

de manera que haciendo tender n a infinito obtenemos

$$\limsup |g_n(t) - g(t)| < \varepsilon.$$

El recíproco es la parte más interesante del teorema: si convergen las funciones generatrices, entonces hay convergencia en distribución.

Supongamos entonces que $\sum p_k^{(n)} t^k$ converge. La sucesión $\{p_k^{(n)}\}$ es acotada, de manera que tiene una subsucesión convergente. Supongamos que para dos subsucesiones convergentes $\{p_k^{(n')}\}$ y $\{p_k^{(n'')}\}$ el límite es diferente: como las funciones generatrices convergen, ocurre que

$$\lim_{n'\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_k^{(n')} s^k = \lim_{n'\to\infty} g_{n'}(s) = g(s),$$

$$\lim_{n''\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_k^{(n'')} s^k = \lim_{n''\to\infty} g_{n''}(s) = g(s),$$

de manera que el límite de las funciones generatrices es el mismo para cualquier subsucesión.

Como las funciones generatrices determinan en forma única a la sucesión $\{p_k^{(n)}\}$, los límites de todas las subsucesiones convergentes tienen que coincidir. Por lo tanto, $\{p_k^{(n)}\}$ tiene límite y el límite tiene función generatriz $g(s)$. •

Ejemplo 3.7 (Sucesos Raros)
Supongamos que queremos estudiar el número de sucesos "raros" que ocurren, donde denominamos "raro" a un suceso cuando tiene probabilidad chica de ocurrir: tenemos un arreglo $\{X_{n,k}, k \geq 1\}$, $n = 1, 2, \ldots$ de variables de Bernoulli independientes, donde cada fila (k)del arreglo es i.i.d, pero el parámetro de las variables de las distintas filas no es necesariamente el mismo.

$$\mathbf{P}(X_{n,k} = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_{n,k} = 0) = p_k(n)$$

y además, la probabilidad de que $X_{n,k}$ valga uno es uniformemente pequeña en k:

$$\max_{1 \leq k \leq n} p_k(n) = \delta_n \to_{n\to\infty} 0.$$

Supongamos también que

$$\sum_{k=1}^{n} p_k(n) = \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_{n,k}\right) \to_{n\to\infty} \lambda$$

para algún λ positivo. Entonces,

$$\sum_{k=1}^{n} X_{n,k} \stackrel{\mathcal{D}}{\to} X \sim \mathit{Poisson}(\lambda).$$

Podemos pensar en $X_{n,k}$ como la indicatriz de un suceso raro $A_{n,k}$. El enunciado anterior dice que cuando en una serie grande de sucesos cada uno de ellos tiene probabilidad pequeña de ocurrir, el número de sucesos que ocurren tiene distribución de Poisson.

Para verificar que el resultado es cierto, basta mirar la función generatriz de $\sum_{k=1}^{n} X_{n,k}$, que es

$$g(t) = \prod_{k=1}^{n} g_{X_{n,k}}(t) = \prod_{k=1}^{n} (1 - p_k(n) - p_k(n)t).$$

Querríamos ver que esta expresión tiende a $\mathrm{e}^{-\lambda(t-1)}$. Tomemos logaritmos en la expresión anterior, y observemos que $\log(1-x)$ es como $-x + R(x)$, donde $R(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^n/n$ es el resto de la serie de Taylor de $\log(1-x)$, de modo que para $x < 1/2$, $R(x) < x^2$. Así, basta calcular el límite de

$$\sum_{k=1}^{n} -\log(p_k(n)(1-t)) = \sum_{k=1}^{n} p_k(n)(1-t) + \sum_{k=1}^{n} R(p_k(n)(1-t)).$$

Como $\sum_{k=1}^{n} p_k(n)(1-t) \to \lambda(1-t)$, lo único que nos queda por verificar es que $\sum_{k=1}^{n} R(p_k(n)(1-t)) \to 0$. Observemos que R es monótona, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} R(p_k(n)(1-t)) &\leq \sum_{k=1}^{n} R(p_k(n)) \leq 2\sum_{k=1}^{n} p_k^2(n) \\
&\leq 2 \max_{1\leq k\leq n} p_k(n) \sum_{k=1}^{n} p_k(n) \\
&\leq 2\delta_n \sum_{k=1}^{n} p_k(n) \to 0,
\end{aligned}$$

porque $\delta_n \to 0$ y $\sum_{k=1}^{n} p_k(n) \to \lambda$.

Ejercicios 3.5

1. Recuerde la función generatriz de T_n del ejercicio 3. ¿Qué ocurre cuando $n \to \infty$? ¿Cómo se interpreta ésto?.

3.5. El Paseo al Azar Simple

Se llama *paseo al azar simple* a la sucesión de sumas parciales $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ correspondiente a una sucesión de variables aleatorias $\{X_i, i \geq 1\}$ que sólo pueden tomar valores +1 y -1 : $\mathbf{P}(X_i = 1) = p$, $\mathbf{P}(X_i = -1) = q$, $p + q = 1$. Suponemos además que $S_0 = 0$ con probabilidad 1. Se puede pensar en el paseo al azar asociándolo al juego de azar que consiste en lanzar una moneda. Si sale AGUILA se gana 1, si sale SOL se pierde, y S_n representa el capital del jugador al cabo de n jugadas.

Las X_i pueden representarse en términos de variables Y_i con distribución de Bernoulli(p), mediante la relación $X_i = 2Y_i - 1$, de manera que $S_n = 2B_n - n$, donde $B_n \sim$Bin(n, p).

A partir de esta observación se deduce que los incrementos $S_{n_j} - S_{m_j}$ para $j = 1, \ldots k$ correspondientes a intervalos disjuntos con $m_1 < n_1 \leq m_2 < n_2 \cdots \leq m_k < n_k$ son independientes y tienen distribución Bin$(n_j - m_j, p)$.

También se deduce que

$$\mathbf{P}(S_{n_1+n_2} = n_1 - n_2) = \mathbf{P}(2B_{n_1+n_2} - (n_1 + n_2) = n_1 - n_2) = \binom{n_1 + n_2}{n_1} p^{n_1} q^{n_2}.$$

Observemos que este resultado también se obtiene notando que cada una de las $\binom{n_1+n_2}{n_1}$trayectorias que unen el $(0, 0)$ con el $(n_1 + n_2, n_1 - n_2)$ tienen la misma probabilidad: $p^{n_1} q^{n_2}$.

Vamos a llamar $p_{n,x}$ a la probabilidad de que en el instante n el paseo se encuentre en x, de manera que

$$p_{n,x} = \mathbf{P}(S_n = x) = \binom{n}{\frac{n+x}{2}} p^{\frac{n+x}{2}} q^{\frac{n-x}{2}} \tag{3.1}$$

Este mismo resultado puede obtenerse usando funciones generatrices de la siguiente forma: llamemos $\psi_n(t) = \mathrm{E}\, t^{S_n} = \sum_x t^x \mathbf{P}(S_n = x) = \sum_x t^x p_{n,x}$. Recordemos que $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, así que

$$\psi_n(t) = (\mathrm{E}\, t^{X_i})^n = \left(pt + \frac{q}{t}\right)^n = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} p^h t^h \frac{q^{n-h}}{t^{n-h}} = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} t^{2h-n} p^h q^{n-h}.$$

De manera que tenemos $\psi_n(t) = \sum_x t^x p_{n,x} = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} t^{2h-n} p^h q^{n-h}$, así que igualando los coeficientes de las potencias de t, con $2h - n = x$ se obtiene nuevamente (3.1).

Una pequeña variante de esto último es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\psi_n(t) &= \sum_x t^x p_{n,x} = \sum_x t^x (p\, p_{n-1,x-1} + q\, p_{n-1,x+1}) \\
&= p\, t \sum_x t^{x-1} p_{n-1,x-1} + \frac{q}{t} \sum_x t^{x+1} p_{n-1,x+1} = p\, t \psi_{n-1}(t) + \frac{q}{t} \psi_{n-1}(t) \\
&= \left(pt + \frac{q}{t}\right) \psi_{n-1}(t) = \left(pt + \frac{q}{t}\right)^2 \psi_{n-2}(t) = \cdots = \left(pt + \frac{q}{t}\right)^n \psi_0(t) \\
&= \left(pt + \frac{q}{t}\right)^n,
\end{aligned}$$

es decir, obtenemos una vez más (3.1).

3.5.1. Retornos al Origen.

Vamos a estudiar ahora algunas cosas relacionadas con los retornos del paseo al cero, por ejemplo, la esperanza del tiempo de retorno.

Llamemos τ_0 al instante (aleatorio) en que el paseo regresa por primera vez al origen, es decir

$$\tau_0 = \min\{n > 0 : S_n = 0\}, \tag{3.2}$$

observemos que τ_0 es par.

Introducimos la siguiente notación:

$$u_{2n} = p_{2n,0} = \mathbf{P}(S_{2n} = 0), \tag{3.3}$$

de modo que u_{2n} es la probabilidad de que el paseo esté en el origen al cabo de $2n$ pasos, y llamamos f_{2n} a la probabilidad de que el paseo esté en el origen por primera vez al cabo de $2n$ pasos.

$$f_{2n} = \mathbf{P}(S_{2n} = 0, S_i \neq 0 \,\text{para}\, 0 < i < 2n) = \mathbf{P}(\tau_0 = 2n) \tag{3.4}$$

Es fácil ver que en el caso del paseo simétrico, con $p = q = 1/2$, $f_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n}$. Veamos qué ocurre en el caso asimétrico:

Teorema 3.3 *Para un paseo al azar asimétrico, la probabilidad de ir de* $(0,0)$ *a* $(2n,0)$ *pasando por el 0 por primera vez en el instante* $2h$ *es* $f_{2h}u_{2n-2h}$.

Observemos que $\{S_{2h} = 0, S_i \neq 0 \;\; 0 < i < 2h, S_{2n} = 0\}$ es el evento que indica que se regresa al 0 por primera vez en el instante $2h$.

De esta forma,

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \mathbf{P}(S_{2n} = 0) = \mathbf{P}(\cup_h\{S_{2h} = 0, S_i \neq 0 \;\; 0 < i < 2h, S_{2n} = 0\}) \\ &= \mathbf{P}(\cup_h\{S_{2h} = 0, S_i \neq 0 \;\; 0 < i < 2h\} \cap \{S_{2n} = 0\}) \\ &= \sum_{h=0}^{n} f_{2h}\mathbf{P}(S_{2n} = 0 \mid S_{2h} = 0, S_i \neq 0 \;\; 0 < i < 2h) = \sum_{h=0}^{n} f_{2h}u_{2n-2h}. \end{aligned}$$

Como $u_0 = 1$, la fórmula anterior no vale para $n = 0$.

Notemos que $u_2 = f_2u_0$, $u_4 = f_2u_2 + f_4u_0$, $u_6 = f_2u_4 + f_4u_2 + f_6u_0$, etc.

Definamos ahora las funciones generatrices

$$\begin{aligned} U(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}z^{2n} = 1 + u_2z^2 + u_4z^4 + \dots \\ F(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}z^{2n} = f_2z^2 + f_4z^4 + \dots, \end{aligned}$$

el producto de estas funciones es

$$U(z)F(z) = f_2u_0z^2 + (f_4 + f_2u_2)z^4 + (f_6 + f_4u_2 + f_2u_4)z^6 + \cdots = U(z) - 1$$

de manera que

$$F(z) = 1 - \frac{1}{U(Z)}. \tag{3.5}$$

Observemos además que

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n,0}z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} p^nq^nz^{2n}.$$

A partir de los cálculos precedentes se puede calcular la probabilidad de retornar al origen:

$$\mathbf{P}(\tau_0 < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} = F(1) = 1 - U(1).$$

¿Y qué se sabe de $U(1)$?

Si $p = q = 1/2$,

$$u_{2n} = \binom{2n}{n} 2^{-n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

donde esta última aproximación se obtiene de usar la *fórmula de Stirling:* $n! = \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} \mathrm{e}^{-n+\theta_n/12n}$, con $0 < \theta_n < 1$.

Observamos entonces que si $p = q = 1/2$, $U(1)$ es una serie divergente, por lo tanto (ver 3.4) $F(1) = 1$, es decir, el retorno al 0 ocurre con probabilidad 1.

Sin embargo, ocurre en un instante aleatorio cuya esperanza es $+\infty$:

$$\begin{aligned}
U(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} (pq)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!} (pqz^2)^n \frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!2^n} \frac{(2pqz^2)^n}{n!} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-1) \frac{(2pqz^2)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2n-1}{2}\right) \frac{(4pqz^2)^n}{n!} \\
&= (1 - 4pqz^2)^{-1/2}.
\end{aligned}$$

Del cálculo anterior se deduce que $F(z) = 1 - \sqrt{1 - 4pqz^2}$, así que

$$F(1) = 1 - \sqrt{1 - 4pq} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q \\ 2q & \text{si } p > q \\ 2p & \text{si } p < q \end{cases}$$

Así, si $p = q = 1/2$, $F(z) = 1 - \sqrt{1 - z^2}$, y la derivada $F'(z) = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$, de manera que $F'(1) = +\infty$, de modo que aún en el caso simétrico, la esperanza del tiempo de retorno al origen es infinita.

Ejercicios 3.6

1. *Si S y S' son dos paseos al azar simétricos simples independientes entre sí, calcular*

$$\mathbf{P}\{S_n - S'_n = 2k\} \quad (k = -n, -n+1, \ldots, n)$$

Sugerencia: Si $\tilde{p}_{n,x} = \mathbf{P}\{S_n - S'_n = x\}$, $\tilde{\psi}_n(z) = \sum_x z^x \tilde{p}_{n,x}$, obtener una relación entre $\tilde{\psi}_n$ y $\tilde{\psi}_{n-1}$ que permita calcular $\tilde{\psi}_\bullet$ por recurrencia.

2. *Dado el paseo al azar simétrico simple S_n, $(n = 0, 1, \ldots)$,*

   (i) ¿ Cuánto vale $\mathbf{P} \left(\bigcap_{i<n} \{S_n > S_i\} \right)$*?*

   (ii) ¿ Cuánto vale $\mathbf{P} \left(\bigcap_{0<i<n} \{S_i > 0\} | S_2 n > 0 \right)$*?*

   (iii) ¿ Cuánto vale $\mathbf{P}\{\max_{0 \le i \le n} S_i = a\}$*?*

3. **Paseo truncado** *Considere un paseo al azar simétrico simple S_n, $(n = 0, 1, \dots)$, con $S_0 = 0$, y $\tau_0 = \min\{n > 0 : S_n = 0\}$, defina $\tau_0 \wedge 2m = \min\{\tau_0, 2m\}$. Muestre que $\mathrm{E}(\tau_0 \wedge 2m) = 4mu_{2m} = 2\,\mathrm{E}(|S_{2m}|)$.* SUGERENCIA: *Muestre que los tres términos de la igualdad tienen la misma función generatriz.*

Comentario:

El paseo al azar es el más sencillo de los procesos aleatorios que pueden estudiarse, y permite plantearse preguntas de gran interés no sólo para este proceso sino para cualquier proceso aleatorio. En muchos casos, las respuestas a estas preguntas son fáciles de responder con herramientas al alcance de estas notas, por ejemplo, la esperanza del tiempo de retorno al origen. Hay otras propiedades que se deducen simplemente de contar las trayectorias. Algunos ejemplos de estas propiedades (que no discutiremos en estas notas porque las técnicas de enumeración que se usan para demostrarlas no están vinculadas directamente con las funciones generatrices) son :

- El célebre "Principio de Reflexión" que establece que la probabilidad de que el paseo hasta el instante n esté en el nivel m, con $m < k$ pero el máximo hasta ese instante haya sobrepasado el nivel k es igual a la probabilidad de que en el instante n el paseo esté en $2k - m$: $\mathbf{P}(S_n = m, \max_{j \le n} S_j \ge k) = \mathbf{P}(S_n = 2k - m)$.

- El llamado "Lema del Escrutinio" que establece que dado que el paseo en el instante $2n$ está en el nivel $2r$, la probabilidad de que siempre haya permanecido por encima del nivel 0 es r/n: $\mathbf{P}(\prod_{i=1}^{2n-1} S_i \neq 0 | S_{2n} = 2r) = \frac{r}{n}$. El nombre del lema se debe a esta interpretación del resultado: si en una elección con solamente dos candidatos, el candidato A obtiene a votos y el candidato B obtiene b votos, entonces si $a > b$ la probabilidad de que durante el escrutinio A siempre aventaje a B es $(a - b)/(a + b)$.

- El hecho de que, sea cual sea la longitud del paseo, la probabilidad de que en la segunda mitad no ocurran retornos al origen es $1/2$.

3.6. Funciones Generatrices de Momentos.

Dada una variable aleatoria X, o su función de distribución F, vamos a definir otra función generatriz, definida como

$$p(t) = \mathrm{E}\,\mathrm{e}^{tX}.$$

Notemos que cuando el recorrido de X es discreto, $p(t) = g(\mathrm{e}^t)$. Si X está acotada, p_X está bien definida para todo t real, en cambio, si X no está acotada, es posible que el dominio de p no sean todos los reales. En todo caso, p siempre está definida en cero, y $p(0) = 1$.

Si la función generatriz está definida en un entorno de $t = 0$, entonces como las series

$$p(t) = \mathrm{E}\,\mathrm{e}^{tX} = \mathrm{E} \sum_{n=1}^{\infty} t^n X^n = \sum_{n=1}^{\infty} t^n \,\mathrm{E}\, X^n$$

son convergentes, se puede derivar término a término y obtenemos

$$p'(0) = \mathrm{E}\, X \;\; p''(0) = \mathrm{E}\, X^2 \text{ y en general } p^{(n)}(0) = \mathrm{E}\, X^n.$$

Es por esta última propiedad que esta función se conoce como *función generatriz de momentos* (f.g.m.).

Ejemplos 3.8

1. Si $X \sim$Bin(n, p) entonces $p(t) = (p\mathrm{e}^t + 1 - p)^n)$

Un cálculo directo permite ver que

$$p(t) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{e}^{jt} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = (p\mathrm{e}^t + 1 - p)^n,$$

que es el resultado que se obtiene al reemplazar t por e^t en el ejemplo 2.

2. Si $X \sim \exp(\lambda)$, es decir, si $\mathbf{P}(X \leq x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$, para $x \geq 0$, entonces $p(t) = 1/\lambda - t$.

   El resultado se obtiene a partir del cálculo

   $$p(t) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{e}^{tx} \mathrm{d}x = \left.\frac{\mathrm{e}^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda}\right|_0^\infty = \frac{1}{t-\lambda}.$$

   Observamos que en este caso, $p(t)$ no está definida si $t \geq \lambda$.

3. Si $X \sim \mathrm{N}(0,1)$, es decir, si $\mathbf{P}(X \leq x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-x^2/2} \mathrm{d}x$, entonces $p(t) = \mathrm{e}^{t^2/2}$

   Calculemos

   $$p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{tx}\, \mathrm{e}^{-x^2/2} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}\, \mathrm{e}^{t^2/2} \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{t^2/2}$$

   ya que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} \mathrm{d}x = 1$ puesto que el integrando es la densidad de una variable aleatoria con distribución $\mathrm{N}(t,1)$

Observación 3.5 Por la forma en que hemos definido la función genetratriz de momentos, cuando las f.g.m. de dos variables aleatorias X_1, X_2 coinciden para todos los valores de t en un entorno de $t = 0$, entonces las distribuciones de probabilidad de X_1 y X_2 deben ser idénticas.

Vamos a aprovechar la función generatriz de momentos para dar una demostración del célebre *Teorema Central del Límite* para sumas de variables aleatorias *i.i.d* con segundo momento finito. En realidad el resultado anterior se cumple bajo condiciones más generales, y la demostración no es muy diferente de la que presentaremos aquí.

Teorema 3.4 *Dada una sucesión de variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots$,independientes, idénticamente distribuidas, con media μ y varianza σ^2 finitas, para las cuales existe la f.g.m, definimos para cualquier entero n: $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Entonces, $\dfrac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ converge en distribución a una variable aleatoria con distribución normal típica.*

Llamemos $S_n^* = \dfrac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$, y observemos que para a y b constantes cualesquiera, se cumple que $p_{a+bX} = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{t(a+bX)}) = \mathrm{e}^{ta} p_X(bt)$ de modo que

$$p_{S_n^*}(t) = p_{S_n}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \exp\left\{-\frac{t\mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right\} = \exp\left\{-\frac{t\mu\sqrt{n}}{\sigma}\right\} \left(p_X(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})\right)^n$$

$$= \exp\left\{n \log p_x(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}) - \frac{t\mu\sqrt{n}}{\sigma}\right\}.$$

Para finalizar la demostración del teorema lo único que queda es verificar que para cualquier p_X suficientemente regular

$$\exp\left\{n \log p_x(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})\right\} \rightarrow_{n\to\infty} \frac{t^2}{2},$$

es decir, que la sucesión de funciones generatrices converge a la función generatriz de una variable aleatoria con distribución N(0,1) (ver ejemplo 3).

Llamemos $x = 1/\sqrt{n}$, de manera que cuando $n \to \infty$, $x \to 0$. Con este cambio de variables, usamos la regla de L'Hôpital, para calcular

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(p_X\left(\frac{tx}{\sigma}\right)\right) - \frac{t\mu x}{\sigma}}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{p'_X(tx/\sigma)t}{p_x(tx/\sigma)\sigma} - \frac{t\mu}{\sigma}}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2} \frac{p''_X(tx/\sigma)\, p_X(tx/\sigma) - (p'_X(tx/\sigma))^2}{(p_X(tx/\sigma))^2} \\
&= \frac{t^2}{2},
\end{aligned}$$

porque $p_X(0) + 1$, $p'_X(0) = \mathrm{E}\, X = \mu$, y $p''_X(0) = \mathrm{E}\, X^2 = \sigma^2 + \mu^2$. La regularidad que le estamos exigiendo a p_X es entonces, que sea al menos 2 veces diferenciable.

Ejercicios 3.7

1. *Si* $X \sim$ Uniforme(a,b), *¿cuánto vale el momento central de orden cinco de X?*
2. *Suponga que* X *es una variable aleatoria para la cual* $\mathrm{E}\, X^2 < \infty$. *Muestre que* $\mathrm{E}\, X^2 \geq (\mathrm{E}\, X)^2$. *Muestre también que* $\mathrm{E}\, X^2 = (\mathrm{E}\, X)^2$ *sí y sólo si existe una constante* c *para la cual* $\mathbf{P}(X = c) = 1$.
3. *Suponga que* X *es una variable aleatoria con media* μ *y variancia* σ^2, *y que el momento de cuarto orden de* X *es finito. Muestre que* $\mathrm{E}(X - \mu)^4) \geq \sigma^4$.
4. *Suponga que la distribución del número de defectos en un determinado rollo de tela tiene distribución de Poisson con media 5, y para una muestra aleatoria de 125 rollos se cuenta el número de defectos en cada rollo. Determinar la probabilidad de que el promedio de defectos por rollo en la muestra sea menor que 5.5.*
