

Tarea de Geometría Analítica

18 de Abril de 2013.

Si $F = (c, d)$ y h es la recta dada por la ecuación $Ax + By = C$, el conjunto de puntos P que equidistan de F y de h (es decir, tales que $d(P, F) = d(P, h)$) se conoce como la *parábola con foco F y recta directriz h* .

Ejercicio 1. Sean $c > 0$, $F = (c, 0)$ y h la recta $x = -c$. Verifique que:

- (a) Si $P = (a, b)$ con $a < 0$, entonces $d(P, F) > d(P, h)$; en particular P no está en la parábola con foco en F y recta directriz h .
- (b) Si $P = (a, b)$ está en la parábola, entonces $d(P, F) \geq c$. En particular dicha distancia es igual a c si y sólo si $P = (0, 0)$. A este punto le llamamos el *vértice* de la parábola.
Sugerencia: Calcule la distancia de P a h .

Ejercicio 2. Sean $c > 0$, $F = (-c, 0)$ y h la recta dada por $x = c$. Verifique que:

- (a) Si $P = (a, b)$ con $a > 0$, entonces $d(P, F) > d(P, h)$; en particular P no está en la parábola con foco en F y recta directriz h .
- (b) Si $P = (a, b)$ está en la parábola, entonces $d(P, F) \geq c$. En particular dicha distancia es igual a c si y sólo si $P = (0, 0)$. En este caso el vértice de la parábola es nuevamente el $(0, 0)$.
- (c) $P = (a, b)$ está en la parábola si y sólo si $b^2 = -4ca$.
- (d) Grafique esta parábola.

Ejercicio 3. Sean $c > 0$, $F = (x_0 + c, 0)$ y h la recta $x = x_0 - c$. Verifique que:

- (a) Si $P = (a, b)$ con $a < x_0$, entonces $d(P, F) > d(P, h)$; en particular P no está en la parábola con foco en F y recta directriz h .
- (b) Si $P = (a, b)$ está en la parábola, entonces $d(P, F) \geq c$. En particular dicha distancia es igual a c si y sólo si $P = (x_0, 0)$. En este caso el vértice de la parábola es el punto $(x_0, 0)$.
- (c) $P = (a, b)$ está en la parábola si y sólo si $b^2 = 4c(a - x_0)$.

Sugerencia: calcule las distancias de P al foco y a la recta directriz, escriba la ecuación que expresa la igualdad de estas distancias, eleve al cuadrado en

ambos lados de la ecuación y simplifique.

(d) Grafique esta parábola.

Ejercicio 4. Sean $c > 0$, $F = (x_0 - c, 0)$ y h la recta $x = x_0 + c$. Verifique que:

- (a) Si $P = (a, b)$ con $a > x_0$, entonces $d(P, F) > d(P, h)$; en particular P no está en la parábola con foco en F y recta directriz h .
- (b) Si $P = (a, b)$ está en la parábola, entonces $d(P, F) \geq c$. En particular dicha distancia es igual a c si y sólo si $P = (x_0, 0)$. En este caso el vértice de la parábola es nuevamente el punto $(x_0, 0)$.
- (c) $P = (a, b)$ está en la parábola si y sólo si $b^2 = -4c(a - x_0)$.
- (d) Grafique esta parábola

Ejercicio 5. Sean $c > 0$, $F = (x_0 + c, y_0)$ y h la recta $x = x_0 - c$. Verifique que:

- (a) Si $P = (a, b)$ con $a < x_0$, entonces $d(P, F) > d(P, h)$; en particular P no está en la parábola con foco en F y recta directriz h .
- (b) Si $P = (a, b)$ está en la parábola, entonces $d(P, F) \geq c$. En particular dicha distancia es igual a c si y sólo si $P = (x_0, y_0)$. En este caso el vértice de la parábola es el punto (x_0, y_0) .
- (c) $P = (a, b)$ está en la parábola si y sólo si $(b - y_0)^2 = 4c(a - x_0)$.
- (d) Grafique esta parábola