Ejercicios de " Variable Compleja"

2009

Pedro Luis del Angel

primera lista de ejercicios

Entrega: Miércoles 26.08.2009.

Ejercicio 1. Sean $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ funciones continuas, demuestre que $f + g$ y fg también lo son. Demuestre que si además $g(z) \neq 0 \forall z$; entonces $\frac{1}{g}$ también es continua.

Ejercicio 2. Sean $f, g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ dos funciones definidas en un abierto no vacío $U \subset \mathbb{C}$ y suponga que ambas son diferenciables (como funciones de variable compleja) en $p \in U$, demuestre que $f + g$ y fg también son diferenciables en p. Demuestre que si además $g(p) \neq 0$; entonces $\frac{1}{g}$ también es diferenciable en p.

Ejercicio 3. Demuestre que todo polinomio $f \in \mathbb{C}[x]$ es una función diferenciable como función de una variable compleja. Concluya que toda función racional $\frac{f}{g}$ es una función diferenciable en todo punto $z \in \mathbb{C}$ tal que $g(z) \neq 0$.

Ejercicio 4. Recuerde que si $z = x + iy$, entonces $e^z = e^x e^{iy} = e^x(cos\ y + isen\ y)$, en particular $|e^z| = e^x > 0$.

Demuestre que para todo $z \in \mathbb{C}$, existen $r > 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ tales que $z = r(cos\ \theta + i\ sen\ \theta)$.

Ejercicio 5. Demuestre que si $z = r(cos\ \theta + i\ sen\ \theta)$ para algún $r > 0$ y algún $\theta \in [0, 2\pi)$, entonces ω es una raíz n-ésima de z si y sólo si

$$\omega = r^{\frac{1}{n}}(cos\ \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\ sen\ \frac{\theta + 2k\pi}{n})$$

para algún $0 \leq k \leq n - 1$.
Decimos que la función $z^{1/n}$ es una función multivaluada. Fijar el entero k equivale a escojer una raíz paticular de z y a esto le llamamos

elegir una rama de la función $z^{1/n}$.

Ejercicio 6. Sea $f(z)$ una rama de la función multivaluada $\sqrt{z}$. Demuestre que $f(z)$ es una función diferenciable para todo $z \neq 0$ en su dominio de definición. Calcule su derivada.

Ejercicio 7. Sea $f(z) = z^n$ para algún entero $n \geq 1$. Encuentre el dominio de definición de una rama bien definida de la función multivaluada $z^{1/n}$.

Sea $g(z)$ una rama bien definida de la función multivaluada $z^{1/n}$. Demuestre que g es diferenciable y calcule su derivada.

Ejercicio 8. Má generalmente, dadas una función diferenciable $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y su inversa g (o una rama bien definida de la función multivaluada f^{-1} en su caso); demuestre que g es una función diferenciable para todo punto z tal que $g(z) \neq 0$ y calcule su derivada.