Ejercicios de “ Variable Compleja”

2009

Pedro Luis del Angel

Cuarta lista de ejercicios

Entrega: Miércoles 30.09.2009.

Ejercicio 1. Calcule

$$\int_{|z|=1} e^z z^{-n} dz, \quad \int_{|z|=2} z^n (1-z)^m dz, \quad \int_{|z|=\rho} |z-a|^{-4} |dz| \ (|a| \neq \rho).$$

Ejercicio 2. Demuestre que para todo $n > 2$ y para toda curva cerrada rectificable γ tal que $a \notin \gamma$ se tiene $\int_\gamma (z-a)^{-n} dz = 0$.

Ejercicio 3. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{z}{z-1} \right)^n dz$, donde $\gamma(t) = 1 + e^{it}$.

Ejercicio 4. Demuestre que si $f(x)$ es una función analítica en todo el plano complejo y que satisface

$$|f(z)| < |z|^n$$

para algún entero n y para todo $|z| >> 0$; entonces f es un polinomio.

Ejercicio 5. Sea $f(x)$ una función analítica y suponga que

$$|f(z)| \leq M \qquad \text{en el disco } |z| \leq R\ ,$$

encuentre una cota para $|f^{(n)}(z)|$ en el disco $|z| \leq \rho < R$.

Ejercicio 6. Si $f(z)$ es una función analítica para $|z| < 1$ y además $|f(z)| \leq \dfrac{1}{1-|z|}$, encuentre la mejor aproximación posible para $|f^{(n)}(0)|$ que se puede obtener a partir de la desigualdad de Cauchy.

Ejercicio 7. Demuestre que las derivadas sucesivas de una función analítica f en un punto nunca satisfacen la desigualdad $|f^{(n)}(z)| > n!n^n$. Formule una proposición más precisa del mismo tipo.

Ejercicio 8. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones analíticas que converge uniformemente a f. Demuestre que f es analítica.

Ejercicio 9. Use la fórmula intregral de Cauchy para demostrar el teorema de Cayley-Hamilton:

Si A es una matriz $n \times n$ definida sobre $\mathbb{C}$ y $f(z) = det(zI - a)$ es el polinomio característico de A, donde I es la matriz identidad, entonces $f(A) = 0$.

Ejercicio tomado de un artículo de A. McCarthy, Amer. Math.Monthly, 82 (1975), 390-391.