“ Variable Compleja”

Invierno 2017

Prof.: Pedro Luis del Angel Rodríguez. Of.: K312 luis@cimat.mx

Ayudante: Manuel Sedano Mendoza. Of.: D305 manuel.sedano@cimat.mx

Primer examen

Miércoles 27.09.2017.

Ejercicio 1. Demuestre que si $z = r(cos\ \theta + i\ sen\ \theta)$ para algún $r > 0$ y algún $\theta \in [0, 2\pi)$, entonces ω es una raíz n-ésima de z si y sólo si

$$\omega = r^{\frac{1}{n}}(cos\ \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\ sen\ \frac{\theta + 2k\pi}{n})$$

para algún $0 \leq k \leq n - 1$.
Decimos que la función $z^{1/n}$ es una función multivaluada. Fijar el entero k equivale a escojer una raíz paticular de z y a esto le llamamos elegir una rama de la función $z^{1/n}$.

Ejercicio 2. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = b$, entonces $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = b$ y demuestre mediante un ejemplo que el segundo límite puede existir sin que el primero exista.

Ejercicio 3. Demuestre que si la serie $\{\{a_n\}\}$ es absolutamente convergente y la serie $\{\{b_n\}\}$ es convergente, entonces la serie $\{\{a_n b_n\}\}$ es convergente. Sugerencia: Demuestre primero la afirmación suponiendo que ambas series son absolutamente convergentes y posteriormente adapte esa demostración al caso en que sólo una de ellas es absolutamente convergente

Ejercicio 4. Encuentre la forma más general posible para que el polinomio

$$u(x, Y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

sea una función armónica. Encuentre su *conjugado armónico*, es decir, encuentre $v(x, y)$ tal que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea una función analítica.

Ejercicio 5. Calcule

$$\int_\gamma (z^2 - 1)^{-1} dz.$$

Donde $\gamma(t) = 2e^{it}$, con $t \in [-\pi, \pi]$.