Espacios de no k iguales

José Luis León Medina

CONACYT-CIMAT Mérida

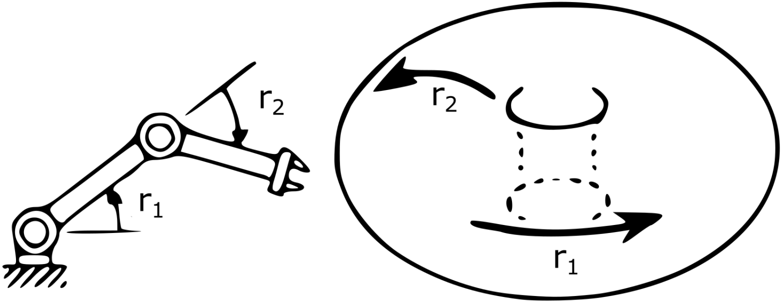
Complejidad Topológica

Michael Farber introdujo en 2003 el concepto de complejidad topológica, TC, como una forma de entender la complejidad de la planeación motriz de un robot.

El **espacio de configuraciones** de un robot es un espacio topológico X cuyos puntos parametrizan las posibles configuraciones o posiciones del robot.

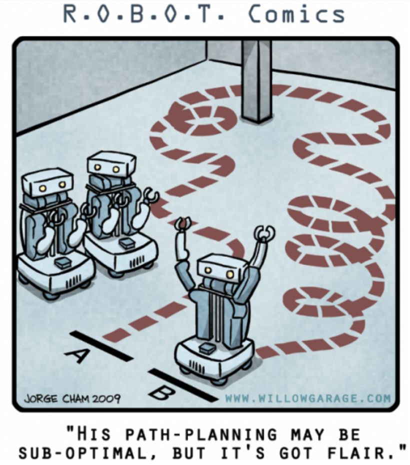
Consideramos X tal que

- X es arco conexo.
- X tiene el tipo de homotopía de un CW complejo.

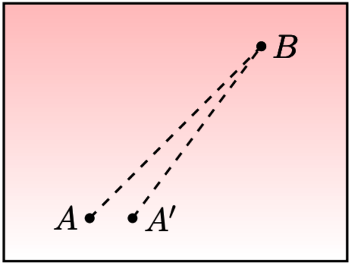


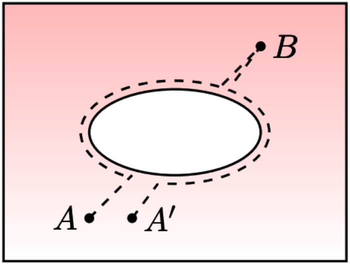
Problema de planeación motriz:

Encontrar un algoritmo que, dadas dos configuraciones A, B en X, produzca un desplazamiento del robot de A a B.



Equivalentemente, dados $A, B \in X$, queremos encontrar un camino $\gamma : I \to X$, que dependa *continuamente* de A y B, tal que $\gamma(0) = A$ y $\gamma(1) = B$.





Resolver el problema de planeación motriz es equivalente a encontrar una sección para la fibración $e_{0,1}$:

$$\begin{tikzcd}
PX \arrow[d] & \gamma \arrow[d, mapsto] & \text{Espacio de caminos en } X \quad \{\gamma : I \to X\} \arrow[ll, dashed] \\
X \times X \arrow[u, bend left, "s"] & (\gamma(0), \gamma(1)) & \text{Espacio de tareas} \arrow[ll, dashed]
\end{tikzcd}$$

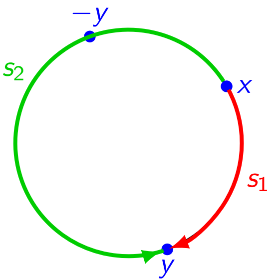
$$TC(X) = \left\{ \begin{array}{c} \text{Mínimo número} \\ \text{de abiertos } U_i \text{ que} \\ \text{cubren a } X \times X \\ \text{y tal que } e_{0,1} \\ \text{admite una sección} \\ \text{sobre cada uno} \end{array} \right\} - 1$$

$$\begin{tikzcd} & PX \arrow[d] \\ U_i \arrow[r, hook] \arrow[ur, bend left, "s_i", red] & X \times X \end{tikzcd}$$

$X = S^1$

$$U_1 = \{(x, y) \,|\, x \neq -y\}$$

$$U_2 = \{(x, y) \,|\, x \neq y\}$$



Por tanto $TC(S^1) = 1$.

Cotas para la TC

Teorema (Importante para calcular la TC)

Sea X un espacio c conexo que tiene el tipo de homotopía de un CW complejo, entonces

$$\mathrm{zcl}(X) \leq \mathrm{TC}(X) \leq 2\frac{\mathrm{hdim}(X)}{c+1}.$$

donde $\mathrm{zcl}(X)$ es el máximo entero no negativo ℓ tal que existen clases de cohomología $z_j \in H^*(X \times X)$, todas con restricción trivial bajo la inclusión diagonal $\Delta\colon X \hookrightarrow X \times X$, y tal que el producto $z_1 \cdots z_\ell \in H^*(X \times X)$ es no cero. A cada una de las clases z_i se le llama divisor de cero para X.

Espacios de no k iguales

No hay k elementos iguales

Espacio de n-tuplas

$$M_d^{(k)}(n)$$

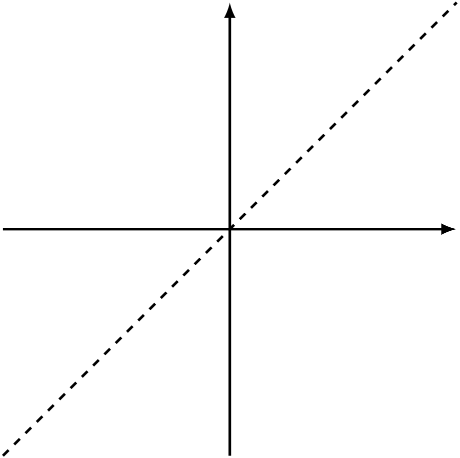
Con entradas en $\mathbb{R}^d$

La cohomología de $M_d^{(k)}(n)$

- Los números de Betti de las variedades de no k-iguales fueron calculados por Björner y Welker en 1995.
- La herramienta clásica para calcular la cohomología de $M_d^{(k)}(n)$ fue aplicar las fórmulas de Goresky-McPherson sin embargo estos métodos no recuperan la estructura multiplicativa.
- En 1997 Baryshnikov determinó el anillo de cohomología de $M_d^{(k)}(n)$ para $d = 1$.
- En 2014 Natalia Dobrinskaya y Victor Tourtchine determinaron el anillo de cohomología de $M_d^{(k)}(n)$ para $d \geq 2$.

Ejemplo: M_2

Sea $M_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$, entonces



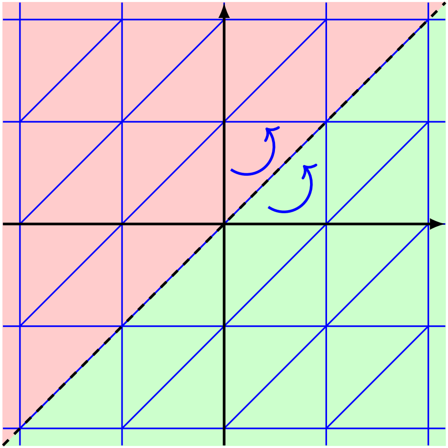
$$H^n(M_2) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{o. c.} \end{cases}$$

$$\updownarrow$$

?

Ejemplo: M_2

Sea $M_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$, entonces

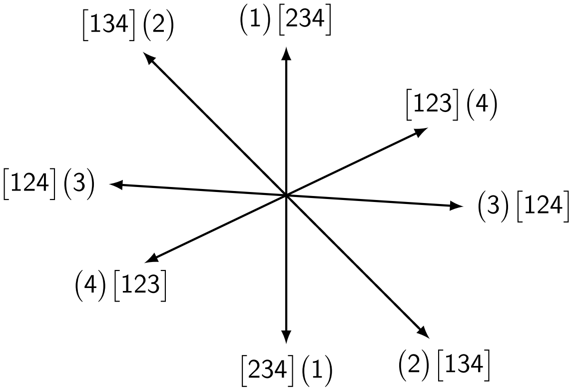


$$H^n(M_2) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{o. c.} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$H_n^{BM}(\mathbb{R}^2, \Delta) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } n = 2, \\ 0 & \text{o. c.} \end{cases}$$

Ejemplo: $M_1^{(3)}(4)$



Podemos codificar las celdas de la variedad de no k-iguales por medio de etiquetas, por ejemplo:

$$(1)[23](4) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 \leq x_2 = x_3 \leq x_4\}$$

Dualidad de Poincaré en Homología de Borel-Moore

Teorema (Spanier, 1993)

Si (A, B) es un par cerrado en una n-variedad orientada M entonces hay un isomorfismo

$$D : H^k(M - B, M - A; R) \to H^{BM}_{n-k}(A, B; R)$$

Dualidad de Poincaré en Homología de Borel-Moore

Teorema (Spanier, 1993)

Si (A, B) es un par cerrado en una n-variedad orientada M entonces hay un isomorfismo

$$D : H^k(M - B, M - A; R) \to H^{BM}_{n-k}(A, B; R)$$

En particular para la variedad de no k iguales $M_d^{(k)}(n)$ tenemos:

$$H^k\left(M_d^{(k)}(n); R\right) \to H^{\mathrm{BM}}_{n-k}\left(\left(\mathbb{R}^d\right)^n, A^d_{n,k}; R\right)$$

En particular, dualizando el producto copa tenemos el producto intersección:

$$\begin{tikzcd}
H^{n-k}(X-B, X-A) \otimes H^{n-\ell}(X-B) \arrow[r, "\smile"] \arrow[d] & H^{2n-k-\ell}(X-B, X-A) \arrow[d] \\
H^{BM}_{k}(A,B) \otimes H^{BM}_{\ell}(X,B) \arrow[r, "\bullet"] & H^{BM}_{k+\ell-n}(A,B)
\end{tikzcd}$$

El producto intersección es

$$\beta \bullet \alpha = D(D^{-1}\beta \smile D^{-1}\alpha) = \beta \frown D^{-1}\alpha$$

TC para $d = 1$

Teorema (J. González, J. L. León-Medina, and C. Roque-Márquez, 2021)

Para $M_1^{(k)}(n)$ *se tiene que*

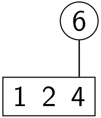
$$\mathrm{TC}(M_1^{(k)}(n)) = 2\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$$

La cohomología de $M_d^{(k)}(n)$ para $d \geq 2$

Similar a la descripción de la cohomología para $M_1^{(k)}(n)$ tenemos bloques elementales definidos en término de bosques.

Ejemplo

En $\left(\mathbb{R}^3\right)^8$, el 4 bosque



tiene una interpretación en término de celdas también. Los elementos en el vértice cuadrado indican una igualdad de las respectivas coordenadas, entonces para $(x_1, \ldots, x_8) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^8$ se tiene

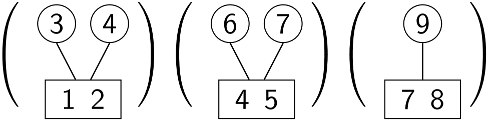
$$x_1 = x_2 = x_4$$

mientras que el vértice redondo indica que se cumplen las desigualdades

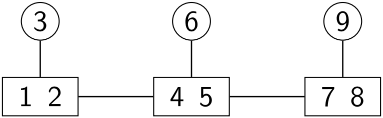
$$x_4^1 \leq x_6^1 \quad \text{y} \quad x_4^2 = x_6^2, \;\; x_4^3 = x_6^3.$$

La cohomología de $M_d^{(k)}(n)$

El producto copa está dado en términos de intersecciones transversales. Por ejemplo



es igual a



Cota para $d \geq 2$

Corolario (J. González, J.L. León-Medina, 2022)

$$2\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \leq \mathrm{TC}(M_d^{(k)}(n)) \leq 2\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \left\lceil \frac{\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + b - 1\right)(d-1)}{a} - 1 \right\rceil\right),$$

donde $a = d(k-1) - 1$ *y* $b = n - k\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ *(así que* $0 \leq b < k$*).*

Fórmula para $d = 2$

Corolario

Si $3 \leq k < n \leq k^2 + k - 2$ *y* $s \geq 1$, *entonces*

$$\mathrm{TC}_s(M_2^{(k)}(n)) = s \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor .$$

Posible dirección para mejorar la cota inferior

Para los casos donde el término

$$\left\lceil \frac{\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + b - 1\right)(d-1)}{a} - 1 \right\rceil$$

no se anula, tal vez el uso de productos de Massey puede ayudar a mejorar la cota. Para ello conviene usar las ideas mostradas en el artículo de Mark Grant "Topological complexity of motion planning and Massey products".

Productos de Massey en términos de intersecciones

Sean K, L y M variedades orientadas de una variedad n-dimensional N y sean κ, λ y μ los duales de Poincaré de sus clases fundamentales $[K]_N, [L]_N, [M]_N \in H_*^{\mathrm{BM}}(N)$. Suponga que se dan las siguientes intersecciones transversales $K \pitchfork L = \partial X$ y $L \pitchfork M = \partial Y$ para algunas subvariedades orientadas X y Y tales que $X \pitchfork M$ y $K \pitchfork Y$. Entonces el dual de Poincaré de la clase fundamental

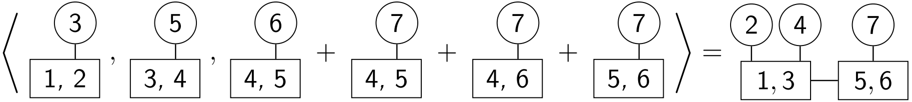
$$\Big[X \cap M - (-1)^{\dim K} K \cap Y\Big]_N$$

pertenece al producto ternario de Massey $\langle \kappa, \lambda, \mu \rangle$.

Ejemplo de producto no cero

Teorema

Sean $n \geq 7$*,* $d \geq 2$*, entonces el producto de Massey en* $M_d^{(3)}(n)$

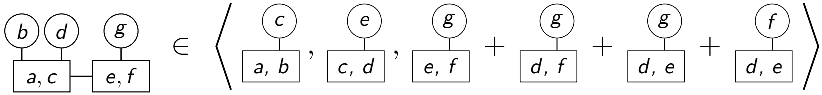


es no trivial

En general

Teorema

Si $n \geq 7$, $d \geq 2$ y se tienen siete números distintos a, b, c, d, e, f, g en $\mathbf{n}$ donde $\max\{a, b\} \leq c$, $\max\{c, d\} \leq e$ y $\max\{e, f\} \leq g$, el producto de Massey en $M_d^{(3)}(n)$



es no trivial.

¡Gracias por su atención!