

# Modelos Estocásticos I

## Problemas 6

Los problemas 1 y 2 son para entregar el miércoles 25/09/13

1. Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución binomial negativa de parámetros  $(r, p)$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $0 < p < 1$ .  
(a) Use la relación entre la binomial negativa y la geométrica para obtener un algoritmo que simule valores de  $X$ . (b) Verifique la relación

$$p_X(j+1) = \frac{j(1-p)}{j+1-r} p_X(j)$$

y úsela para obtener un segundo algoritmo para generar valores de  $X$ . (c) Use la interpretación de la binomial negativa como el número de ensayos necesarios para obtener un total de  $r$  éxitos en una sucesión de ensayos de Bernoulli con probabilidad  $p$  de éxito, para obtener otro algoritmo para generar valores de  $X$ .

2. La densidad de una variable con distribución triangular está dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ x & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x & 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & x > 2. \end{cases}$$

Describa dos métodos para generar valores a partir de esta distribución.

3. Describa un algoritmo eficiente para simular una v.a.  $X$  con función de probabilidad

$$P(X=1) = 0.2; \quad P(X=2) = 0.25; \quad P(X=3) = 0.4; \quad P(X=4) = 0.15.$$

4. Describa dos métodos para generar valores de una variable aleatoria  $X$  tal que

$$P(X=i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^i / i!}{\sum_{j=0}^k e^{-\lambda} \lambda^j / j!}, \quad i = 0, \dots, k.$$

5. Describa un método para generar valores de una variable aleatoria con densidad  $f(x) = e^x / (e-1)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .
6. Use el método de la transformada inversa para generar una variable aleatoria con función de distribución  $F(x) = (x^2 + x)/2$ ,  $0 \leq x \leq 1$
7. Use el método de la transformada inversa para generar una variable aleatoria con función de distribución Beta de densidad  $f(x) = 6x(1-x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$
8. Describa cómo se puede generar valores de una variable aleatoria con la distribución Beta del ejemplo anterior, usando el método de rechazo.
9. Describa un método para generar valores de una variable aleatoria con función de distribución  $F(x) = 1 - \exp(-\alpha x^\beta)$ , para  $0 < x < \infty$ .
10. Describa un método para generar valores de una variable aleatoria con densidad  $f(x) = e^{-2|x|}$  para  $x \in \mathbb{R}$ .
11. Si  $X$  es una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ , halle la distribución de la parte entera de  $X$ ,  $Y = [X]$ . Use este resultado para explicar el método de generación de variables geométricas que vimos en clase.
12. Use el método de la transformada inversa para generar valores de una variable aleatoria con distribución Gumbel:

$$F(x) = \exp\{\exp(-(x-\mu)/\theta)\}$$

13. Use el método de la transformada inversa para generar valores de una variable aleatoria con distribución Pareto:

$$F(x) = 1 - x^{-\alpha}, \quad x \geq 1.$$

14. Describa cómo se puede simular una variable aleatoria con distribución logística de densidad

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}, \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

usando el método de rechazo basado en la distribución exponencial de parámetro 1.