Matemáticas Discretas

Lógica

Luis Dominguez

Septiembre 2012

Abstract

La lógica en ciencias computacionales proporciona herramientas para deliberar si un problema puede o no ser resuelto en una máquina, para transformar enunciados lógicos en lenguaje común a lenguaje de computadora, para provar que un programa es correcto o si es eficiente. Las computadoras están diseñadas a partir de dispositivos lógicos y son programadas basándonos en la lógica.
Se analizarán los aspectos básicos de la lógica, así como sus conectores y reglas de sustitución.

Funciones

Función

Si A y B son conjuntos, una *función* de A a B es una regla que nos permite encontrar un $b \in B$ para cada $a \in A$. Se escribe $f(a) = b$ y se puede pronunciar como *f es una aplicación de a a b*, también se puede decir: *el valor de F en a es b*.

- Se escribe: $f : A \to B$ para indicar que f es una función de A a B. Al conjunto A se le conoce omo dominio de f, y al conjunto B el rango, o codominio de f.
- Cabe destacar que algunos autores utilizan diferente nomenclatura, por lo que si no se entiendo lo que el autor menciona, hay que revisar la sección de notación.

Funciones Booleanas

Función Booleana

Es una función f del producto Cartesiano $\times^n\{0,1\}$ a $\{0,1\}$. Alternativamente, se escribe $f : \times^n\{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$. El conjunto $\times^n\{0,1\}$, por definición, el conjunto de todas las n-tuplas $(x_0, \ldots x_{n-1})$ donde cada x_i es 0 o 1, es llamado el dominio de f. El conjunto $\{0,1\}$ es llamado el codominio de f. El producto Cartesiano $\times^n\{0,1\}$ se escribe también $\{0,1\}^n$, que equivale a escribir el producto de n copias de y como y^n.

Ejemplo, representación tabular

p	q	f
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	r	g
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Definimos la función Booleana $f : \times^2\{0,1\} \to \{0,1\}$ y $g : \times^3\{0,1\} \to \{0,1\}$. En el caso de la función f, tenemos $f(0,0) = 1$, $f(0,1 = 1$, ..., para la función g, tenemos $g(0,0,0) = 1$, $g(0,0,1) = 1 \ldots$

Número de funciones booleanas

¿Cuántas funciones Booleanas existen para el dominio $\times^3\{0,1\}$?

Número de funciones booleanas

¿Cuántas funciones Booleanas existen para el dominio $\times^3\{0,1\}$?

Se utiliza la notación $|S|$ para denotar el número de elementos de S, también se le conoce como cardinalidad.

Estamos pidiendo el valor de $|\times^n \{0,1\}|$. Podemos escoger cualquier elemento del dominio al seleccionar n elementos de $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, donde $x_i \in \{0,1\}$ para $i = 0, 1, \ldots, n$, y dado que solo hay dos opciones para cada x_i, el número total de elementos en el dominio es: $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$. En otra notación: $|\times^n \{0,1\}| = |\{0,1\}|^n$.

Número de funciones booleanas

¿Cuántas funciones Booleanas existen para el dominio $\times^3\{0,1\}$?

Se utiliza la notación $|S|$ para denotar el número de elementos de S, también se le conoce como cardinalidad.

Estamos pidiendo el valor de $|\times^n\{0,1\}|$. Podemos escoger cualquier elemento del dominio al seleccionar n elementos de $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, donde $x_i \in \{0,1\}$ para $i = 0, 1, \ldots, n$, y dado que solo hay dos opciones para cada x_i, el número total de elementos en el dominio es: $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$. En otra notación: $|\times^n\{0,1\}| = |\{0,1\}|^n$.

Respuesta: $|\times^3\{0,1\}| = 2^3 = 8 \ldots ?$

Número de funciones booleanas II

De hecho no, porque una función puede tener dos valores ($\{0, 1\}$) para cada uno de los elementos en el dominio, para el caso anterior: si tenemos 2^3 elementos, cada combinación nos daría un valor en $\{0, 1\}$, por lo que:

$$h : \times^n \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}, \quad |h| = 2^{(2^n)}.$$

Funciones Booleanas simples

Las funciones Booleanas más simples son las funciones constantes. Dado que hay dos constantes 0 y 1, pues sólo hay dos funciones Booleanas constantes.

El siguiente nivel es con una variable: $2^{2^1} = 4$ funciones Booleanas de una sola variable, y dado que hay dos constantes, nos quedan 2 funciones Booleanas no constantes de una variable.

Una es la función de identidad: $f(p) = p$ para todo $p \in \{0, 1\}$, y la otra es la función "**no** p". La función se denota como $\neg p$, o $\sim p$. Este símbolo es uniario, porque es una función que tiene una sola variable, el signo de menos es un operador similar.

Funciones Booleanas de dos variables

Para este caso, sabemos que hay $2^{2^2} = 2^4 = 16$ funciones $f(p, q)$, son 2 constantes, 2 funciones que dependen solo de p (siendo q constante) y 2 funciones que dependen solo de q. Tenemos 10 funciones que dependen de las dos variables.

Definiremos primeramente:

- $\wedge$
- $\vee$
- $\oplus$

Funciones Booleanas de dos variables II

Algunos operadores binarios de funciones Booleanas.

- p **y** $q : a(p, q)$. Por definición: $a(p, q) = 0$ salvo que $p = 1$ y $q = 1$, entonces $a(p, q) = 1$. La función se denota $p \wedge q$.
- p **o** $q : o(p, q)$. Por definición: $o(p, q) = 1$ salvo que $p = 0$ y $q = 0$, entonces $o(p, q) = 0$. La función se denota $p \vee q$.
- p **implica** q. Por definición: $im(p, q) = 1$ salgo que $p = 0$ y $q = 1$, etonces $im(p, q) = 0$. La función se denota $p \rightarrow q$.
- p **si y solo si** $q : b(p, q)$. Por definición: $b(p, q) = 0$ si $p = q$, $b(p, q) = 1$ si $p \neq q$. La función se denota $p \leftrightarrow q$.

Nota: En algunos casos, se utiliza el símbolo $\supset$ para la implicación.

Tablas de verdad

Conjunción

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disyunción

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Implicación

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Bicondicional

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Otros operadores binarios

Existen otros operadores:

		Disyunción exclusiva[1] (XNOR)	Equivalencia (XOR)	NAND	NOR
p	q	$p \oplus q$	$p \equiv q$	$p \uparrow q$	$p \downarrow q$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0

Sin embargo, veremos que utilizando el operador $\neg$ se pueden construir los mismos.

[1] alternativo: $\not\leftrightarrow, \not\equiv$

Tautología y Contradicción

Tautología

Una proposición es una *tautología* si es verdadera para todas las asignaciones de valores de verdad.

Contradicción

Una proposición es una *contradicción* si es falsa para todas las asignaciones de valores de verdad.

usaremos T_0 para denotar una tautología, y F_0 para una contradicción.

Tautología o contraducción

$p \vee \neg p$ es una
$p \to p$ es una
$p \wedge \neg p$ es una

Tautología o contraducción

$p \vee \neg p$	es una	tautología
$p \to p$	es una	
$p \wedge \neg p$	es una	

Tautología o contraducción

$p \vee \neg p$	es una	tautología
$p \to p$	es una	tautología
$p \wedge \neg p$	es una	

Tautología o contraducción

$p \vee \neg p$	es una	tautología
$p \rightarrow p$	es una	tautología
$p \wedge \neg p$	es una	contradicción

Si algunos casos son verdaderos y otros son falsos, se dice que a fórmula presenta una contingencia, por ejemplo: P

Cálculo proposicional

Una expresión gramática- o sintácticamente correcta se dice que es una fórmula bien formada. Ya hemos definido los operadores, así que podemos armar proposiciones complejas para su evaluación.

En el caso de las proposiciones compuestas, el orden de evaluación es el siguiente:

1. $\neg$ (más alta prioridad)
2. $\wedge$
3. $\vee$
4. $\rightarrow$ (más baja prioridad)

Se puede hacer uso de paréntesis para evitar ambigüedades.

Agregando paréntesis

$p \vee q \wedge r$	significa
$p \to q \to r$	significa
$\neg p \vee q$	significa
$\neg p \to p \wedge q \vee r$	significa
$\neg\neg p$	significa

Agregando paréntesis

$p \vee q \wedge r$	significa	$p \vee (q \wedge r)$
$p \rightarrow q \rightarrow r$	significa	
$\neg p \vee q$	significa	
$\neg p \rightarrow p \wedge q \vee r$	significa	
$\neg\neg p$	significa	

Agregando paréntesis

$p \vee q \wedge r$	significa	$p \vee (q \wedge r)$
$p \rightarrow q \rightarrow r$	significa	$(p \rightarrow q) \rightarrow r$
$\neg p \vee q$	significa	
$\neg p \rightarrow p \wedge q \vee r$	significa	
$\neg\neg p$	significa	

Agregando paréntesis

$p \vee q \wedge r$	significa	$p \vee (q \wedge r)$
$p \rightarrow q \rightarrow r$	significa	$(p \rightarrow q) \rightarrow r$
$\neg p \vee q$	significa	$(\neg p) \vee q$
$\neg p \rightarrow p \wedge q \vee r$	significa	
$\neg\neg p$	significa	

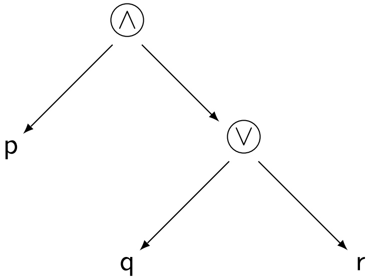
Agregando paréntesis

$p \vee q \wedge r$	significa	$p \vee (q \wedge r)$
$p \rightarrow q \rightarrow r$	significa	$(p \rightarrow q) \rightarrow r$
$\neg p \vee q$	significa	$(\neg p) \vee q$
$\neg p \rightarrow p \wedge q \vee r$	significa	$(\neg p) \rightarrow ((p \wedge q) \vee r)$
$\neg\neg p$	significa	

Agregando paréntesis

$p \vee q \wedge r$	significa	$p \vee (q \wedge r)$
$p \rightarrow q \rightarrow r$	significa	$(p \rightarrow q) \rightarrow r$
$\neg p \vee q$	significa	$(\neg p) \vee q$
$\neg p \rightarrow p \wedge q \vee r$	significa	$(\neg p) \rightarrow ((p \wedge q) \vee r)$
$\neg\neg p$	significa	$\neg(\neg p)$

Figure : Ejercicio



¿Cuáles son todos los posibles valores de esta función?

Pruebas con tablas de verdad

Hagamos la tabla de verdad para la proposición
$A = ((p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p))$.

p	q
0	0
0	1
1	0
1	1

Pruebas con tablas de verdad

Hagamos la tabla de verdad para la proposición
$A = ((p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p))$.

p	q	$\neg p$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Pruebas con tablas de verdad

Hagamos la tabla de verdad para la proposición
$A = ((p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p))$.

p	q	$\neg p$	$\neg q$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	0

Pruebas con tablas de verdad

Hagamos la tabla de verdad para la proposición
$A = ((p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p))$.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \to q)$	
0	0	1	1	1	
0	1	1	0	1	
1	0	0	1	0	
1	1	0	0	1	

Pruebas con tablas de verdad

Hagamos la tabla de verdad para la proposición
$A = ((p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p))$.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \to q)$	$(\neg q \to \neg p)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

Pruebas con tablas de verdad

Hagamos la tabla de verdad para la proposición
$A = ((p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p))$.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \rightarrow q)$	$(\neg q \rightarrow \neg p)$	$((p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p))$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

Pruebas con tablas de verdad

Hagamos la tabla de verdad para la proposición
$A = ((p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p))$.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \to q)$	$(\neg q \to \neg p)$	$((p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p))$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

... la proposición siempre es verdadera!

Pruebas con tablas de verdad

Hagamos la tabla de verdad para la proposición
$A = ((p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p))$.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \to q)$	$(\neg q \to \neg p)$	$((p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p))$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

... la proposición siempre es verdadera! A es una tautología.

Pruebas con tablas de verdad

El método anterior para determinar si una proposición es satisfasible o si es una tautología, es computacionalmente costoso, ya que requiere un número exponencial de pasos para su solución.

¿Es posible encontrar un método más eficiente?

Pruebas con tablas de verdad

El método anterior para determinar si una proposición es satisfasible o si es una tautología, es computacionalmente costoso, ya que requiere un número exponencial de pasos para su solución.

¿Es posible encontrar un método más eficiente? No, es un problema NP-completo, por lo que probablemente no exista un método rápido (para un número grande de elementos es imposible).

Sin embargo, es posible trabajar de adelante hacia atrás en busca de una proposición que la haga falsa. (Método Gentzen)

Conjuntos completos de conectividad

Definición

Sea A una formula conteniendo exactamente n símbolos proposicionales. La función $H_A : BOOL^n \to BOOL$ está definida de tal forma que para cada $(a_1, \ldots, a_n) \in BOOL^n$,

$$H_A(a_1, \ldots, a_n) = \hat{v}(A)$$

con v cualquier evaluación tal que $v(P_i) = a_i$ para cada símbolo P_i en A.

Ejemplo

La proposición

$$A = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

define la función de verdad $H_{\oplus}$ dada la siguiente tabla de verdad:

p	q	
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Ejemplo

La proposición

$$A = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

define la función de verdad $H_{\oplus}$ dada la siguiente tabla de verdad:

p	q	$\neg p$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Ejemplo

La proposición

$$A = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

define la función de verdad $H_{\oplus}$ dada la siguiente tabla de verdad:

p	q	$\neg p$	$\neg q$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	0

Ejemplo

La proposición

$$A = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

define la función de verdad $H_{\oplus}$ dada la siguiente tabla de verdad:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \wedge \neg q)$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

Ejemplo

La proposición

$$A = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

define la función de verdad $H_{\oplus}$ dada la siguiente tabla de verdad:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \wedge \neg q)$	$(\neg p \wedge q)$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	0

Ejemplo

La proposición

$$A = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

define la función de verdad $H_{\oplus}$ dada la siguiente tabla de verdad:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \wedge \neg q)$	$(\neg p \wedge q)$	$((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q))$
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0

La función $H_{\oplus}$ es verdadera *sí y solo sí* sus argumentos tienen valores diferentes, por lo que esta función es llamada función *O exclusivo*.

Ejemplos

Verifique que las siguientes propiedades se mantengan;

$$\models (A \equiv B) \equiv ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)); \tag{1}$$
$$\models (A \rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B); \tag{2}$$
$$\models (A \vee B) \equiv (\neg A \rightarrow B); \tag{3}$$
$$\models (A \vee B) \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B); \tag{4}$$
$$\models (A \wedge B) \equiv \neg(\neg A \vee \neg B); \tag{5}$$
$$\models \neg A \equiv (A \rightarrow \perp); \tag{6}$$
$$\models \perp \equiv (A \wedge \neg A). \tag{7}$$

$\models$ significa tautología, $\perp$ significa un valor constante ($\{0, 1\}$)

Teorema

Principio de dualidad

Sean A y B dos proposiciones de las cuales es posible obtener su dial, entonces si $A \Leftrightarrow B$, $A^d \Leftrightarrow B^d$.

Definiciones

- Dos proposiciones A y B son *lógicamente equivalentes*, denotadas como $A \Leftrightarrow B$, cuando la proposición A es verdadera (resp. falsa) sí y sólo sí la proposición B es verdadera (resp. falsa).
- Sea A una proposición. Si A no tiene conectivas lógicas distintas de *wedge* y $\vee$, entonces el *dual* de A, denotado A^d, es la proposición que se obtiene al reemplazar cada ocurrencia de *wedge* y $\vee$ con $\vee$ y $\wedge$ respectivamente, y cada ocurrencia de una tautología T_0 y una contradicción F_0 con F_0 y T_0 respectivamente.

Ejercicios

- Escriba las versiones con paréntesis de las siguientes expresiones:
  - $\neg p \wedge q \rightarrow p \vee r$
  - $p \vee \neg q \wedge r \rightarrow p \vee r \rightarrow \neg q$
  - $a \rightarrow b \vee \neg c \wedge d \wedge e \rightarrow f$
- Escriba una secuencia proposicional para "if A then B else C"

Reglas algebraicas para funciones Booleanas

Cada regla establece que las dos funciones Booleanas confrontadas son equivalentes, esto es, presentan la misma tabla de verdad.

Asociatividad	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
Distributiva	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Idempotente	$p \wedge p \Leftrightarrow p$	$p \vee p \Leftrightarrow p$
Doble negación	$\neg\neg p \Leftrightarrow p$	
DeMorgan	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
Comutativas	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
Absorción	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
Límite	$p \wedge 0 \Leftrightarrow 0; p \wedge 1 \Leftrightarrow p$	$p \vee 1 \Leftrightarrow 1; p \vee 0 \Leftrightarrow p$
Negación	$p \wedge (\neg p) \Leftrightarrow 0$	$p \vee (\neg p) \Leftrightarrow 1$
Neutro	$p \vee F_0 \Leftrightarrow p$	$p \wedge T_0 \Leftrightarrow p$
Inversas	$p \vee \neg p \Leftrightarrow T_0$	$p \wedge \neg p \Leftrightarrow F_0$
Dominación	$p \vee T_0 \Leftrightarrow T_0$	$p \wedge F_0 \Leftrightarrow F_0$

Ejercicio

Simplifique la siguiente proposición:

- $(\neg(p \wedge \neg q)) \wedge (p \vee q)$

Ejercicio

Simplifique la siguiente proposición:

- $(\neg(p \wedge \neg q)) \wedge (p \vee q)$

Respuesta: q

Solución

$$
\begin{aligned}
(\neg(p \wedge \neg q)) \wedge (p \vee q) &\Leftrightarrow ((\neg p \wedge \neg\neg q)) \wedge (p \vee q)\\
&\Leftrightarrow ((\neg p \wedge q)) \wedge (p \vee q)\\
&\Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \wedge p) \vee ((\neg p \vee q) \wedge q)\\
&\Leftrightarrow (p \wedge (\neg p \vee q)) \vee (q \wedge (q \vee \neg p))\\
&\Leftrightarrow (p \wedge (\neg p \vee q)) \vee q\\
&\Leftrightarrow (0 \vee (p \wedge q)) \vee q\\
&\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee q\\
&\Leftrightarrow q
\end{aligned}
$$

¿Se puede mejorar?...

Solución 2

$$
\begin{aligned}
(\neg(p \wedge \neg q)) \wedge (p \vee q) &\Leftrightarrow ((\neg p \wedge \neg\neg q)) \wedge (p \vee q) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (p \vee q) \\
&\Leftrightarrow (q \vee \neg p) \wedge (q \vee p) \\
&\Leftrightarrow q \vee (\neg p \wedge p) \\
&\Leftrightarrow q \vee 0 \\
&\Leftrightarrow q
\end{aligned}
$$

Ejercicio de Tautologías

Verifique las siguientes tautologías

- Asociatividad:
  - $((A \vee B) \vee C) \equiv (A \vee (B \vee C))$
  - $((A \wedge B) \wedge C) \equiv (A \wedge (B \wedge C))$
- Conmutabilidad:
  - $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$
  - $(A \wedge B) equiv (B \wedge A)$
- Distribuidad:
  - $(A \vee (B \wedge C)) \equiv ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$
  - $(A \wedge (B \vee C)) \equiv ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

contiuación

- De Morgan's:
  - $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$
  - $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$
- Idempotencia:
  - $(A \vee A) \equiv A$
  - $(A \wedge A) \equiv A$
- Double negation rule:
  - $\neg\neg A \equiv A$
- Absorption rules:
  - $(A \vee (A \wedge B)) \equiv A$
  - $(A \wedge (A \vee B)) \equiv A$

Lectura

3.3.5.- Problemas NP-Completos.