Ejercicios de " Variable Compleja"

2017

Prof.: Pedro Luis del Angel Rodríguez. Of.: K312 luis@cimat.mx

Ayudante: Manuel Salgado Mendoza. Of.: D305 manuel.sedano@cimat.mx

segunda lista de ejercicios

Ejercicio 1. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} z_n = A$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i = A$$

Ejercicio 2. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = b$, entonces $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = b$ y demuestre mediante un ejemplo que el segundo límite puede existir sin que el primero exista.

Ejercicio 3. Recuerde que una serie $\{\{a_n\}\}$ se dice *absolutamente convergente* si la sucesión $\{\sum_{i=0}^{n} |a_i|\}$ converge.

Demuestre que si la serie $\{\{a_n\}\}$ es absolutamente convergente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\sigma(n)}$$

esiste para toda biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y que este límite es independiente de la elección de σ.

Ejercicio 4. Demuestre que si la serie $\{\{a_n\}\}$ es absolutamente convergente y la serie $\{\{b_n\}\}$ es convergente, entonces la serie $\{\{a_n b_n\}\}$ es convergente. Sugerencia: Demuestre primero la afirmación suponiendo que ambas series son absolutamente convergentes y posteriormente adapte esa demostración al caso en que sólo una de ellas es absolutamente convergente

Ejercicio 5. Demuestre que si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones analíticas; entonces la función $g(f(x))$ también es analítica.

Ejercicio 6. Demuestre que si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es una función analítica y tanto u como v son de clase C^2; entonces tanto u como v son funciones armónicas, es decir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{0.1}$$

y

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{0.2}$$

Ejercicio 7. Encuentre la forma más general posible para que el polinomio

$$u(x, Y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

sea una función armónica. Encuentre su *conjugado armónico*, es decir, encuentre $v(x, y)$ tal que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea una función analítica.

Ejercicio 8. Demuestre que si $f(z)$ es analítica en $\mathbb{C}$ y $|f(z)| = k$ con k una constante; entonces f es constante.

Ejercicio 9. Demuestre que si $f(z)$ es analítica si y sólo si la función $\overline{f(\overline{z})}$ lo es.