

Nombre: \_\_\_\_\_

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | T |
|   |   |   |

## Modelos Estocásticos I

### Segundo Examen Parcial

Viernes 24/10/2013, 3:30 p.m. – 5:30 p.m.

**Lea todo el examen detenidamente antes de comenzar a responderlo. Justifique sus respuestas con el mayor rigor matemático posible y cite los resultados del curso que utilice.**

La evaluación de este examen se basará no tanto en la cantidad de problemas resueltos, como en la claridad de los argumentos, la aplicación correcta de definiciones, propiedades y métodos y en la redacción de soluciones.

1. a) Considere una cadena de Markov con espacio de estados  $\mathcal{E}$  y sean  $i, j \in \mathcal{E}$ . Llamemos  $N(j)$  el número de visitas que hace la cadena al estado  $j$ . Demuestre que si  $j$  es un estado transitorio,  $P(N(j) < \infty) = 1$  y

$$E_i(N(j)) = \frac{\rho_{ij}}{1 - \rho_{jj}}$$

- b) Considere una cadena de Markov con espacio de estados  $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Haga una gráfica de transiciones para la cadena y a partir de ella determine las clases de comunicación de la cadena. Determine cuáles clases corresponden a estados recurrentes y cuáles a estados transitorios. En cada caso indique claramente el criterio que usó para hacer la clasificación.

2. a) Defina, con claridad y precisión, los siguientes conceptos para una cadena de Markov: Conjunto irreducible de estados, conjunto cerrado de estados, estado transitorio y estado recurrente.
- b) Sea  $N$  el número de veces que hace falta lanzar una moneda al aire hasta obtener Sol dos veces consecutivas. Halle una cadena de Markov que sirva de modelo a esta situación. Halle el valor esperado del número de lanzamientos necesarios para obtener Sol dos veces consecutivas.