# Probabilidad

## Lista de Problemas 4

Los cuatro primeros problemas son para entregar el martes 5/9/17.

**Por favor, entrega por separado los problemas pares y los impares.**

1. Un vendedor de periódicos compra cada periódico por 1.50 y lo vende por 2.50. Los que no vende los regresa al distribuidor y recibe 1.25 por ellos. Supongamos que la distribución de la demanda $D$ es

$$P(D = k) = \frac{e^{-10}10^k}{k!}$$

Describa la variable aleatoria X que representa su ganancia diaria si compra 10 periódicos cada día y halle su valor esperado.

2. Se capturan $a$ miembros de una población de $N$ animales y luego de marcarlos se liberan. Los animales luego son recapturados uno a uno hasta obtener $m \leq a$ animales marcados. Sea $X$ el número de animales capturados hasta obtener $m$ marcados, demuestre que la distribución de esta variable aleatoria está dada por

$$P(X = n) = \frac{a}{N}\binom{a-1}{m-1}\binom{N-a}{n-m}\binom{N-1}{n-1}^{-1}$$

Esta se conoce como la distribución hipergeométrica negativa.

3. Sea $X$ una variable aleatoria discreta con distribución de Poisson de parámetro $\lambda$. Demuestre que la probabilidad de que $X$ sea par es $e^{-\lambda}\cosh\lambda$. ¿Cuánto vale la probabilidad de que $X$ sea impar?

4. Dé un método para generar una variable aleatoria tal que $P(X = i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i/i!}{\sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda}\lambda^i/i!}, \qquad i = 0, \ldots, k.$

5. Para determinar la efectividad de una nueva vacuna contra la gripe se vacunan 10 personas que son observadas por un período de un año. De ellas, 8 no tuvieron gripe durante este lapso. Si se sabe que la probabilidad de no tener gripe en un período de un año es 0.5 ¿cuál es la probabilidad de que 8 o más personas del grupo no hayan sufrido la enfermedad si la vacuna no es efectiva?

6. Considere un cierto defecto en el metabolismo que ocurre en aproximadamente 1 de cada 100 nacimientos. Si cuatro niños nacen en cierto hospital el mismo día, calcule la probabilidad de que a) ninguno tenga el defecto. b) no mas de uno tenga el defecto.

7. El número de carros que cruzan un puente durante un período fijo de tiempo es una variable aleatoria con distribución de Poisson. Si la probabilidad de que ningún carro cruce el puente en este período es 1/4, halle una expresión para la probabilidad de que al menos dos carros lo crucen.

8. Un amigo te propone el siguiente juego: Lanzan una moneda hasta que salga sol. Si el número de lanzamientos es par, tú ganas, si es impar, pierdes. ¿Jugarías este juego?

9. Dos jugadores $A$ y $B$ llevan a cabo una serie de juegos de manera independiente. La probabilidad de que $A$ gane es $p$, la de $B$ es $q$ y la probabilidad de un empate es $1 - p - q$. La serie termina una vez que alguno de los dos gana una partida. Este es un formato común para eliminatorias de 'muerte súbita'. a) ¿Cuál es la probabilidad de que $A$ gane en el $n$-ésimo juego? b) ¿Cuál es la probabilidad de que $A$ gane la serie? c) ¿Cuál es la probabilidad de que la serie dure $n$ partidas?

10. Lanzamos un dado repetidamente hasta obtener un seis. Sea $A_n$ el evento que ocurre si el primer seis aparece en el $n$-ésimo lanzamiento y $B$ el evento que el número de lanzamientos requeridos sea par. Hallar $P(B)$ y $P(A_n|B)$.

11. Sea $X \sim b(n,p)$. Demuestre que $(P(X = k))^2 \geq P(X = k+1)P(X = k-1)$ para todo $k$.

12. Sea $X \sim b(n,p)$ y $Y \sim b(n, 1-p)$, demuestre que $P(X = k) = P(Y = n-k)$. De una interpretación para este resultado.

13. Una fábrica recibe un lote de componentes y los prueba para verificar su funcionamiento. Por cada 100 componentes se prueban 10 y se acepta el lote si a lo sumo un componente falla. ¿Cuál es la probabilidad de aceptar un lote de tamaño 100 que contiene 7 defectuosos?

14. En una sucesión de ensayos de Bernoulli ¿Cuál es la probabilidad de que el primer éxito ocurra luego del quinto ensayo dado que no ha ocurrido en los dos primeros ensayos?

15. Sea $X$ una variable con distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 0.3$. Calcule $P(X = 0), P(X = 1)$ y $P(X > 1)$.

16. En promedio 1 persona en 1,000 tiene un tipo particular de sangre. (a) Hallar la probabilidad de que en una ciudad de 10,000 personas ninguna tenga este tipo de sangre. (b) ¿Cuántas personas hay que examinar para tener una probabilidad mayor a $1/2$ de encontrar al menos una persona con este tipo de sangre.

17. Considere la distribución de Poisson con parámetro $\lambda$. Demuestre que el resultado más probable es el entero $k$ tal que $\lambda - 1 \leq k \leq \lambda$. ¿Bajo qué condiciones hay dos valores más probables?

18. Suponga que la probabilidad de haya un accidente importante en una planta eléctrica es de 0.005 en un año. Si un país tiene 100 plantas de este tipo, ¿cuál es la probabilidad de que haya al menos un accidente en un año?

19. Una linea aérea ha determinado que 4 % de los pasajeros que reservan pasajes en una ruta dada no se aparecen al momento del vuelo. En consecuencia han adoptado la política de vender 100 pasajes en un avión que sólo tiene 98 asientos. Si para un vuelo dado hay 100 asientos reservados, halle la probabilidad de que todos los pasajeros que se presentan tengan un asiento disponible.

20. Sea $X$ una variable aleatoria con distribución uniforme en $1 \leq k \leq m$ ¿Cuánto vale $P(X = k|a \leq X \leq b)$? En particular halle $P(X > n + k|X > n)$.

21. Si $X$ es una variable aleatoria discreta con distribución geométrica de parámetro $p$, demuestre que $P(X > k) = (1-p)^k$.

22. Sea $X$ una variable aleatoria con distribución geométrica de parámetro $p$. Sea $M$ un entero positivo y definimos $Y = \begin{cases} X & \text{si } X < M, \\ M & \text{si } X \geq M, \end{cases}$ es decir, $Y = \min(X, M)$. Calcule la función de probabilidad de $Y$.

23. Sea $X$ una variable aleatoria con distribución geométrica de parámetro $p$. Calcule la función de probabilidad de $X^2$.

24. Una caja contiene $k$ bolas numeradas del 1 a $k$. Seleccionamos una muestra aleatoria de tamaño $n$ sin reposición. Sea $Y$ el mayor de los números obtenidos y $Z$ el menor. (a) Calcule $P(Y \leq y)$. (b) Calcule $P(Z \geq z)$.

25. El fabricante de monedas del rey entrega las monedas que manufactura en cajas de 500 monedas y coloca una moneda falsa en cada caja. El rey tiene por costumbre revisar 1 moneda seleccionada al azar en cada caja y revisa 500 cajas cada vez. ¿Cuál es la probabilidad de que encuentre al menos una moneda falsa? ¿Cuál sería si revisa dos monedas de cada caja?

26. Tienes un juego de cuatro dados especiales. El primero tiene dos lados con 0 y cuatro lados con 4. El segundo tiene 3 en todos los lados. El tercero tiene cuatro lados iguales a 2 y 6 en los dos lados restantes. El cuarto tiene 1 en tres lados y 5 en los otros tres. Para el juego entre dos personas una escoge el dado que quiere y luego la otra hace lo mismo con los tres restantes. Ambos lanzan su dado y el que saque el mayor resultado gana. Demuestre que no importa cuál dado escoja la primera persona, la segunda siempre puede escoger de modo de tener probabilidad $2/3$ de ganar.

27. Escriba un programa de computación que tenga como entrada la función de probabilidad $p_i, i = 1, \dots n$ y como resultado produzca un valor de la variable con esta función de probabilidad y valores en $\{1, 2, \dots, n\}$.

28. Considere la distribución binomial negativa con parámetros $p$ y $k$. Verifique la relación $P(X = j+1) = \frac{j(1-p)}{j+1-k} P(X = j)$. Use esta relación para dar un nuevo algoritmo para generar esta distribución.

29. Dé un método para generar una variable aleatoria con función de densidad $f(x) = \frac{e^x}{e-1}, \qquad 0 \leq x \leq 1$.

30. Dé un método para generar una variable aleatoria con función de densidad $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2}, & \text{si } 2 \leq x \leq 3, \\ \frac{2-x/3}{2}, & \text{si } 3 \leq x \leq 6. \end{cases}$

31. Use el método de la transformada inversa para generar una variable aleatoria con función de distribución $F(x) = \frac{x^2+x}{2}, \qquad 0 \leq x \leq 1$.