

## Procesos de Poisson

### 3.1. Funciones Generadoras de Probabilidad y Sumas Aleatorias

#### 3.1.1. Sumas Aleatorias

Con frecuencia encontramos sumas de la forma  $T = X_1 + \cdots + X_N$ , donde el número de sumandos es una variable aleatoria.

##### Ejemplos 3.1

- Colas:  $N$  representa el número de clientes,  $X_i$  es el tiempo de atención de cada cliente,  $T$  es el tiempo total de atención.
- Seguros:  $N$  representa el número de reclamos en un período de tiempo dado,  $X_i$  es el monto de cada reclamo y  $T$  es el monto total de los reclamos en el período.
- Población:  $N$  representa el número de plantas,  $X_i$  es el número de semillas de cada planta,  $T$  es el total de semillas.
- Biometría:  $N$  es el tamaño de la población,  $X_i$  es el peso de cada ejemplar y  $T$  representa el peso total de la muestra.

Consideremos una sucesión  $X_1, X_2, \dots$  de v.a.i.i.d. y sea  $N$  una v.a. discreta, independiente de  $X_1, X_2, \dots$  con densidad  $p_N(n) = P(N = n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Definimos la suma aleatoria  $T$  como

$$T = \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0, \\ X_1 + \cdots + X_N & \text{si } N > 0. \end{cases}$$

#### Momentos de una Suma Aleatoria

Supongamos que  $X_k$  y  $N$  tienen momentos finitos

$$\begin{aligned} E[X_k] &= \mu, & \text{Var}[X_k] &= \sigma^2, \\ E[N] &= \nu, & \text{Var}[N] &= \tau^2. \end{aligned}$$

y queremos determinar media y varianza de  $T = X_1 + \cdots + X_N$ . Veamos que

$$E[T] = \mu\nu, \quad \text{Var}[T] = \nu\sigma^2 + \mu^2\tau^2.$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
 E[T] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[T|N = n]p_N(n) = \sum_{n=0}^{\infty} E[X_1 + \cdots + X_N|N = n]p_N(n) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} E[X_1 + \cdots + X_n|N = n]p_N(n) = \sum_{n=0}^{\infty} E[X_1 + \cdots + X_n]p_N(n) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} n\mu p_N(n) = \mu\nu.
 \end{aligned}$$

Para determinar la varianza comenzamos por

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[T] &= E[(T - \mu\nu)^2] = E[(T - N\mu + N\mu - \nu\mu)^2] \\
 &= E[(T - N\mu)^2] + E[\mu^2(N - \nu)^2] + 2E[\mu(T - N\mu)(N - \nu)].
 \end{aligned}$$

Calculemos cada uno de estos sumandos por separado, el primero es

$$\begin{aligned}
 E[(T - N\mu)^2] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[(T - N\mu)^2|N = n]p_N(n) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} E[(X_1 + \cdots + X_n - n\mu)^2|N = n]p_N(n) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} E[(X_1 + \cdots + X_n - n\mu)^2]p_N(n) \\
 &= \sigma^2 \sum_{n=1}^{\infty} np_N(n) = \nu\sigma^2.
 \end{aligned}$$

Para el segundo tenemos

$$E[\mu^2(N - \nu)^2] = \mu^2 E[(N - \nu)^2] = \mu^2\tau^2$$

y finalmente el tercero es

$$\begin{aligned}
 E[\mu(T - N\mu)(N - \mu)] &= \mu \sum_{n=0}^{\infty} E[(T - n\mu)(n - \nu)|N = n]p_N(n) \\
 &= \mu \sum_{n=0}^{\infty} (n - \nu) E[(T - n\mu)|N = n]p_N(n) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

La suma de estos tres términos demuestra el resultado.

### Distribución de una Suma Aleatoria

Supongamos que los sumandos  $X_1, X_2, \dots$  son v.a.i. continuas con densidad de probabilidad  $f(x)$ . Para  $n \geq 1$  fijo, la densidad de la suma  $X_1 + \cdots + X_n$  es la  $n$ -ésima convolución de la densidad  $f(x)$ , que denotaremos por  $f^{(n)}(x)$  y definimos recursivamente por

$$\begin{aligned}
 f^{(1)}(x) &= f(x), \\
 f^{(n)}(x) &= \int f^{(n-1)}(x - u)f(u) du \quad \text{para } n > 1.
 \end{aligned}$$

Como  $N$  y  $X_1, X_2, \dots$  son independientes,  $f^{(n)}(x)$  es también la densidad condicional de  $T = X_1 + \cdots + X_N$  dado que  $N = n \geq 1$ .

### 3.1. FUNCIONES GENERADORAS DE PROBABILIDAD Y SUMAS ALEATORIAS 3

Supongamos que  $P(N = 0) = 0$ , es decir, que la suma aleatoria siempre tiene al menos un sumando. Por la ley de la probabilidad total,  $T$  es continua y tiene densidad marginal

$$f_T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x)p_N(n).$$

**Observación 3.1** Si  $N$  puede valer 0 con probabilidad positiva entonces  $T = X_1 + \dots + X_N$  es una v.a. mixta, es decir, tiene componentes discreta y continua. Si suponemos que  $X_1, X_2, \dots$  son continuas con densidad  $f(x)$ , entonces

$$P(T = 0) = P(N = 0) = p_N(0)$$

mientras que para  $0 < a < b$  ó  $a < b < 0$ ,

$$P(a < T < b) = \int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x)p_N(n) \right) dx$$

▲

#### Ejemplo 3.2 (Suma Geométrica de Variables Exponenciales)

Supongamos que

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{para } x \geq 0, \\ 0 & \text{para } x < 0. \end{cases}$$

$$p_N(n) = \beta(1 - \beta)^{n-1} \quad n = 1, 2, \dots$$

Comenzamos por hallar la convolución de las densidades exponenciales

$$\begin{aligned} f^{(2)}(x) &= \int f(x-u)f(u) du = \int \mathbf{1}_{\{x-u \geq 0\}}(u) \lambda e^{-\lambda(x-u)} \mathbf{1}_{\{u \geq 0\}}(u) \lambda e^{-\lambda u} du \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda x} \int_0^x du = x \lambda^2 e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

para  $x \geq 0$ . La siguiente convolución es

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= \int f^{(2)}(x-u)f(u) du = \int \mathbf{1}_{\{x-u \geq 0\}}(u) \lambda^2 (x-u) e^{-\lambda(x-u)} \mathbf{1}_{\{u \geq 0\}}(u) \lambda e^{-\lambda u} du \\ &= \lambda^3 e^{-\lambda x} \int_0^x (x-u) du = \frac{x^2}{2} \lambda^3 e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

para  $x \geq 0$ . Procediendo inductivamente obtenemos que

$$f^{(n)}(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \lambda^n e^{-\lambda x}$$

La densidad de  $T = X_1 + \dots + X_N$  es

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(t)p_N(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} \beta(1 - \beta)^{n-1} \\ &= \lambda \beta e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda(1 - \beta)t)^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda \beta e^{-\lambda t} e^{\lambda(1-\beta)t} \\ &= \lambda \beta e^{-\lambda \beta t} \end{aligned}$$

para  $t \geq 0$ , y por lo tanto  $T \sim \text{Exp}(\lambda\beta)$ .

▲

### 3.1.2. Funciones Generadoras de Probabilidad

Consideremos una v.a.  $\xi$  con valores enteros positivos y distribución de probabilidad

$$P(\xi = k) = p_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

La función generadora de probabilidad (f.g.p.)  $\phi(s)$  asociada a la v.a.  $\xi$  (o equivalentemente a su distribución  $(p_k)_{k \geq 0}$ ) se define por

$$\phi(s) = E[s^\xi] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k, \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (3.1)$$

A partir de la definición es inmediato que si  $\phi$  es una f.g.p. entonces

$$\phi(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

#### Resultados Fundamentales:

1. La relación entre funciones de probabilidad y funciones generadoras es 1-1. Es posible obtener las probabilidades  $(p_k)$  a partir de  $\phi$  usando la siguiente fórmula

$$p_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k \phi(s)}{ds^k} \right|_{s=0}. \quad (3.2)$$

Por ejemplo,

$$\phi(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots \Rightarrow p_0 = \phi(0)$$

$$\frac{d\phi(s)}{ds} = p_1 + 2p_2 s + 3p_3 s^2 + \dots \Rightarrow p_1 = \left. \frac{d\phi(s)}{ds} \right|_{s=0}$$

2. Si  $\xi_1, \dots, \xi_n$  son v.a.i. con funciones generadoras  $\phi_1(s), \phi_2(s), \dots, \phi_n(s)$  respectivamente, la f. g. p. de su suma  $X = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$  es el producto de las funciones generadoras respectivas

$$\phi_X(s) = \phi_1(s)\phi_2(s) \cdots \phi_n(s). \quad (3.3)$$

3. Los momentos de una variable que toma valores en los enteros no-negativos se pueden obtener derivando la función generadora:

$$\frac{d\phi(s)}{ds} = p_1 + 2p_2 s + 3p_3 s^2 + \dots,$$

y al evaluar en  $s = 1$  obtenemos

$$\left. \frac{d\phi(s)}{ds} \right|_{s=1} = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = E[\xi]. \quad (3.4)$$

Para la segunda derivada tenemos

$$\frac{d^2\phi(s)}{ds^2} = 2p_2 + 3 \cdot 2p_3 s + 4 \cdot 3p_4 s^2 + \dots,$$

evaluando en  $s = 1$ ,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 \phi(s)}{ds^2} \right|_{s=1} &= 2p_2 + 3 \cdot 2p_3 + 4 \cdot 3p_4 \cdots \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k \\ &= E[\xi(\xi-1)] = E[\xi^2] - E[\xi] \end{aligned} \quad (3.5)$$

de modo que

$$E[\xi^2] = \left. \frac{d^2 \phi(s)}{ds^2} \right|_{s=1} + E[\xi] = \left. \frac{d^2 \phi(s)}{ds^2} \right|_{s=1} + \left. \frac{d\phi(s)}{ds} \right|_{s=1},$$

y en consecuencia

$$\text{Var}[\xi] = E[\xi^2] - (E[\xi])^2 = \left. \frac{d^2 \phi(s)}{ds^2} \right|_{s=1} + \left. \frac{d\phi(s)}{ds} \right|_{s=1} - \left( \left. \frac{d\phi(s)}{ds} \right|_{s=1} \right)^2.$$

### Ejemplo 3.3

Supongamos que  $\xi \sim \mathcal{Pois}(\lambda)$ :

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Su función generadora de probabilidad es

$$\begin{aligned} \phi(s) = E[s^\xi] &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda s} \\ &= e^{-\lambda(1-s)}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\left. \frac{d\phi(s)}{ds} \right|_{s=1} = \lambda e^{-\lambda(1-s)}, \quad \left. \frac{d\phi(s)}{ds} \right|_{s=1} = \lambda \quad (3.6)$$

$$\left. \frac{d^2 \phi(s)}{ds^2} \right|_{s=1} = \lambda^2 e^{-\lambda(1-s)}, \quad \left. \frac{d^2 \phi(s)}{ds^2} \right|_{s=1} = \lambda^2 \quad (3.7)$$

y obtenemos

$$E[\xi] = \lambda, \quad \text{Var}(\xi) = \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2 = \lambda.$$

▲

### 3.1.3. Funciones Generadoras de Probabilidad y Sumas de V. A. I.

Sean  $\xi, \eta$  v.a.i. con valores  $0, 1, 2, \dots$  y con funciones generadoras de probabilidad

$$\phi_\xi(s) = E[s^\xi], \quad \phi_\eta(s) = E[s^\eta], \quad |s| < 1,$$

entonces la f.g.p. de la suma  $\xi + \eta$  es

$$\phi_{\xi+\eta}(s) = E[s^{\xi+\eta}] = E[s^\xi s^\eta] = E[s^\xi] E[s^\eta] = \phi_\xi(s) \phi_\eta(s) \quad (3.8)$$

El recíproco también es cierto, si  $\phi_{\xi+\eta}(s) = \phi_\xi(s)\phi_\eta(s)$  entonces las variables  $\xi$  y  $\eta$  son independientes.

Como consecuencia, si  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  son v.a.i.i.d. con valores en  $\{0, 1, 2, \dots\}$  y f.g.p.  $\phi(s) = E[s^\xi]$  entonces

$$E[s^{\xi_1 + \dots + \xi_m}] = \phi^m(s) \quad (3.9)$$

¿Qué ocurre cuándo el número de sumandos es aleatorio?

**Proposición 3.1** *Sea  $N$  una v.a. con valores enteros no-negativos e independiente de  $\xi_1, \xi_2, \dots$  con f.g.p.  $g_N(s) = E[s^N]$  y consideremos la suma*

$$X = \xi_1 + \dots + \xi_N.$$

Sea  $h_X(s) = E[s^X]$  la f.g.p. de  $X$ . Entonces

$$h_X(s) = g_N(\phi(s)). \quad (3.10)$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} h_X(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) s^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} P(X = k | N = n) P(N = n) \right) s^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} P(\xi_1 + \dots + \xi_n = k | N = n) P(N = n) \right) s^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} P(\xi_1 + \dots + \xi_n = k) P(N = n) \right) s^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi_1 + \dots + \xi_n = k) s^k \right) P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \phi^n(s) P(N = n) = g_N(\phi(s)) \end{aligned}$$

■

#### Ejemplo 3.4

Sea  $N$  una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro  $\lambda$ . Dado el valor de  $N$ , realizamos  $N$  experimentos de Bernoulli con probabilidad de éxito  $p$  y llamamos  $X$  al número de éxitos. En este caso  $\xi_i$  tiene distribución de Bernoulli y su f.g.p. es

$$\phi_\xi(s) = E[s^\xi] = sp + q$$

mientras que  $N \sim \mathcal{Pois}(\lambda)$  con f.g.p.

$$g_N(s) = E[s^N] = e^{-\lambda(1-s)}$$

según vimos en el ejemplo 3.3. Por la proposición anterior obtenemos que la f.g.p. de  $X$  es

$$h_X(s) = g_N(\phi_\xi(s)) = g_N(q + sp) = \exp \left\{ -\lambda(1 - q - sp) \right\} = \exp \left\{ -\lambda p(1 - s) \right\}$$

que es la f.g.p. de una distribución de Poisson de parámetro  $\lambda p$ .

▲

## 3.2. Distribución Exponencial

**Definición 3.1** Una variable aleatoria  $T$  tiene *distribución exponencial* con parámetro  $\lambda > 0$ ,  $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ , si su función de distribución está dada por

$$F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad \text{para } t \geq 0,$$

es decir,  $P(T > t) = e^{-\lambda t}$ . Equivalentemente,  $T$  tiene densidad  $f_T(t)$  dada por

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{para } t \geq 0, \\ 0 & \text{para } t < 0. \end{cases}$$

Esta distribución tiene el siguiente valor esperado:

$$\begin{aligned} E[T] &= \int_{-\infty}^{\infty} t f_T(t) dt = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= -t e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

De manera similar podemos calcular  $E[T^2]$  integrando por partes,

$$\begin{aligned} E[T^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_T(t) dt = \int_0^{\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= -t^2 e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2t e^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

y por lo tanto, la varianza de  $T$  es

$$\text{Var}(T) = E[T^2] - (E[T])^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

### 3.2.1. Falta de Memoria

Una de las propiedades fundamentales de la distribución exponencial es la siguiente: Para  $s, t \in (0, \infty)$

$$P(T > t + s | T > t) = P(T > s).$$

Para demostrar esta propiedad usamos la definición de la probabilidad condicional

$$P(T > t + s | T > t) = \frac{P(T > t + s)}{P(T > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(T > s).$$

### 3.2.2. Mínimo de Variables Exponenciales

Sean  $S \sim \text{Exp}(\lambda)$  y  $T \sim \text{Exp}(\mu)$  variables independientes. Tenemos en primer lugar

$$\begin{aligned} P(\min(S, T) > t) &= P(S > t, T > t) \\ &= P(S > t)P(T > t) = e^{-(\lambda+\mu)t}, \end{aligned}$$

es decir,  $\min(S, T)$  tiene distribución exponencial de parámetro  $\lambda + \mu$ . El mismo cálculo muestra que para una colección de variables independientes  $T_1, \dots, T_n$  con  $T_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\begin{aligned} P(\min(T_1, \dots, T_n) > t) &= P(T_1 > t, \dots, T_n > t) \\ &= \prod_{i=1}^n P(T_i > t) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i t} = e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t} \end{aligned} \quad (3.11)$$

En consecuencia, el mínimo de varias variables independientes con distribuciones exponenciales tiene distribución exponencial con parámetro igual a la suma de los parámetros.

Veamos ahora con qué probabilidad una variable exponencial es menor que otra. Sean  $S \sim \text{Exp}(\lambda)$  y  $T \sim \text{Exp}(\mu)$  independientes, tenemos

$$\begin{aligned} P(T > S) &= \int_0^\infty P(T > s | S = s) f_S(s) ds \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} e^{-\mu s} ds = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \int_0^\infty (\lambda + \mu) e^{-(\lambda + \mu)s} ds \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \end{aligned}$$

Para varias variables, el resultado es el siguiente

$$\begin{aligned} P(T_i = \min(T_1, \dots, T_n)) &= P(T_i < T_1, \dots, T_i < T_{i-1}, T_i < T_{i+1}, \dots, T_i < T_n) \\ &= \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}. \end{aligned}$$

Para demostrar esta propiedad llamemos  $S = T_i$  y sea  $U$  el mínimo de  $T_j$ ,  $j \neq i$ . Por (3.11) sabemos que  $U$  es exponencial con parámetro  $\mu = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) - \lambda_i$ . Usando el resultado para dos variables

$$P(T_i = \min(T_1, \dots, T_n)) = P(S < U) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu} = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}.$$

Sea  $I$  el índice (aleatorio) de la menor de las variables exponenciales, hemos demostrado que

$$P(I = i) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}.$$

**Lema 3.1**  $I$  y  $V = \min(T_1, \dots, T_n)$  son independientes.

**Demostración.** Calculamos la siguiente probabilidad conjunta

$$\begin{aligned} P(I = i, V > t) &= P(T_i > t, T_j > T_i, \forall j \neq i) = \int_t^\infty P(T_j > s, \forall j \neq i) f_{T_i}(s) ds \\ &= \int_t^\infty \lambda_i e^{-\lambda_i s} \prod_{j \neq i} e^{-\lambda_j s} ds = \lambda_i \int_t^\infty e^{-s(\sum_j \lambda_j)} ds \\ &= \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} e^{-t(\sum_j \lambda_j)} = P(I = i) P(V > t). \end{aligned}$$

■

Veamos a continuación cómo se distribuye una suma de exponenciales.

**Teorema 3.1** Sean  $T_1, T_2, \dots$  v.a.i.i.d. con distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ . La suma  $\tau_n = T_1 + \dots + T_n$  tiene distribución  $\Gamma(n, \lambda)$ , es decir, la densidad está dada por

$$f_{\tau_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{para } t \geq 0$$

y 0 en otro caso.



**Demostración.** Haremos la prueba por inducción. Para  $n = 1$ ,  $\tau_1 = T_1$  tiene distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ , que concuerda con la densidad de la fórmula anterior.

Supongamos ahora que la fórmula es cierta para  $n$ . Tenemos  $\tau_{n+1} = \tau_n + T_{n+1}$  y por independencia

$$\begin{aligned} P(\tau_{n+1} \leq t) &= \int_0^t P(\tau_n + T_{n+1} \leq t | \tau_n = s) f_{\tau_n}(s) ds \\ &= \int_0^t P(T_{n+1} \leq t - s) f_{\tau_n}(s) ds \end{aligned}$$

Usamos ahora la distribución exponencial para el primer factor, la fórmula inductiva para el segundo y obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^t (1 - e^{-\lambda(t-s)}) \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} ds &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^t e^{-\lambda s} s^{n-1} ds - \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^t e^{-\lambda t} s^{n-1} ds \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \left[ \frac{1}{n} s^n e^{-\lambda s} \Big|_0^t + \int_0^t \lambda \frac{s^n}{n} e^{-\lambda s} ds - \frac{t^n}{n} e^{-\lambda t} \right] \\ &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^n}{n!} ds. \end{aligned}$$

■

Como consecuencia del teorema anterior, teniendo en cuenta que la distribución  $\Gamma(n, \lambda)$  se obtiene como suma de v.a.i.i.d. con distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ , vemos que

$$E[\tau_n] = \frac{n}{\lambda}, \quad \text{Var}(\tau_n) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

También es posible demostrar que la función de distribución de  $\tau_n$  se puede escribir de la siguiente manera:

$$P(\tau_n \leq x) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x} = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x}$$

**Observación 3.2** Tenemos los siguientes casos especiales de la distribución Gamma:  $\Gamma(1, \lambda)$  es la distribución exponencial de parámetro  $\lambda$  mientras que  $\Gamma(k, 2)$  es la distribución Ji-cuadrado con  $2k$  grados de libertad,  $\chi_{2k}^2$ . Además, si  $X \sim \Gamma(n, \lambda)$  entonces  $cX \sim \Gamma(n, \lambda/c)$ .

### 3.3. La Distribución de Poisson

**Definición 3.2** Una variable aleatoria  $X$  tiene *distribución de Poisson* de parámetro  $\lambda > 0$  si toma valores en el conjunto  $\{0, 1, 2, \dots\}$ , con probabilidad dada por

$$P(X = k) = p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

ya vimos que la función generadora de probabilidad está dada por

$$\phi_X(s) = E[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s\lambda)^k}{k!} = e^{\lambda(s-1)}.$$

A partir de esta expresión podemos obtener los momentos de la distribución:

$$E[X] = \left. \frac{d\phi}{ds} \right|_{s=1} = \left. \lambda e^{\lambda(s-1)} \right|_{s=1} = \lambda,$$

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \left. \frac{d^2\phi}{ds^2} \right|_{s=1} = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)} \Big|_{s=1} = \lambda^2, \\ E[X^2] &= E[X(X-1)] + E[X] = \lambda^2 + \lambda, \\ \text{Var}(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda. \end{aligned}$$

Si  $X \sim \mathcal{Pois}(\lambda)$  e  $Y \sim \mathcal{Pois}(\mu)$  son independientes entonces la suma tiene f.g.p.

$$\phi_{X+Y}(s) = \phi_X(s)\phi_Y(s) = e^{\lambda(s-1)}e^{\mu(s-1)} = e^{(\lambda+\mu)(s-1)}$$

y vemos que  $X+Y$  tiene distribución de Poisson con parámetro  $\lambda+\mu$ .

### 3.4. El Proceso de Poisson

**Definición 3.3** Sean  $T_1, T_2, \dots$  v.a.i.i.d. con distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ ,  $\tau_0 = 0$  y  $\tau_n = T_1 + \dots + T_n$  para  $n \geq 1$ . Definimos el *proceso de Poisson de parámetro o intensidad  $\lambda$*  por

$$N(s) = \text{máx}\{n : \tau_n \leq s\}, \quad s \geq 0.$$

Las variables  $T_n$  representan los intervalos de tiempo entre eventos sucesivos (llegadas de clientes a una cola, de llamadas a una central telefónica, de pacientes a la emergencia de un hospital, etc.) y en consecuencia  $\tau_n = T_1 + \dots + T_n$  es el instante en el que ocurre el  $n$ -ésimo evento y  $N(s)$  es el número de eventos que han ocurrido hasta el instante  $s$  (ver figura 4.1). Llamaremos *tiempos de llegada* del proceso a las variables  $\tau_n$ ,  $n \geq 1$ .

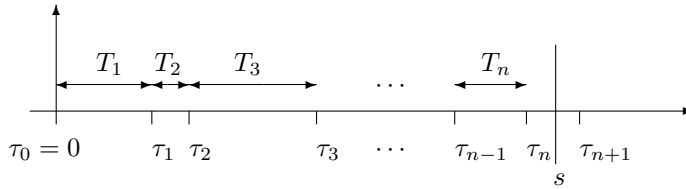


Figura 4.1

Para ver por qué  $N(s)$ ,  $s \geq 0$ , recibe este nombre, calculemos su distribución:  $N(s) = n$  si y sólo si  $\tau_n \leq s < \tau_{n+1}$ , es decir, el  $n$ -ésimo evento ocurre antes del instante  $s$  o en  $s$ , pero el  $(n+1)$ -ésimo ocurre después de  $s$ . Usando la ley de la probabilidad total, condicionando respecto al instante en el cual ocurre  $\tau_n$ , obtenemos

$$\begin{aligned} P(N(s) = n) &= P(\tau_{n+1} > s > \tau_n) = \int_0^s P(\tau_{n+1} > s | \tau_n = t) f_{\tau_n}(t) dt \\ &= \int_0^s P(T_{n+1} > s - t) f_{\tau_n}(t) dt. \end{aligned}$$

Usando ahora el resultado del teorema 3.1 obtenemos

$$\begin{aligned} &= \int_0^s \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda(s-t)} dt \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda s} \int_0^s t^{n-1} dt = \frac{(\lambda s)^n}{n!} e^{-\lambda s}. \end{aligned}$$

Por lo tanto hemos demostrado el siguiente resultado

**Lema 3.2**  $N(s)$  tiene distribución de Poisson de parámetro  $\lambda s$ .

Veamos algunas propiedades del proceso que acabamos de definir.

**Lema 3.3**  $N(t+s) - N(s)$ ,  $t \geq 0$  es un proceso de Poisson de parámetro  $\lambda$  y es independiente de  $N(r)$ ,  $0 \leq r \leq s$ .

**Demostración.** Supongamos que  $N(s) = n$  y que el  $n$ -ésimo evento ocurrió en el instante  $\tau_n$ . Sabemos que el intervalo de tiempo para el siguiente evento debe satisfacer  $T_{n+1} > s - \tau_n$ , pero por la propiedad de falta de memoria de la distribución exponencial

$$P(T_{n+1} > s - \tau_n + t | T_{n+1} > s - \tau_n) = P(T_{n+1} > t) = e^{-\lambda t}.$$

Esto muestra que la distribución del tiempo de espera hasta el primer evento después de  $s$  es exponencial de parámetro  $\lambda$  y es independiente de  $T_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Por otro lado  $T_{n+1}, T_{n+2}, \dots$  son independientes de  $T_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  y por lo tanto también de  $\tau_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Esto muestra que los intervalos entre eventos que ocurren después de  $s$  son v.a.i.i.d. con distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ , y por lo tanto  $N(t+s) - N(s)$  es un proceso de Poisson. ■

Como consecuencia de este resultado tenemos

**Lema 3.4**  $N(t)$  tiene incrementos independientes: Si  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , entonces

$$N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

son independientes.

**Demostración.** El lema 3.3 implica que  $N(t_n) - N(t_{n+1})$  es independiente de  $N(r)$ ,  $r \leq t_{n-1}$  y en consecuencia también de  $N(t_{n-1}) - N(t_{n-2}), \dots, N(t_1) - N(t_0)$ . El resultado sigue por inducción. ■

Combinando los dos lemas anteriores tenemos la mitad del siguiente resultado, que es una caracterización fundamental del proceso de Poisson.

**Teorema 3.2** Si  $\{N(s), s \geq 0\}$  es un proceso de Poisson de parámetro  $\lambda > 0$ , entonces

1.  $N(0) = 0$ .
2.  $N(t+s) - N(s) \sim \text{Pois}(\lambda t)$ .
3.  $N(t)$  tiene incrementos independientes.

Recíprocamente, si 1, 2 y 3 valen, entonces  $\{N(s), s \geq 0\}$  es un proceso de Poisson.

**Demostración.** Los lemas 3.2 y 3.3 demuestran la primera afirmación. Para ver el recíproco, sea  $\tau_n$  el instante en el cual ocurre el  $n$ -ésimo evento. El primer evento ocurre después de  $t$  si y sólo si no ocurre ningún evento en  $[0, t]$ . Usando la fórmula para la distribución de Poisson

$$P(\tau_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$$

lo cual muestra que  $\tau_1 = T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Para  $T_2 = \tau_2 - \tau_1$  observamos que

$$\begin{aligned} P(T_2 > t | T_1 = s) &= P(\text{no ocurre ningún evento en } (s, s+t] | T_1 = s) \\ &= P(N(t+s) - N(s) = 0 | N(r) = 0 \text{ para } r < s, N(s) = 1) \\ &= P(N(t+s) - N(s) = 0) = e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

por la propiedad de incrementos independientes, de modo que  $T_2 \sim \text{Exp}(\lambda)$  y es independiente de  $T_1$ . Repitiendo este argumento vemos que  $T_1, T_2, \dots$  son i.i.d. con distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ . ■

**Ejemplo 3.5**

Un cable submarino tiene defectos de acuerdo a un proceso de Poisson de parámetro  $\lambda = 0.1$  por km. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya defectos en los primeros dos kilómetros de cable? (b) Si no hay defectos en los primeros dos kilómetros, ¿cuál es la probabilidad de que tampoco los haya en el tercer kilómetro?

(a)  $N(2)$  tiene distribución de Poisson de parámetro  $(0.1)(2) = 0.2$ . Por lo tanto

$$P(N(2) = 0) = e^{-0.2} = 0.8187.$$

(b)  $N(3) - N(2)$  y  $N(2) - N(0) = N(2)$  son independientes, de modo que

$$P(N(3) - N(2) = 0 | N(2) = 0) = P(N(3) - N(2) = 0) = e^{-0.1} = 0.9048$$

▲

**Ejemplo 3.6**

Los clientes llegan a una tienda de acuerdo con un proceso de Poisson de tasa  $\lambda = 4$  por hora. Si la tienda abre a las 9 a.m. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente un cliente haya entrado antes de las 9:30 a.m. y que un total de cinco hayan entrado antes de las 11:30 a.m.?

Medimos el tiempo  $t$  en horas a partir de las 9 a.m. Queremos hallar  $P(N(1/2) = 1, N(5/2) = 5)$ , y para esto usaremos la independencia de los incrementos:

$$\begin{aligned} P(N(1/2) = 1, N(5/2) = 5) &= P(N(1/2) = 1, N(5/2) - N(1/2) = 4) \\ &= \left( \frac{e^{-4(1/2)} 4(1/2)}{1!} \right) \left( \frac{e^{-4(2)} [4(2)]^4}{4!} \right) \\ &= (2e^{-2}) \left( \frac{512}{3} e^{-8} \right) = 0.0155. \end{aligned}$$

▲

La importancia de la distribución de Poisson, y del proceso de Poisson en particular, se debe, al menos en parte, al siguiente resultado, que se conoce como la ley de los eventos raros.

Consideremos una cantidad grande  $n$  de ensayos de Bernoulli independientes con probabilidad de éxito  $p$  constante. Sea  $S_n$  el número de éxitos en los  $n$  ensayos. Sabemos que  $S_n$  tiene distribución Binomial de parámetros  $n$  y  $p$ :

$$P(S_n = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Supongamos ahora que el número de ensayos  $n$  tiende a infinito y la probabilidad de éxito  $p$  tiende a 0, de modo que  $np = \lambda$ . Veamos que ocurre con la distribución de  $S_n$  en este caso. Reemplacemos  $p$  por  $\lambda/n$  en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left( \frac{\lambda}{n} \right)^k \left( 1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \left( 1 - \frac{\lambda}{n} \right)^n \left( 1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{-k}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Veamos ahora el comportamiento de estos cuatro factores cuando  $n \rightarrow \infty$ . El primer factor no depende de  $n$ . En el segundo hay  $k$  factores en el numerador y  $k$  en el denominador y podemos escribirlo como

$$\frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n}.$$

En virtud de que  $k$  está fijo es fácil ver que todos estos factores tienden a 1, y en consecuencia su producto también. El tercer factor converge a  $e^{-\lambda}$ . Finalmente, el último converge a 1 ya que  $\lambda/n \rightarrow 0$  y la potencia  $k$  de este factor está fija. Reuniendo estos resultados vemos que la probabilidad (3.12) converge a

$$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

que es la distribución de Poisson de parámetro  $\lambda$ . El mismo resultado es cierto si en lugar de tener  $np = \lambda$  tenemos que  $p \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  de modo que  $np \rightarrow \lambda$ .

En realidad la ley de eventos raros se cumple con mayor generalidad aún. Es posible suponer que los ensayos de Bernoulli no tienen una probabilidad de éxito común, como lo muestra el siguiente teorema. Primero enunciamos y demostramos un resultado auxiliar.

**Lema 3.5** Sean  $S$  y  $T$  dos variables aleatorias y  $A$  un subconjunto medible de  $\mathbb{R}$ . Entonces

$$|P(S \in A) - P(T \in A)| \leq P(S \neq T).$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} P(S \in A) &= P(S \in A, S = T) + P(S \in A, S \neq T) = P(T \in A, S = T) + P(S \in A, S \neq T) \\ &= P(T \in A, S = T) + P(T \in A, S \neq T) - P(T \in A, S \neq T) + P(S \in A, S \neq T) \\ &= P(T \in A) - P(T \in A, S \neq T) + P(S \in A, S \neq T) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P(S \in A) - P(T \in A) = P(S \in A, S \neq T) - P(T \in A, S \neq T) \leq P(S \in A, S \neq T) \leq P(S \neq T),$$

y de manera similar

$$P(T \in A) - P(S \in A) \leq P(S \neq T),$$

de modo que

$$|P(T \in A) - P(S \in A)| \leq P(S \neq T),$$

■

**Teorema 3.3 (Le Cam)** Sean  $X_m$ ,  $1 \leq m \leq n$ , variables aleatorias independientes con

$$P(X_m = 1) = p_m, \quad P(X_m = 0) = 1 - p_m.$$

Sean

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad \lambda_n = E[S_n] = p_1 + \cdots + p_n.$$

Entonces, para cualquier conjunto  $A$ ,

$$\left| P(S_n \in A) - \sum_{k \in A} e^{-\lambda_n} \frac{\lambda_n^k}{k!} \right| \leq \sum_{m=1}^n p_m^2$$

**Demostración.** Las variables  $X_m$  son independientes y tienen distribución de Bernoulli con parámetro  $p_m$ . Definimos variables independientes  $Y_m \sim \mathcal{Pois}(p_m)$ , y como la suma de variables Poisson independientes es Poisson, tenemos que  $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$  tiene distribución  $\mathcal{Pois}(\lambda_n)$  y

$$P(Z_n \in A) = \sum_{k \in A} e^{-\lambda_n} \frac{\lambda_n^k}{k!}.$$

Por lo tanto queremos comparar  $P(S_n \in A)$  y  $P(Z_n \in A)$  para cualquier conjunto  $A$  de enteros positivos. Por el lema 3.5

$$|P(S_n \in A) - P(Z_n \in A)| \leq P(S_n \neq Z_n) = P\left(\sum_{m=1}^n X_m \neq \sum_{m=1}^n Y_m\right),$$

pero si  $S_n$  y  $Z_n$  difieren, al menos uno de los pares  $X_m$  y  $Y_m$  deben diferir también. En consecuencia

$$|P(S_n \in A) - P(Z_n \in A)| \leq \sum_{m=1}^n P(X_m \neq Y_m)$$

y para completar la demostración hay que ver que  $P(X_m \neq Y_m) \leq p_m^2$ . Para simplificar la notación sean  $X \sim \text{Ber}(p)$  y  $Y \sim \text{Pois}(p)$  y veamos que  $P(X \neq Y) \leq p^2$ , o equivalentemente, que

$$1 - p^2 \leq P(X = Y) = P(X = Y = 0) + P(X = Y = 1).$$

Este resultado no depende de la distribución conjunta entre  $X$  y  $Y$  pues no hemos supuesto ninguna propiedad de independencia entre ellas. Lo importante es que las distribuciones marginales de  $X$  y  $Y$  sigan siendo las mismas. Escogemos la distribución conjunta de  $(X, Y)$  de la siguiente manera: Sea  $U$  una variable con distribución uniforme en  $(0, 1]$  y sean

$$X = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < U \leq 1 - p \\ 1 & \text{si } 1 - p < U \leq 1. \end{cases}$$

$Y = 0$  si  $0 < U < e^{-p}$  y para  $k = 1, 2, \dots$

$$Y = k \quad \text{si} \quad \sum_{i=0}^{k-1} e^{-p} \frac{p^i}{i!} < U \leq \sum_{i=0}^k e^{-p} \frac{p^i}{i!}.$$

Es sencillo verificar que  $X$  y  $Y$  tienen las distribuciones marginales adecuadas (esto no es más que el método de la transformada inversa de generación de variables aleatorias, aplicado las distribuciones de Bernoulli y de Poisson). Como  $1 - p \leq e^{-p}$  tenemos que  $X = Y = 0$  si y sólo si  $U \leq 1 - p$ , de modo que

$$P(X = Y = 0) = 1 - p.$$

De manera similar  $X = Y = 1$  si y sólo si  $e^{-p} < U \leq (1 + p)e^{-p}$  y por lo tanto

$$P(X = Y = 1) = pe^{-p}.$$

Sumando estas dos expresiones tenemos

$$P(X = Y) = 1 - p + pe^{-p} = 1 - p^2 + \frac{p^3}{2} + \dots \geq 1 - p^2. \quad \blacksquare$$

**Corolario 3.1 (Le Cam)** Para cada  $n$ , sean  $X_{n,m}$ ,  $1 \leq m \leq n$ ,  $n \geq 1$  variables aleatorias independientes con

$$P(X_{n,m} = 1) = p_{n,m}, \quad P(X_{n,m} = 0) = 1 - p_{n,m}.$$

Sean

$$S_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,n}, \quad \lambda_n = E[S_n] = p_{n,1} + \dots + p_{n,n},$$

y  $Z_n \sim \text{Pois}(\lambda_n)$ . Entonces, para cualquier conjunto  $A$ ,

$$|P(S_n \in A) - P(Z_n \in A)| \leq \sum_{m=1}^n p_{n,m}^2$$

El teorema anterior nos da una cota para la diferencia entre la distribución de  $S_n$  y la distribución de Poisson de parámetro  $\lambda_n = E[S_n]$ , que podemos usar para obtener una versión general del teorema de aproximación de Poisson.

**Corolario 3.2** *Supongamos que en la situación del corolario anterior  $\lambda_n \rightarrow \lambda < \infty$  y  $\max_k p_{n,k} \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces*

$$\max_A |P(S_n \in A) - P(Z_n \in A)| \rightarrow 0.$$

**Demostración.** Como  $p_{n,m}^2 \leq p_{n,m}(\max_k p_{n,k})$ , sumando sobre  $m$  obtenemos

$$\sum_{m=1}^n p_{n,m}^2 \leq \max_k p_{n,k} \sum_m p_{n,m}.$$

El primer factor de la derecha va a 0 por hipótesis. El segundo es  $\lambda_n$  que converge a  $\lambda < \infty$  y en consecuencia el producto de los dos converge a 0. ■

### 3.5. Caracterizaciones del Proceso de Poisson

Consideremos una sucesión de eventos que ocurren en  $[0, \infty)$  como por ejemplo las emisiones de partículas por una sustancia radioactiva, la llegada de llamadas a una central telefónica, los accidentes que ocurren en cierto cruce carretero, la ubicación de fallas o defectos a lo largo de una fibra o las llegadas sucesivas de clientes a un establecimiento comercial. Sea  $N((a, b])$  el número de eventos que ocurren en el intervalo  $(a, b]$ , es decir, si  $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 \dots$  representan los instantes (o ubicaciones) de los sucesivos eventos, entonces  $N((a, b])$  es el número de estos instantes  $\tau_i$  que satisfacen  $a < \tau_i \leq b$ .

Supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones:

1. El número de eventos que ocurren en intervalos disjuntos son variables aleatorias independientes: Para cualquier entero  $m \geq 2$  y cualesquiera instantes  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m$ , las variables aleatorias

$$N((t_0, t_1]), N((t_1, t_2]), \dots, N((t_{m-1}, t_m])$$

son independientes.

2. Para cualquier instante  $t$  y cualquier  $h > 0$ , la distribución de probabilidad de  $N((t, t+h])$  depende sólo de la longitud del intervalo  $h$  y no del instante inicial  $t$ .
3. Hay una constante positiva  $\lambda$  para la cual la probabilidad de que ocurra al menos un evento en un intervalo de longitud  $h$  es

$$P(N((t, t+h]) \geq 1) = \lambda h + o(h), \quad \text{cuando } h \downarrow 0$$

(la notación  $o(h)$  indica una función general indeterminada que representa el resto y satisface  $o(h)/h \rightarrow 0$  cuando  $h \downarrow 0$ , es decir, que es de orden menor que  $h$  cuando  $h \downarrow 0$ ). El parámetro  $\lambda$  se conoce como la intensidad del proceso.

4. La probabilidad de que haya dos o más eventos en un intervalo de longitud  $h$  es  $o(h)$ :

$$P(N((t, t+h]) \geq 2) = o(h), \quad \text{cuando } h \downarrow 0.$$

El número de sucesos que ocurren en intervalos disjuntos son independientes por 1, y 2 afirma que la distribución de  $N((s, t])$  es la misma que la de  $N((0, t-s])$ . Por lo tanto, para describir la ley de probabilidad del sistema basta determinar la distribución de probabilidad de  $N((0, t])$  para cualquier

valor de  $t$ . Llamemos  $N((0, t]) = N(t)$ . Mostraremos que los postulados anteriores implican que  $N(t)$  tiene una distribución de Poisson:

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad \text{para } k = 0, 1, \dots \quad (3.13)$$

Para demostrar (3.13) dividimos el intervalo  $(0, t]$  en  $n$  subintervalos de igual longitud  $h = t/n$  y definimos las siguientes variables de Bernoulli:  $\xi_{n,i} = 1$  si hay al menos un evento en el intervalo  $((i-1)t/n, it/n]$  y  $\xi_{n,i} = 0$  si no, para  $1 \leq i \leq n$ .  $S_n = \xi_{n,1} + \dots + \xi_{n,n}$  representa el número de subintervalos que contienen al menos un evento y

$$p_{n,i} = P(\xi_{n,i} = 1) = \frac{\lambda t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)$$

según el postulado 3. Sea

$$E(S_n) = \mu_n = \sum_{i=1}^n p_{n,i} = \lambda t + n o\left(\frac{t}{n}\right).$$

Usando el teorema 3.3 vemos que

$$\begin{aligned} \left| P(S_n = k) - \frac{\mu_n^k e^{-\mu_n}}{k!} \right| &\leq n \left[ \frac{\lambda t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right) \right]^2 \\ &= \frac{(\lambda t)^2}{n} + 2\lambda t o\left(\frac{t}{n}\right) + n o^2\left(\frac{t}{n}\right), \end{aligned}$$

Como  $o(h) = o(t/n)$  es un término de orden menor que  $h = t/n$  para  $n$  grande, se tiene que

$$n o(t/n) = t \frac{o(t/n)}{t/n} = t \frac{o(h)}{h}$$

tiende a 0 cuando  $n$  crece. Pasando al límite cuando  $n \rightarrow \infty$  obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n = k) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}, \quad \text{con } \mu = \lambda t.$$

Para completar la demostración sólo falta ver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n = k) = P(N((0, t]) = k)$$

pero  $S_n$  y  $N((0, t])$  son diferentes si al menos uno de los subintervalos contiene dos o más eventos, y el postulado 4 impide esto porque

$$\begin{aligned} |P(N(t) = k) - P(S_n = k)| &\leq P(N(t) \neq S_n) \\ &\leq \sum_{i=1}^n P\left(N\left(\left(\frac{i-1}{n}t, \frac{it}{n}\right] \geq 2\right)\right) \\ &\leq n o\left(\frac{t}{n}\right) \\ &\rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

En consecuencia, haciendo  $n \rightarrow \infty$ ,

$$P(N((0, t]) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad \text{para } k \geq 0.$$

Esto completa la demostración de (3.13). ■



El proceso  $N((a, b])$  se conoce como el Proceso Puntual de Poisson y sus valores, como hemos visto, se pueden calcular a partir de los del proceso  $N(t)$ :

$$N((s, t]) = N(t) - N(s)$$

Recíprocamente,  $N(t) = N((0, t])$ , de modo que ambos procesos son equivalentes, las diferencias son de enfoque, pero en algunos casos resulta útil considerar al proceso de una u otra manera.

A continuación presentamos sin demostración otra caracterización de los procesos de Poisson que resultará útil más adelante.

**Teorema 3.4**  $N(t), t \geq 0$  es un proceso de Poisson con intensidad  $\lambda$  si y sólo si

- Para casi todo  $\omega$ , los saltos de  $N(t, \omega)$  son unitarios.
- Para todo  $s, t \geq 0$  se tiene que  $E(N(t+s) - N(t) | N(u), u \leq t) = \lambda s$ .

### 3.6. Distribuciones Asociadas a un Proceso de Poisson

Hemos visto que los intervalos de tiempo entre eventos sucesivos,  $T_n, n \geq 0$  son v.a.i.i.d. con distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ . Los instantes  $\tau_n$  en los cuales ocurren los eventos, son sumas de las variables anteriores, y en consecuencia tienen distribución  $\Gamma(n, \lambda)$ . Veamos que la distribución binomial también aparece en el estudio del Proceso de Poisson.

**Teorema 3.5** Sea  $N(t), t \geq 0$  un proceso de Poisson de parámetro  $\lambda > 0$ . Para  $0 < u < t$  y  $0 \leq k \leq n$ ,

$$P(N(u) = k | N(t) = n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{u}{t}\right)^k \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{n-k}, \quad (3.14)$$

Es decir, condicional a que para el instante  $t$  han ocurrido  $n$  eventos, la distribución del número de eventos que han ocurrido para el instante  $u < t$  es binomial con parámetros  $n$  y  $(u/t)$ .

**Demostración.**

$$\begin{aligned} P(N(u) = k | N(t) = n) &= \frac{P(N(u) = k, N(t) = n)}{P(N(t) = n)} \\ &= \frac{P(N(u) = k, N(t) - N(u) = n - k)}{P(N(t) = n)} \\ &= \frac{[e^{-\lambda u} (\lambda u)^k / k!] [e^{-\lambda(t-u)} (\lambda(t-u))^{n-k} / (n-k)!]}{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n / n!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{u^k (t-u)^{n-k}}{t^n}. \end{aligned}$$

■

#### Ejemplo 3.7

Recordemos que la variable  $\tau_n$  tiene distribución  $\Gamma(n, \lambda)$  y por la observación 1 sabemos que  $\lambda\tau_n/2 \sim \Gamma(n, 2) = \chi_{2n}^2$ .

Si observamos un proceso de Poisson hasta que se registre un número prefijado  $m$  de eventos, el tiempo necesario  $\tau_m$  puede usarse para construir intervalos de confianza para la intensidad  $\lambda$  del proceso, usando el hecho de que  $\lambda\tau_m/2$  tiene distribución  $\chi^2$  con  $2m$  grados de libertad. Sean  $z_{\alpha/2}$  y  $z_{1-\alpha/2}$  valores tales que si  $Z \sim \chi_{2m}^2$ , entonces  $P(Z < z_{\alpha/2}) = P(Z > z_{1-\alpha/2}) = \alpha/2$ . Tenemos

$$1 - \alpha = P(z_{\alpha/2} \leq \lambda\tau_m/2 \leq z_{1-\alpha/2}) = P\left(\frac{2z_{\alpha/2}}{\tau_m} \leq \lambda \leq \frac{2z_{1-\alpha/2}}{\tau_m}\right).$$

En consecuencia,  $(2z_{\alpha/2}/\tau_m, 2z_{1-\alpha/2}/\tau_m)$  es un intervalo de confianza para  $\lambda$  a nivel  $1 - \alpha$ .

▲

**Ejemplo 3.8**

Sean  $N$  y  $M$  dos procesos de Poisson independientes con parámetros respectivos  $\lambda$  y  $\mu$ . Sean  $n$  y  $m$  enteros,  $\tau_n$  el tiempo de espera hasta el  $n$ -ésimo evento en el proceso  $N$  y  $\gamma_m$  el tiempo de espera hasta el  $m$ -ésimo evento en el proceso  $M$ . Las variables  $\lambda\tau_n/2$  y  $\mu\gamma_m/2$  son independientes y tienen distribuciones  $\chi^2$  con  $2n$  y  $2m$  grados de libertad, respectivamente. Por lo tanto, bajo la hipótesis de que  $\lambda = \mu$ , la variable  $m\tau_n/n\gamma_m$  tiene distribución  $F$  con  $2n$  y  $2m$  grados de libertad, y podemos desarrollar una prueba de hipótesis para  $\lambda = \mu$ .  $\blacktriangle$

**3.7. Procesos de Poisson Compuestos**

Asociamos ahora una variable aleatoria  $X_i$  a cada evento de un proceso de Poisson. Suponemos que las variables  $X_i$ ,  $i \geq 1$ , son i.i.d y también son independientes del proceso. Por ejemplo, el proceso puede representar los carros que llegan a un centro comercial y las variables asociadas, el número de pasajeros que hay en cada uno de ellos; o el proceso puede representar los mensajes que llegan a un computador central para ser transmitidos via internet y las variables  $X_i$  pueden representar el tamaño de los mensajes.

Es natural considerar la suma de las variables  $X_i$  como una variable de interés:

$$S(t) = X_1 + \cdots + X_{N(t)}$$

donde ponemos  $S(t) = 0$  si  $N(t) = 0$ .

Ya hemos visto que para suma aleatorias, la media es el producto de las medias de  $N$  e  $Y$ , mientras que la varianza está dada por

$$\text{Var}(S(t)) = E[N(t)] \text{Var}(Y_i) + \text{Var}(N(t))(E[Y_i])^2.$$

En nuestro caso,  $N(t) \sim \mathcal{Pois}(\lambda t)$  y por lo tanto,  $E[N(t)] = \text{Var}(N(t)) = \lambda t$ . En consecuencia tenemos

$$E(S(t)) = \lambda t E(Y_i),$$

$$\text{Var}(S(t)) = \lambda t (\text{Var}(Y_i) + (E[Y_i])^2) = \lambda t E[Y_i^2].$$

**Ejemplo 3.9**

El número de clientes de una tienda durante el día tiene distribución de Poisson de media 30 y cada cliente gasta un promedio de \$150 con desviación típica de \$50. Por los cálculos anteriores sabemos que el ingreso medio por día es  $30 \cdot \$150 = \$4.500$ . La varianza del ingreso total es

$$30 \cdot [(\$50)^2 + (\$150)^2] = 750.000$$

Sacando la raíz cuadrada obtenemos una desviación típica de \$ 866,02.  $\blacktriangle$

**3.8. Descomposición de un Proceso de Poisson**

En la sección anterior asociamos a cada evento de un proceso de Poisson una variable aleatoria  $X_i$ , ahora vamos a usar estas variables para descomponer el proceso. Supongamos que las variables  $X_i$  toman valores enteros y sea  $N_j(t)$  el número de eventos del proceso que han ocurrido antes de  $t$  con  $X_i = j$ . Si, por ejemplo,  $X_i$  representa el número de personas en un carro que llega a un centro comercial,  $N_j(t)$  representa el número de carros que han llegado antes del instante  $t$  con exactamente  $j$  personas dentro.

Veamos inicialmente el caso más sencillo, en el cual las variables  $X_k$  son de Bernoulli:

$$P(X_k = 1) = p, \quad P(X_k = 0) = 1 - p,$$

para  $0 < p < 1$  fijo y  $k \geq 1$ . Definimos ahora dos procesos, según el valor de las variables  $X_k$  sea 0 ó 1:

$$N_1(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, \quad y \quad N_0(t) = N(t) - N_1(t).$$

Para ver que  $N_1(t)$  es un proceso de Poisson usamos el teorema 3.2: Los valores de  $N_1(t)$  sobre intervalos disjuntos son variables aleatorias independientes,  $N_1(0) = 0$  y finalmente, el ejemplo 3.4 nos dice que  $N_1(t)$  tiene distribución de Poisson con media  $\lambda pt$ . Un argumento similar muestra que  $N_0(t)$  es un proceso de Poisson con parámetro  $\lambda(1-p)$ . Lo que resulta más sorprendente es que  $N_0$  y  $N_1$  son procesos independientes. Para ver esto calculemos

$$\begin{aligned} P(N_0(t) = j, N_1(t) = k) &= P(N(t) = j+k, N_1(t) = k) \\ &= P(N_1(t) = k | N(t) = j+k) P(N(t) = j+k) \\ &= \frac{(j+k)!}{j!k!} p^k (1-p)^j \frac{(\lambda t)^{j+k} e^{-\lambda t}}{(j+k)!} \\ &= \left[ \frac{e^{-\lambda pt} (\lambda pt)^k}{k!} \right] \left[ \frac{e^{-\lambda(1-p)t} (\lambda(1-p)t)^j}{j!} \right] \\ &= P(N_1(t) = k) P(N_0(t) = j) \end{aligned}$$

para  $j, k = 0, 1, 2, \dots$

### Ejemplo 3.10

Los clientes entran a una tienda de acuerdo a un proceso de Poisson con intensidad de 10 por hora. De manera independiente, cada cliente compra algo con probabilidad  $p = 0.3$  o sale de la tienda sin comprar nada con probabilidad  $q = 1-p = 0.7$ . ¿Cuál es la probabilidad de que durante la primera hora 9 personas entren a la tienda y que tres de estas personas compren algo y las otras 6 no?

Sea  $N_1 = N_1(1)$  el número de clientes que hacen una compra durante la primera hora y  $N_0 = N_0(1)$  el número de clientes que entran pero no compran nada. Entonces  $N_0$  y  $N_1$  son v.a.i. de Poisson con parámetros respectivos  $(0.7)(10) = 7$  y  $(0.3)(10) = 3$ . Por lo tanto

$$P(N_0 = 6) = \frac{7^6 e^{-7}}{6!} = 0.149, \quad P(N_1 = 3) = \frac{3^3 e^{-3}}{3!} = 0.224.$$

y

$$P(N_0 = 6, N_1 = 3) = P(N_0 = 6)P(N_1 = 3) = (0.149)(0.224) = 0.0334.$$

▲

En el caso general las variables  $X_k$  toman valores sobre un conjunto numerable, por ejemplo sobre  $\{0, 1, 2, \dots\}$ , y el resultado correspondiente es el siguiente teorema, que no demostraremos.

**Teorema 3.6**  $N_j(t)$  son procesos de Poisson independientes con intensidad  $\lambda P(X_i = j)$ .

## 3.9. Superposición de Procesos de Poisson

La situación inversa a la descomposición de un proceso de Poisson es la superposición de procesos. Ya que un proceso de Poisson puede descomponerse en procesos de Poisson independientes, es razonable esperar que el proceso inverso, la superposición de procesos de Poisson independientes, produzca un proceso de Poisson cuya intensidad sea la suma de las intensidades.

**Teorema 3.7** Sean  $N_1(t), \dots, N_k(t)$  procesos de Poisson independientes con parámetros  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , entonces  $N_1(t) + \dots + N_k(t)$  es un proceso de Poisson con parámetro  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k$ .

**Demostración.** Haremos la demostración para el caso  $k = 2$ , el caso general se obtiene luego por inducción. Es inmediato que la suma tiene incrementos independientes y que  $N_1(0) + N_2(0) = 0$ . Para verificar

que los incrementos tienen distribución de Poisson con parámetro igual a la suma de los parámetros observamos que si  $Y = N_1(t+s) - N_1(s) \sim \mathcal{Pois}(\lambda_1 t)$  y  $Z = N_2(t+s) - N_2(s) \sim \mathcal{Pois}(\lambda_2 t)$ , entonces

$$\begin{aligned} N(t+s) - N(s) &= [N_1(t+s) - N_1(s)] + [N_2(t+s) - N_2(s)] \\ &= Y + Z \sim \mathcal{Pois}((\lambda_1 + \lambda_2)t). \end{aligned}$$

■

### Ejemplo 3.11

Consideremos dos procesos de Poisson, uno con parámetro  $\lambda$ , que representa las llegadas a la meta del equipo rojo, y otro, independiente del anterior y con parámetro  $\mu$ , que representa las llegadas del equipo verde. ¿Cuál es la probabilidad de que haya 6 llegadas rojas antes que 4 verdes?

Observamos que el evento en cuestión equivale a tener al menos 6 rojos en los primeros 9. Si esto ocurre, tenemos a lo sumo tres verdes antes de la llegada del sexto rojo. Por otro lado, si hay 5 o menos rojos en los primeros 9, entonces tendremos al menos 4 verdes.

Podemos ahora ver el problema en el marco de un proceso de Poisson general que incluye rojos y verdes, y tiene parámetro  $\lambda + \mu$ . Para cada llegada escogemos al azar el color lanzando una moneda con probabilidad  $p = \lambda/(\lambda + \mu)$  para rojo. La probabilidad que nos interesa es

$$\sum_{k=6}^9 \binom{9}{k} p^k (1-p)^{9-k}.$$

En el caso particular en el cual ambos procesos iniciales tienen la misma intensidad  $\lambda = \mu$ ,  $p = 1/2$  y la expresión anterior es

$$\frac{1}{512} \sum_{k=6}^9 \binom{9}{k} = \frac{140}{512} = 0.273.$$

▲

## 3.10. Procesos No Homogéneos

En el corolario 3.1 vimos qué ocurre si la probabilidad de cada evento individual no es homogénea. Si, en cambio, el parámetro del proceso, que representa la intensidad por unidad de tiempo con la cual ocurren los eventos, no es constante a lo largo del tiempo, tenemos un *proceso no-homogéneo*.

**Definición 3.4** Decimos que  $(N(t), t \geq 0)$  es un proceso de Poisson no homogéneo con tasa  $\lambda(s)$ ,  $s \geq 0$  si

1.  $N(0) = 0$ ,
2.  $N(t)$  tiene incrementos independientes,
3.  $N(s+t) - N(s)$  tiene distribución de Poisson con media  $\int_s^{s+t} \lambda(r) dr$ .

En este caso los intervalos de tiempo entre eventos sucesivos,  $T_n$ ,  $n \geq 1$ , ya no son independientes ni tienen distribución exponencial. Esta es la razón por la cual no usamos nuestra definición inicial para esta generalización. Veamos que esto es efectivamente cierto. Pongamos  $\mu(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$ , entonces  $N(t) \sim \mathcal{Pois}(\mu(t))$  y

$$P(T_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\mu(t)}.$$

Derivando obtenemos la densidad

$$f_{T_1}(t) = -\frac{d}{dt} P(T_1 > t) = \lambda(t) e^{-\int_0^t \lambda(s) ds} = \lambda(t) e^{-\mu(t)}$$

para  $t \geq 0$ . La relación anterior se puede generalizar de la siguiente manera

$$f_{T_1, \dots, T_n}(t_1, \dots, t_n) = \lambda(t_1)\lambda(t_1 + t_2) \cdots \lambda(t_1 + \dots + t_n)e^{-\mu(t_1 + \dots + t_n)},$$

lo cual muestra que, en general, las variables  $T_i$  no son independientes ni tienen distribución exponencial.

### Ejemplo 3.12

Los clientes llegan a una tienda de acuerdo a un proceso de Poisson no-homogéneo con intensidad

$$\lambda(t) = \begin{cases} 2t & \text{para } 0 \leq t < 1, \\ 2 & \text{para } 1 \leq t < 2, \\ 4 - t & \text{para } 2 \leq t \leq 4, \end{cases}$$

donde  $t$  se mide en horas a partir de la apertura. ¿Cuál es la probabilidad de que dos clientes lleguen durante las primeras dos horas y dos más durante las dos horas siguientes?

Como las llegadas durante intervalos disjuntos son independientes, podemos responder las dos preguntas por separado. La media para las primeras dos horas es  $\mu = \int_0^1 2t dt + \int_1^2 2 dt = 3$  y por lo tanto

$$P(N(2) = 2) = \frac{e^{-3}(3)^2}{2!} = 0.2240.$$

Para las siguientes dos horas,  $\mu = \int_2^4 (4 - t) dt = 2$  y

$$P(N(4) - N(2) = 2) = \frac{e^{-2}(2)^2}{2!} = 0.2707.$$

La probabilidad que nos piden es

$$P(N(2) = 2, N(4) - N(2) = 2) = P(N(2) = 2)P(N(4) - N(2) = 2) = 0.0606$$

▲

#### 3.10.1. Postulados para un proceso de Poisson no-homogéneo

Al igual que para el caso del proceso homogéneo, es posible demostrar que los siguientes postulados implican que el proceso de conteo  $N(t)$  es un proceso de Poisson no-homogéneo con función de intensidad  $\lambda(t)$ ,  $t \geq 0$ :

- (a)  $N(0) = 0$ .
- (b)  $\{N(t), t \geq 0\}$  tiene incrementos independientes.
- (c)  $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$ .
- (d)  $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$ .

Muestrear en el tiempo un proceso de Poisson ordinario a una tasa que depende del tiempo produce un proceso de Poisson no-homogéneo. Esto es similar a lo que vimos para la descomposición de un proceso de Poisson sólo que ahora la probabilidad de observar un evento del proceso original no es una constante  $p$  como ocurría antes, sino que depende del tiempo:  $p(t)$ .

Sea  $\{N(t), t \geq 0\}$  un proceso de Poisson con intensidad constante  $\lambda$  y supongamos que un evento que ocurre en el instante  $t$  se observa con probabilidad  $p(t)$ , independientemente de lo que haya ocurrido antes. Llamemos  $M(t)$  al proceso de los eventos que hemos logrado contar hasta el instante  $t$ , entonces  $\{M(t), t \geq 0\}$  es un proceso de Poisson no-homogéneo con función de intensidad  $\lambda(t) = \lambda p(t)$ . Podemos verificar esta afirmación comprobando que se satisfacen los axiomas anteriores.

- (a)  $M(0) = 0$ .
- (b) El número de eventos que contamos en el intervalo  $(t, t + h]$  depende únicamente de los eventos del proceso de Poisson  $N$  que ocurren en  $(t, t + h]$ , que es independiente de lo que haya ocurrido antes de  $t$ . En consecuencia el número de eventos observados en  $(t, t + h]$  es independiente del proceso de eventos observados hasta el tiempo  $t$ , y por lo tanto  $M$  tiene incrementos independientes.
- (c) Condicionando sobre  $N((t, t + h])$ :

$$\begin{aligned} P(M((t, t + h]) = 1) &= P(M((t, t + h]) = 1 | N((t, t + h]) = 1)P(N((t, t + h]) = 1) \\ &\quad + P(M((t, t + h]) = 1 | N((t, t + h]) \geq 2)P(N((t, t + h]) \geq 2) \\ &= P(M((t, t + h]) = 1 | N((t, t + h]) = 1)\lambda h + o(h) \\ &= p(t)\lambda h + o(h) \end{aligned}$$

- (d)  $P(M((t, t + h]) \geq 2) \leq P(N((t, t + h]) \geq 2) = o(h)$ .

Hay un recíproco (parcial) para este resultado: todo proceso no-homogéneo de Poisson con intensidad acotada se puede obtener a partir de un proceso homogéneo muestreado en el tiempo. Para ver esto necesitamos la siguiente proposición que enunciamos sin demostración

**Proposición 3.2** Sean  $N(t)$ ,  $t \geq 0$  y  $M(t)$ ,  $t \geq 0$  procesos de Poisson independientes no-homogéneos, con funciones de intensidad respectivas  $\alpha(t)$  y  $\beta(t)$  y sea  $S(t) = N(t) + M(t)$ . Entonces

- (a)  $\{S(t), t \geq 0\}$  es un proceso de Poisson no-homogéneo con función de intensidad  $\lambda(t) = \alpha(t) + \beta(t)$ .
- (b) Dado que un evento del proceso  $S$  ocurre en el instante  $t$  entonces, independientemente de lo que haya ocurrido antes de  $t$ , el evento en  $t$  viene del proceso  $N$  con probabilidad  $\alpha(t)/(\alpha(t) + \beta(t))$ .

**Demostración.** Ver S.M. Ross, *Introduction to Probability Models* 10th. Ed. p. 340.

Supongamos ahora que  $\{N(t), t \geq 0\}$  es un proceso de Poisson no-homogéneo con función de intensidad acotada  $\lambda(t)$  tal que  $\lambda(t) \leq \lambda$  para todo  $t$ . Sea  $\{M(t), t \geq 0\}$  otro proceso de Poisson no-homogéneo con intensidad  $\mu(t) = \lambda - \lambda(t)$  e independiente de  $N(t)$ . Por la proposición anterior tenemos que  $\{N(t), t \geq 0\}$  se puede considerar como el proceso que se obtiene a partir del proceso homogéneo  $\{N(t) + M(t), t \geq 0\}$ , donde un evento que ocurre en el tiempo  $t$  es observado con probabilidad  $p(t) = \lambda(t)/\lambda$ .

La función  $\mu(t)$  definida por

$$\mu(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$$

es continua y no decreciente y representa el valor esperado del número de eventos que ocurren en el intervalo  $[0, t]$ ,  $E(N(t)) = \mu(t)$ . Definimos su inversa generalizada  $\nu(t)$  por

$$\nu(t) = \inf\{s : \mu(s) > t\}, \quad t \geq 0.$$

Usando estas funciones tenemos el siguiente resultado

**Teorema 3.8** Sea  $N$  un proceso de Poisson no homogéneo y sea  $M(t) = N(\nu(t))$ ,  $t \geq 0$ . Entonces  $M$  es un proceso de Poisson homogéneo con intensidad 1.

**Demostración.** Fijamos  $s, t$  y ponemos  $t' = \nu(t)$ ,  $t' + s' = \nu(t + s)$ ,  $s' = \nu(t + s) - \nu(t)$ . Entonces

$$\begin{aligned} E(M(t + s) - M(t) | M(u), u \leq t) &= E(N(t' + s') - N(t') | N(u), u \leq t) \\ &= E(N(t' + s') - N(t')) = \mu(t' + s') - \mu(t') \\ &= t + s - t = s. \end{aligned}$$

Por el teorema 3.4 obtenemos el resultado. ■

Denotemos por  $\tau_n$  el instante en el cual ocurre el  $n$ -ésimo evento de un proceso no-homogéneo  $\{N(t), t \geq 0\}$ . Entonces

$$\begin{aligned} P(t < \tau_n < t + h) &= P(N(t) = n - 1, \text{ y al menos un evento ocurre en } (t, t + h)) \\ &= P(N(t) = n - 1, \text{ y un evento ocurre en } (t, t + h)) + o(h) \\ &= P(N(t) = n - 1)P(\text{un evento ocurre en } (t, t + h)) + o(h) \\ &= e^{-\mu(t)} \frac{\mu(t)^{n-1}}{(n-1)!} [\lambda(t)h + o(h)] + o(h) \\ &= \lambda(t) e^{-\mu(t)} \frac{(\mu(t))^{n-1}}{(n-1)!} h + o(h). \end{aligned}$$

Dividiendo por  $h$  y haciendo  $h \rightarrow 0$  obtenemos que la densidad de esta variable es

$$f_{\tau_n}(t) = \lambda(t) e^{-\mu(t)} \frac{(\mu(t))^{n-1}}{(n-1)!}.$$

## 3.11. Simulación de Procesos de Poisson

Hay varias maneras de simular procesos de Poisson. En esta sección vamos a considerar dos de ellas, que se basan en simular los intervalos de tiempo entre eventos sucesivos, o simular el número de eventos en un período de tiempo determinado y luego ubicar los instantes en los cuales han ocurrido estos eventos en el período de tiempo en cuestión.

### 3.11.1. Primer Método

Hemos visto que si  $T_n$   $n \geq 1$  son v.a.i. con distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ ,  $\tau_n = T_1 + \dots + T_n$  representa el instante en el cual se registra el  $n$ -ésimo evento en un proceso de Poisson de intensidad  $\lambda$ . Podemos usar esta relación para simular un proceso de Poisson en R de la siguiente manera: Usamos la variable auxiliar `nev` para indicar el número de eventos que queremos simular, es decir, el número de variables exponenciales que vamos a considerar, generamos estas variables y luego las sumamos:

```
nev <- 20
ttiempos <- c(0, cumsum(rexp(nev, 1)))
```

La segunda instrucción genera `nev` variables exponenciales y las suma, para obtener las variables  $\tau_j$ . Usamos las siguientes instrucciones para graficar trayectorias de procesos de Poisson con intensidades 1, 0.5 y 0.1.

```
set.seed(999)
par(mfrow=c(3,1))
nev <- 20 # Numero de eventos
ttiempos <- c(0, cumsum(rexp(nev, 1)))
plot(ttiempos, 0:nev, type='s', xlim=c(0, 20),
     xlab='Tiempo', ylab='Eventos', lwd=2,
     main='Proceso de Poisson de intensidad 1')
abline(h=0, col='red')
```

```

ttempos <- c(0,cumsum(rexp(nev,0.5)))
plot(ttempos,0:nev, type='s',xlim=c(0,20),
     xlab='Tiempo',ylab='Eventos',lwd=2,
     main='Proceso de Poisson de intensidad 0.5')
abline(h=0,col='red')

ttempos <- c(0,cumsum(rexp(nev,0.1)))
plot(ttempos,0:nev, type='s',xlim=c(0,20),
     xlab='Tiempo',ylab='Eventos',lwd=2,
     main='Proceso de Poisson de intensidad 0.1')
abline(h=0,col='red')

```

El resultado de estas instrucciones es la siguiente gráfica:

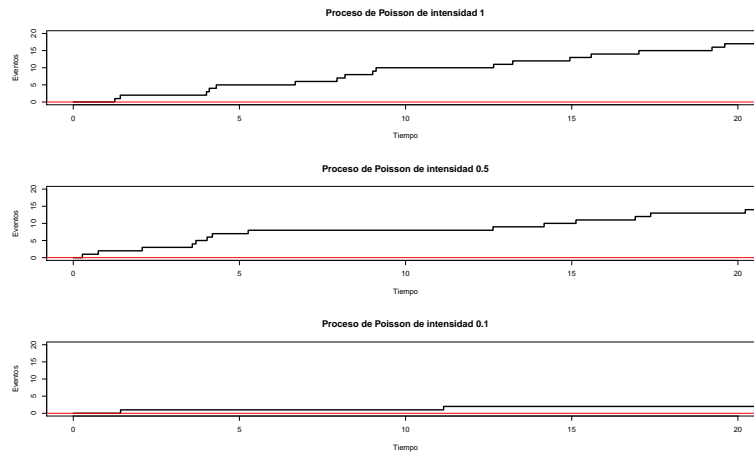


Figura 3.1: Ejemplos de trayectorias de procesos de Poisson con intensidades  $\lambda = 1, 0.5$  y  $0.1$ .

En la gráfica anterior fijamos el intervalo de tiempo en el eje  $x$  para comparar el efecto de las intensidades en un mismo período de tiempo. A continuación presentamos las gráficas de las mismas trayectorias anteriores pero dejando libre el intervalo de tiempo, para que se represente la trayectoria completa hasta llegar a 20 eventos.

```

set.seed(999)
par(mfrow=c(3,1))
ttempos <- c(0,cumsum(rexp(nev,1)))
plot(ttempos,0:nev, type='s',ylim=c(0,nev),
     xlab='Tiempo',ylab='Eventos',lwd=2,
     main='Proceso de Poisson de intensidad 1')
abline(h=0,col='red')

ttempos <- c(0,cumsum(rexp(nev,0.5)))
plot(ttempos,0:nev, type='s',ylim=c(0,nev),
     xlab='Tiempo',ylab='Eventos',lwd=2,
     main='Proceso de Poisson de intensidad 0.5')
abline(h=0,col='red')

ttempos <- c(0,cumsum(rexp(nev,0.1)))
plot(ttempos,0:nev, type='s',ylim=c(0,nev),
     xlab='Tiempo',ylab='Eventos',lwd=2,
     main='Proceso de Poisson de intensidad 0.1')

```



```
abline(h=0,col='red')
par(mfrow=c(1,1))
```

La figura 3.2 presenta el resultado de estas instrucciones:

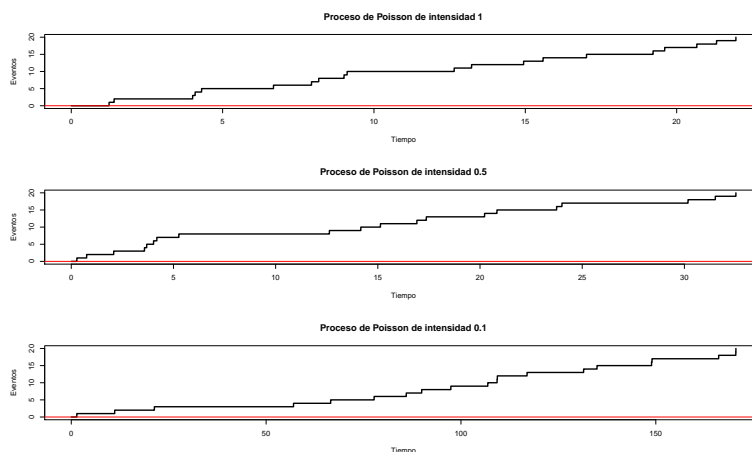


Figura 3.2: Ejemplos de trayectorias de procesos de Poisson con intensidades  $\lambda = 1, 0.5$  y  $0.1$ .

A continuación, en cada panel presentamos las gráficas de cinco trayectorias para cada intensidad. El número de eventos considerados es 40. Observar las diferentes escalas en el eje  $x$ .

```
set.seed(111)
nev <- 40
ttempos <- c(0,cumsum(rexp(nev,1)))
plot(ttempos,0:nev, type='s',ylim=c(0,nev),
      xlab='Tiempo',ylab='Eventos',lwd=2,
      main='Proceso de Poisson de intensidad 1')
abline(h=0,col='red')
for (i in 2:5) lines(c(0,cumsum(rexp(nev,1))),0:nev,type='s', lwd=2,col=i)

ttempos <- c(0,cumsum(rexp(nev,0.5)))
plot(ttempos,0:nev, type='s',ylim=c(0,30),
      xlab='Tiempo',ylab='Eventos',lwd=2,xlim=c(0,60),
      main='Proceso de Poisson de intensidad 0.5')
abline(h=0,col='red')
for (i in 2:5) lines(c(0,cumsum(rexp(nev,0.5))),0:nev,type='s', lwd=2,col=i)

ttempos <- c(0,cumsum(rexp(nev,0.1)))
plot(ttempos,0:nev, type='s',ylim=c(0,30),
      xlab='Tiempo',ylab='Eventos',lwd=2,xlim=c(0,100),
      main='Proceso de Poisson de intensidad 0.1')
abline(h=0,col='red')
for (i in 2:5) lines(c(0,cumsum(rexp(nev,0.5))),0:nev,type='s', lwd=2,col=i)
```

El resultado se presenta en la figura 3.3

### 3.11.2. Segundo Método

El segundo método para simular procesos de Poisson que consideraremos utiliza el siguiente resultado que presentamos sin demostración.

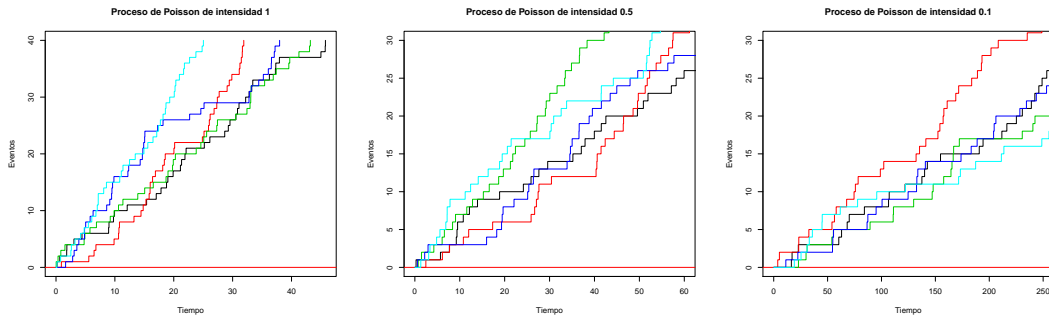


Figura 3.3: Ejemplos de trayectorias de procesos de Poisson con intensidades  $\lambda = 1, 0.5$  y  $0.1$ .

**Teorema 3.9** Sean  $\tau_1, \tau_2, \dots$  los instantes en los cuales ocurren los sucesivos eventos de un proceso de Poisson de parámetro  $\lambda$ . Dado que  $N(t) = n$ , las variables  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  tienen la misma distribución conjunta que los estadísticos de orden de  $n$  v.a.i. con distribución uniforme en  $[0, t]$ .

Por lo tanto, si queremos ver cuántos eventos han ocurrido en un intervalo de tiempo  $[0, t]$  en un proceso de Poisson de intensidad  $\lambda$ , podemos generar una v.a. de Poisson con parámetro  $\lambda t$ . Supongamos que el resultado es  $n$ , si queremos saber cuándo ocurrió cada uno de estos  $n$  eventos, generamos  $n$  variables uniformes en el intervalo  $[0, t]$ . Estas variables uniformes ordenadas corresponden a los instantes  $\tau_j$  para  $1 \leq j \leq n$ .

Para el código en R usaremos dos variables auxiliares, `tt` que representa el intervalo de tiempo y `lbd` que representa la intensidad del proceso de Poisson. Adicionalmente, `nev` representa el número de eventos en el intervalo y `ttimepos` los valores de las variables  $\tau_j$  en orden.

```
tt <- 30 # Tiempo de observación del proceso
lbd <- 1 # Intensidad
nev <- rpois(1,tt*lbd) # Número de eventos observados
ttimepos <- sort(runif(nev,max=tt)) # Ubicación de los eventos
```

Las siguientes instrucciones hacen las gráficas de tres trayectorias correspondientes a procesos de Poisson de parámetros 1, 0.5 y 0.1 para 30 unidades de tiempo.

```
set.seed(1235)
par(mfrow=c(3,1))
tt <- 30 # Tiempo en el que observamos el proceso
lbd <- 1 # Intensidad
nev <- rpois(1,tt*lbd) # Número de eventos observados
ttimepos <- sort(runif(nev,max=tt)) # Ubicación de los eventos
plot(c(0,ttimepos),0:nev, type='s',
      xlab='Tiempo',ylab='Eventos',lwd=2,xlim=c(0,tt),
      main='Proceso de Poisson de intensidad 0.5')
abline(h=0,col='red')

lbd <- 0.5
nev <- rpois(1,tt*lbd)
ttimepos <- sort(runif(nev,max=tt))
plot(c(0,ttimepos),0:nev, type='s',
      xlab='Tiempo',ylab='Eventos',lwd=2,xlim=c(0,tt),
      main='Proceso de Poisson de intensidad 0.5')
abline(h=0,col='red')

lbd <- 0.1
```

```
nev <- rpois(1,tt*lbd)
ttiempos <-sort(runif(nev,max=tt))
plot(c(0,ttiempos),0:nev, type='s',
     xlab='Tiempo',ylab='Eventos',lwd=2,xlim=c(0,tt),
     main='Proceso de Poisson de intensidad 0.1')
abline(h=0,col='red')
par(mfrow=c(1,1))
```

El resultado se presenta en la figura 3.4. En este caso la longitud del intervalo de tiempo está fija.

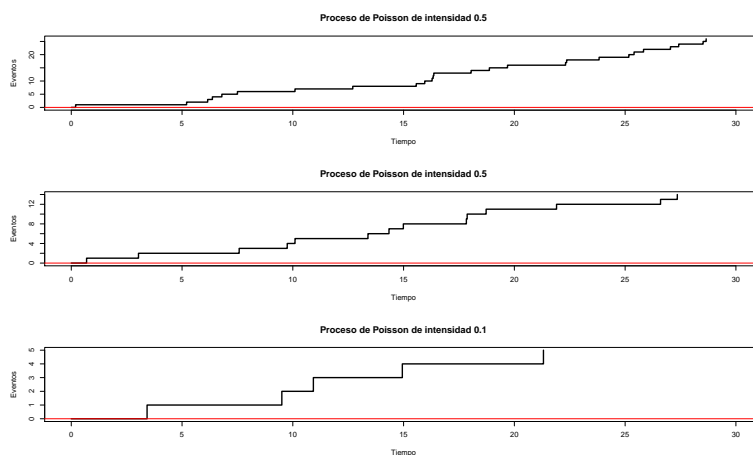


Figura 3.4: Ejemplos de trayectorias de procesos de Poisson con intensidades  $\lambda = 1, 0.5$  y  $0.1$ .

A continuación presentamos en cada panel, cinco trayectorias con igual intensidad.

```
set.seed(1357)
tt <- 30
lbd <- 1
nev <- rpois(1,tt*lbd)
ttiempos <-sort(runif(nev,max=tt))
plot(c(0,ttiempos),0:nev, type='s',
     xlab='Tiempo',ylab='Eventos',lwd=2,xlim=c(0,tt),
     main='Proceso de Poisson de intensidad 1')
abline(h=0,col='red')
for (i in 2:5) {
  nev <- rpois(1,tt*lbd)
  lines (c(0,sort(runif(nev,max=tt))),0:nev,type='s',col=i,lwd=2)
}

lbd <- 0.5
nev <- rpois(1,tt*lbd)
ttiempos <-sort(runif(nev,max=tt))
plot(c(0,ttiempos),0:nev, type='s',
     xlab='Tiempo',ylab='Eventos',lwd=2,xlim=c(0,tt),
     main='Proceso de Poisson de intensidad 0.5')
abline(h=0,col='red')
for (i in 2:5) {
  nev <- rpois(1,tt*lbd)
```

```

lines (c(0,sort(runif(nev,max=tt))),0:nev,type='s',col=i,lwd=2)
}
lbd <- .1
nev <- rpois(1,tt*lbd)
ttempos <-sort(runif(nev,max=tt))
plot(c(0,ttempos),0:nev, type='s',
      xlab='Tiempo',ylab='Eventos',lwd=2,xlim=c(0,tt),
      main='Proceso de Poisson de intensidad 0.1')
abline(h=0,col='red')
for (i in 2:5) {
  nev <- rpois(1,tt*lbd)
  lines (c(0,sort(runif(nev,max=tt))),0:nev,type='s',col=i,lwd=2)
}

```

Los resultados se muestran en la figura 3.5

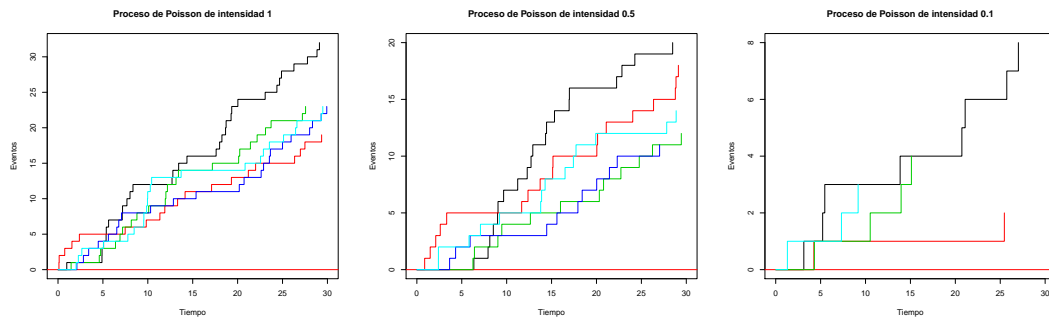


Figura 3.5: Ejemplos de trayectorias de procesos de Poisson con intensidades  $\lambda = 1, 0.5$  y  $0.1$ .

### 3.11.3. Procesos de Poisson Compuestos

En este caso, a cada evento de un proceso de Poisson homogéneo se le asocia una variable  $Y_i$  y el proceso de interés está dado por la suma

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

donde se entiende que la suma vale 0 si  $N(t) = 0$ . Para presentar un ejemplo de la simulación de estos procesos, vamos a suponer que las variables  $Y_i$  tienen distribución normal centrada de varianza 3 y que el proceso de Poisson tiene intensidad 0.5. Haremos la simulación del proceso de Poisson usando el primer método y tomaremos los primeros 25 eventos. Simulamos cinco trayectorias para este proceso, que presentamos en la figura 3.6.

```

nev <- 25
lbd <- 0.5
set.seed(9911)
ttempos <- c(0,cumsum(rexp(nev,lbd)))
pcomp <- c(0,cumsum(rnorm(nev,sd=sqrt(3))))
plot(ttempos,pcomp,type='s',lwd=2,xlab='Tiempos',xlim=c(0,35),
      main='Proceso de Poisson Compuesto',ylab='',ylim=c(-15,15))

```

```

abline(h=0,col='red')
for (i in 2:5) {
  ttiempos <- c(0,cumsum(rexp(nev,lbd)))
  pcomp <- c(0,cumsum(rnorm(nev,sd=sqrt(3))))
  lines(ttiempos,pcomp,type='s',col=i,lwd=2) }

```

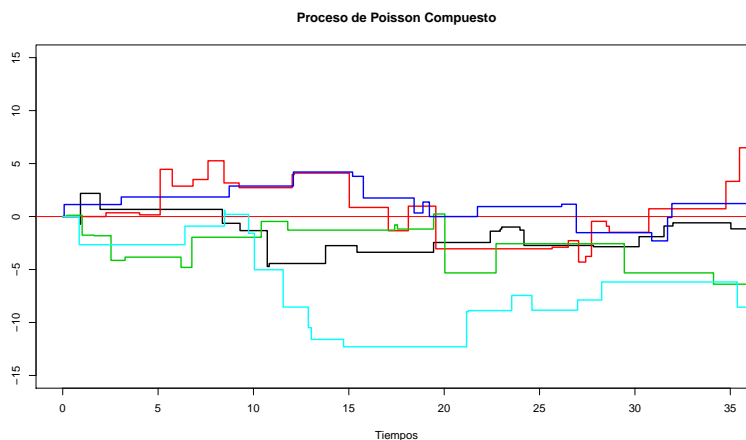


Figura 3.6: Ejemplos de trayectorias de procesos de Poisson compuestos con intensidad  $\lambda = 0.5$  y sumandos normales centrados de varianza 3.

#### 3.11.4. Descomposición de procesos de Poisson

Estudiamos anteriormente la descomposición de un proceso de Poisson homogéneo de intensidad  $\lambda$  y vimos que el resultado de esta descomposición son procesos de Poisson cuya intensidad depende del mecanismo empleado. En el caso más sencillo, a cada evento del proceso de Poisson le asociamos una variable Bernoulli de parámetro  $p$  y separamos los eventos que corresponden a éxitos de aquellos que corresponden a fracasos. El resultado es un par de procesos de Poisson con intensidades respectivas  $\lambda p$  y  $\lambda(1-p)$ . A continuación presentamos el código para simular la descomposición de un proceso homogéneo de intensidad 0.5 usando variables Bernoulli de parámetro 0.3.

```

nev <- 25
lbd <- 0.5
set.seed(9119)
ttiempos <- cumsum(rexp(nev,lbd))
plot(c(0,ttiempos),0:nev,type='s',lwd=2,xlab='Tiempos',
     main='Descomposición de un Proceso de Poisson',ylab='')
abline(h=0,col='red')
marca <- rbinom(nev,1,0.25)
lines(c(0,ttiempos[marca==1]),0:length(marca[marca==1]),type='s',
      lwd=2,col='darkblue')
lines(c(0,ttiempos[marca==0]),0:length(marca[marca==0]),type='s',
      lwd=2,col='red')

```

El resultado se presenta en la figura 3.7.

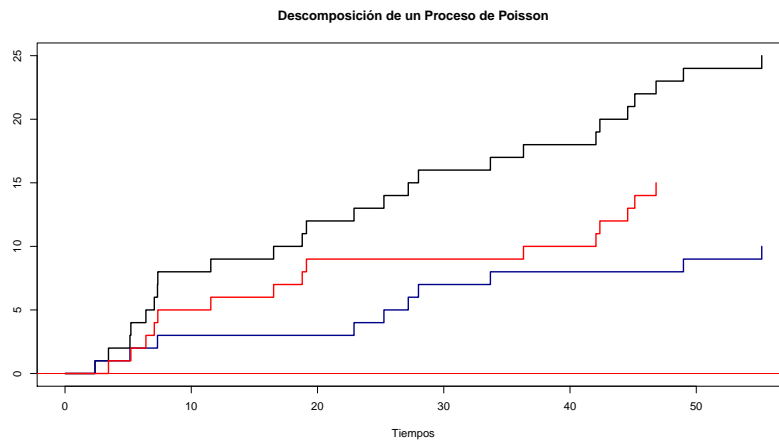


Figura 3.7: Descomposición de un proceso de Poisson con intensidad  $\lambda = 0.5$  usando variables Bernoulli con parámetro 0.3. En negro la trayectoria original, en azul la trayectoria que corresponde a éxitos en las variables de Bernoulli y en rojo a fracasos.

### 3.11.5. Superposición de procesos de Poisson

Para finalizar esta sección, vamos a considerar el proceso de superposición de procesos de Poisson. Consideramos dos procesos con intensidades respectivas 0.6 y 0.3 y un intervalo de tiempo de 30 unidades. El resultado se presenta en la figura 3.8.

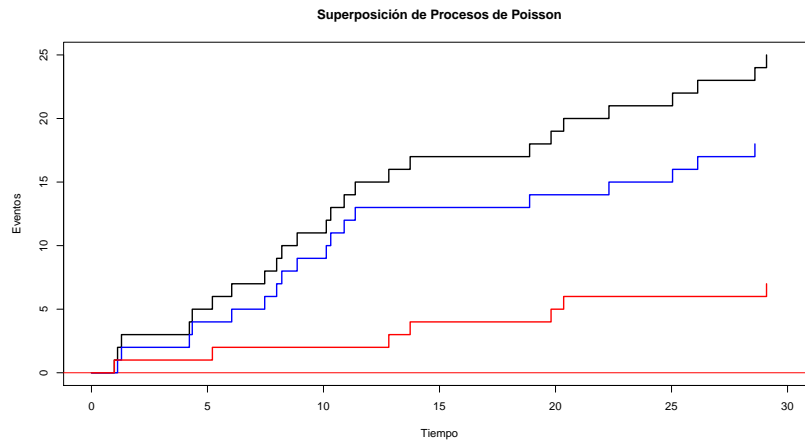


Figura 3.8: Superposición de procesos de Poisson con intensidades  $\lambda = 0.6$  y 0.3. En negro la trayectoria final, en azul la trayectoria que corresponde al proceso de intensidad 0.6 y en rojo con intensidad 0.3.

```
set.seed(8264)
tt <- 30 # Tiempo en el que observamos el proceso
lbd1 <- 0.6 # Intensidad del primer proceso
lbd2 <- 0.3 # Intensidad del segundo proceso
nev1 <- rpois(1,tt*lbd1) # Número de eventos proceso 1
nev2 <- rpois(1,tt*lbd2) # Número de eventos proceso 2
```

---

```
tt1 <-sort(runif(nev1,max=tt)) # Ubicación de los eventos P1
tt2 <-sort(runif(nev2,max=tt)) # Ubicación de los eventos P2
ttempos <- sort(c(tt1,tt2))
plot(c(0,ttempos),0:(nev1+nev2), type='s',
     xlab='Tiempo',ylab='Eventos',lwd=2,xlim=c(0,tt),
     main='Superposición de Procesos de Poisson')
abline(h=0,col='red')
lines(c(0,tt1),0:(nev1), type='s',col='blue',lwd=2)
lines(c(0,tt2),0:(nev2), type='s',col='red',lwd=2)
```