Tarea de Geometría Analítica

2 de Mayo de 2013.

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{P}$ la parábola dada por la ecuación $y^2 = 16x$. Encuentre el foco, el vértice y la directriz de esta parábola.

Ejercicio 2. Sean $\mathcal{P}$ la parábola dada por la ecuación $y^2 = 16x$ y L la recta vertical que pasa por el foco de la parábola. Demuestre que L intersecta a $\mathcal{P}$ en dos puntos y encuentre la distancia entre estos dos puntos.
Sugerencia: Recuerde que el foco de la parábola $y^2 = 4cx$ es el punto $F = (c, 0)$.

Ejercicio 3. Sea $\mathcal{P}$ la parábola dada por la ecuación $y^2 = 4cx$ y sea L la recta vertical que pasa por el foco de la parábola. Demuestre que L intersecta a $\mathcal{P}$ en dos puntos y encuentre la distancia entre estos dos puntos como función de c.
Sol. 4c

Ejercicio 4. Sean $\mathcal{P}$ la parábola dada por la ecuación $y^2 = 4cx$ y L una recta dada por la ecuación $By + D = 0$ con $B \neq 0$. Demuestre que L intersecta a $\mathcal{P}$ en un sólo punto. ¿Cuál es dicho punto?
Sol. $(\frac{D^2}{4cB^2}, \frac{-D}{B})$.

Ejercicio 5. Sean $\mathcal{P}$ la parábola dada por la ecuación $y^2 = 4cx$ y L una recta dada por la ecuación $Ax + By + D = 0$. Demuestre que si $A \neq 0$, entonces L intersecta a $\mathcal{P}$ en exactamente un punto si y sólo si $cB^2 = AD$.
Sugerencia: Despeje x en la ecuación de la parábola y sustituya en la ecuación de la recta. ¿Bajo qué circunstancias la ecuación encontrada tiene solución única?

Ejercicio 6. Sean $\mathcal{P}$ la parábola dada por la ecuación $y^2 = 16x$ y L una recta dada por la ecuación $Ax + By + D = 0$;

(a) Demuestre que el punto $P = (1, 4)$ está en $\mathcal{P}$.

(b) Demuestre que si $A \neq 0$, entonces L intersecta a $\mathcal{P}$ exactamente en P si y sólo si $D = A = -2B$. Concluya de aquí que L necesariamente es la recta $-2Bx + By - 2B = 0$.
Sugerencia: Demuestre que P está en L si y sólo si $A = -4B - D$ y use el ejercicio 5).

Ejercicio 7. Sean $\mathcal{P}$ la parábola dada por la ecuación $y^2 = 36x$ y L una recta dada por la ecuación $x + By + D = 0$;

(a) Demuestre que el punto $P = (1, 7)$ no está en $\mathcal{P}$.

(b) Demuestre que hay exactamente dos rectas que contienen a P e intersectan a $\mathcal{P}$ en exactamente un punto. ¿Cuáles son estas rectas?

Sol. Las rectas $x + By + 9B^2 = 0$ con $B = \dfrac{-7+\sqrt{13}}{18}$ o $B = \dfrac{-7-\sqrt{13}}{18}$.

Sugerencia: Demuestre que P está en L si y sólo si $D = -1 - 7B$ y use el ejercicio 5).

Los siguientes ejercicios son opcionales:

Ejercicio 8. Sean $\mathcal{P}$ la parábola dada por la ecuación $y^2 = 4cx$ y L una recta dada por la ecuación $x + By + D = 0$;

(a) Demuestre que si el punto $P = (a, b)$ es tal que $b^2 < 4ca$, entonces toda recta que pasa por P intersecta a L en exactamente dos puntos.

(b) Demuestre que si el punto $P = (a, b)$ es tal que $b^2 > 4ca$, entonces hay exactamente dos rectas que contienen a P e intersectan a $\mathcal{P}$ en exactamente un punto. ¿Cuáles son estas rectas?

Sol. Las rectas $x+By+cB^2 = 0$ con $B = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$ o $B = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$.

Sugerencia: Demuestre que P está en L si y sólo si $D = -a - bB$ y use el ejercicio 5).

Ejercicio 9. Sean $\mathcal{P}$ la parábola dada por la ecuación $y^2 = 4cx$, $P = (a, b)$ un punto en la parábola, H la recta horizontal que pasa por el punto $P = (a, b)$, N la recta que une a P con el foco de la parábola $\mathcal{P}$ y L la única recta con ecuación $x+By+C = 0$ que intersecta a $\mathcal{P}$ exactamente en P (ver ejercicio 5). Demuestre que si el ángulo en que se intersectan las rectas H y L es α, entonces el ángulo en que se intersectan las rectas N y L es $180^0 - \alpha$.

Sugerencia: Use el ejercicio 5 para encontrar la ecuación de la recta L y después utilice la fórmula del ángulo entre dos rectas.

Esto explica una propiedad fundamental en los espejos parabólicos: Todo haz de luz que incide en el espejo parabólico con una dirección paralela al eje de simetría, al reflejarse en el espejo pasa por el foco.