Matemáticas Discretas

Lógica II

Luis Dominguez

Septiembre 2012

Reglas de sustitución

Sea PS un conjunto enumerable de símbolos proposicionales $P_0, P_1, \ldots$; el conjunto $PROP$ de una ecuación proposicional se define como la cerradura inductiva[1] de cierto subconjunto conteniendo los símbolos lógicos.

Una sustitución es una función $s : PS \to PROP$. Dado que $PROP$ es libremente generado por PS y $\perp$, cada sustitución s sirve de base para otra sustitución, normalmente de manera recursiva. Dada una ecuación A conteniendo los símbolos proposicionales $\{P_0, \ldots, P_{n-1}\}$, s_1 y s_2 dos sustituciones tales que para cada $P_i \in \{P_0, \ldots, P_{n-1}\}$, las proposiciones son equivalentes ($\models s_1(P_i) \equiv s_2(P_i)$).

[1] expresión inductiva para cierto conjunto de operadores aritméticos

Sustitución en tautologías

Suponga que la proposición compuesta A es una tautología. Si a es una proposición primitiva que aparece en A y reemplazamos cada ocurrencia de a por la misma proposición b, entonces la proposición compuesta resultante A' también es una tautología.

Ejemplos de tautologías:

- $q \to q)$
- $(r \equiv r)$
- $\neg(p \wedge \neg p)$
- $((p \wedge \neg q) \to q)$
- $(((p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)) \equiv = p)$.

Desarrollo

- Dada una tautología: $((p \wedge q) \rightarrow q)$.
- Dada una proposición lógica: $((r \wedge s) \rightarrow t)$
- Selecciones una letra de la tautología
- Sustituya por la proposición lógica
- El resultado también es una tautología

$$((p \wedge ((r \wedge s) \rightarrow t) \rightarrow ((r \wedge s) \rightarrow t))$$

Bono: Verifique que es una tautología

Definiciones

Dada una proposición compuesta A, $a \in A$, y *bequiva*. Supongamos que en A reemplazamos una o más ocurrencias de a por b. Este reemplazo produce otra proposición compuesta A', which in deed, $A \equiv A'$.

Dada la siguiente proposición $(a_0 \wedge a_1 \wedge \ldots \wedge a_{n-1}) \rightarrow b$, una *premisa* es todo elemento a_i, mientras que b es la *conclusión* del *argumento* o proposición presentada.

Definiciones

Si todas las premisas son verdaderas, entonces la conclusión también es verdadera, por lo que se dice que el *argumento es válido*.

Dado esto, se dice que el argumento se *deduce* o *infiere* de la verdad de las premisas. La validación de un argumento se realiza probando que este es una tautología.

Si $p \rightarrow q$ es una tautología, entonces decimos que p *implica lógicamente a* q, y en este caso, la notación es: $p \Rightarrow q$.

Formas normalizadas

Forma Normal Conjuntiva (CNF)

Una proposición A está en su forma normal conjuntiva si es una conjunción $C_0 \wedge C_1 \wedge \ldots \wedge C_{n-1}$ de disjunciones $C_i = B_{i,0} \vee B_{i,1} \vee \ldots \vee B_{i,n-1}$, donde cada $B_{i,j}$ es un símbolo proposicional P o su negación $\neg P$.

Forma Normal Disjuntiva (DNF)

Una proposición A está en su forma normal disjuntiva si es una conjunción $C_0 \vee C_1 \vee \ldots \vee C_{n-1}$ de conjunciones $C_i = B_{i,0} \wedge B_{i,1} \wedge \ldots \wedge B_{i,n-1}$, donde cada $B_{i,j}$ es un símbolo proposicional P o su negación $\neg P$.

DNF

Ejemplos DNF:

- $P \vee (\neg P \wedge Q)$
- $(P \wedge Q) \vee (\neg Q \vee P)$
- $(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

Ejemplos CNF:

- $P \wedge (\neg P \vee Q)$
- $(P \vee Q) \wedge \dots$
- $\dots$

Ejercicio

Convierta las siguientes proposiciones a su forma DNF utilizando las reglas vistas anteriormente.

- $(P \to Q) \to P$
- $P \to (Q \to P)$
- $Q \wedge \neg P \to P$
- $(P \vee Q) \wedge R$
- $P \to Q \wedge R$
- $(A \vee B) \wedge (C \to D)$