1	2	3	T

Nombre: ____

Modelos Estocásticos I

Tercer Examen Parcial

Viernes 15/11/2013, 3:30 p.m. – 5:30 p.m.

Lea todo el examen detenidamente antes de comenzar a responderlo. Justifique sus respuestas con el mayor rigor matemático posible y cite los resultados del curso que utilice.

La evaluación de este examen se basará en la claridad de los argumentos, la aplicación correcta de definiciones, propiedades y métodos y en la redacción de soluciones.

Responda 2 de las siguientes preguntas.

1. Considere un paseo al azar simple $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ para $n \geq 0$ que inicia en 0: $S_0 = 0$, donde $P(X_i = 1) = p = 1 - P(X_i = -1)$, para $i \geq 1$. Denotamos por R_n el rango de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$, es decir, el número (aleatorio) de valores distintos que hay en el vector $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$.

   a) Demuestre que
   $$R_n = 1 + \sup_{k=0,\ldots,n} S_k - \inf_{k=0,\ldots,n} S_k.$$

   b) Demuestre que para todo $k \geq 1$, $R_k - R_{k-1}$ es una variable de Bernoulli y que
   $$P(R_k - R_{k-1} = 1) = P(S_k - S_0 \neq 0, S_k - S_1 \neq 0, \ldots, S_k - S_{k-1} \neq 0).$$

   c) Demuestre que para todo $k \geq 1$,
   $$P(R_k - R_{k-1} = 1) = P(X_1 \neq 0, X_1 + X_2 \neq 0, \ldots, X_1 + \cdots + X_k \neq 0).$$

   d) Demuestre que
   $$\mathrm{E}(R_n) = \sum_{k=0}^{n} P(T_0 > k), \qquad n \in \mathbb{N}$$
   donde $T_0 = \text{ínf}\{n \geq 1 : S_n = 0\}$. Puede usar las siguientes relaciones: $R_n = R_0 + \sum_{k=1}^{4}(R_k - R_{k-1})$, $P(T_0 = \infty) = \text{lím}_{n\to\infty} P(T_0 \geq k)$.

   e) Usando el resultado del inciso anterior, demuestre que
   $$P(T_0 = \infty) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\mathrm{E}(R_n).$$

2. Considere una población en la cual cada individuo tiene una cantidad aleatoria de descendientes ξ con función de probabilidad

$$P(\xi = 0) = c, \qquad P(\xi = 1) = b, \qquad P(\xi = 2) = a$$

con $a + b + c = 1$

a) Calcule la función generadora de probabilidad $\phi(s)$ de ξ para $s \in [-1, 1]$.

b) Calcule la probabilidad de que la población se haya extinguido para el instante 2, si comienza con un individuo en el instante 0.

c) Calcule la probabilidad de que la población se haya extinguido para el instante 2, si comienza con dos individuos en el instante 0.

d) Muestre que cuando $0 < c \leq a$ la probabilidad de que la población se extinga en algún momento si comienza con dos individuos es $(c/a)^2$. ¿Cuánto vale esta probabilidad si $0 < a < c$?

3. Un ratón se mueve en un laberinto con cuatro compartimientos que se conectan según se muestra en la figura. En cada etapa, el ratón selecciona al azar y con igual probabilidad uno de los compartimientos a los cuales puede acceder y se mueve a él.

a) Modele el comportamiento del ratón con una cadena de Markov $X_n, n \geq 1$ en $\{1, 2, 3, 4\}$ y halle la matriz de transición.

b) Halle la distribución estacionaria de esta cadena.

c) A largo plazo (para n grande), ¿cuál es la probabilidad de que el ratón esté en el compartimiento 4?

d) En promedio, ¿cuánto tiempo tarda el ratón en regresar al compartimiento 4?