Ejercicios de " Variable Compleja"

2017

Prof.: Pedro Luis del Angel Rodríguez. Of.: K312 luis@cimat.mx

Ayudante: Manuel Sedano Mendoza. Of.: D305 manuel.sedano@cimat.mx

Quinta lista de ejercicios

Entrega: Lunes 6.11.2017.

Ejercicio 1. Sean f y g dos funciones analíticas con sendos órdenes algebraicos h y k en $z = a$, i.e. f tiene un cero (o un polo) de orden h en $z = a$ y g tiene un cero (o un polo) de orden k en $z = a$. Demuestre que fg tiene orden $h + k$, $\frac{f}{g}$ tiene orden $h - k$ y $f + g$ tiene orden $\leq \max(h, k)$ en $z = a$.

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Decimos que f tiene un cero, un polo o una singularidad esencial en $z = \infty$ si $g(z) := f(\frac{1}{z})$ tiene un cero, un polo o una singularidad esencial en $z = 0$.

Demuestre que si f es analítica en todo el plano complejo y tiene una singularidad no esencial en $z = \infty$; entonces f es un polinomio.

Ejercicio 3. Demuestre que las funciones e^z, $sen(z)$ y $cos(z)$ tienen una singularidad esencial en $z = \infty$.

Ejercicio 4. Decimos que una función es *meromorfa* en $U \subset \mathbb{C}$ si para todo $a \in U$ existe una vecindad $W(a) \subset U$ tal que o bien f es analítica en $W(a)$ o bien f es analítica en $W(a) - \{a\}$ y a es un polo de f.

Demuestre que si f es una función meromorfa en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, entonces f es una función racional, es decir, es el cociente de dos polinomios.

Ejercicio 5. Demuestre que una singularidad de $f(z)$ es removible si $Re(f(z))$ o $Im(f(z))$ son acotadas por arriba o por abajo.
Sugerencia: Use una transformación del tipo $z \mapsto \dfrac{az + b}{cz + d}$.

Ejercicio 6. Demuestre que si $f(z)$ tiene una singularidad aislada en $z = a$; entonces a no puede ser un polo de $e^{f(z)}$.
Sugerencia: f y e^f no pueden tener polos comunes. ¿Por qué?

Ejercicio 7. Determine explícitamente el disco más largo alrededor del origen cuya imagen bajo la función $w = z^2 + z$ es uno a uno.

Ejercicio 8. Determine explícitamente el disco más largo alrededor del origen cuya imagen bajo la función $w = e^z$ es uno a uno.

Ejercicio 9. Demuestre la siguiente generalización del lema de Schwarz:

Si $f(z)$ es analítica para $|z - z_0| < R$ y $|f(z) - f(z_0)| \leq M$ para algún $M > 0$; entonces $|f(z) - f(z_0)| \leq M|z - z_0|/R$ y $|f'(z_0)| \leq M/R$.

Ejercicio 10. Demuestre que si $f(z)$ es analítica para $Im\ z > 0$ e $Im\ f(z) \geq 0$; entonces

$$\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|f(z) - \overline{f(z_0)}|} \leq \frac{|z - z_0|}{|z - \bar{z}_0|}$$

y

$$\frac{|f'(z)|}{Im\ f(z)} \leq \frac{1}{|y|},$$

donde $z = x + iy$.

Ejercicio 11. Calcule el valor de la integral

$$\frac{1}{2\pi\ i} \int_\gamma \frac{ze^z}{(z-a)^3} dz\ ,$$

donde γ es un círculo y a es un punto interior al círculo.

Ejercicio 12. Calcule el valor de la integral

$$\frac{1}{2\pi\ i} \int_\gamma \frac{e^z}{(z^2 + a^2)} dz\ ,$$

donde γ es una curva cerrada simple que contiene en su interior al disco $|z| \leq a$ con a un número real y $a > 1$.

Ejercicio 13. Calcule el valor de la integral

$$\frac{1}{2\pi\ i}\int_{\gamma}\frac{z}{(z^4-1)}dz\ ,$$

donde γ es el círculo $|z-a|=a$, con $a>1$.

Ejercicio 14. Calcule los posibles valores de la intregral

$$\frac{1}{2\pi\ i}\int_{\gamma}\frac{1}{z(z^2-1)}dz\ ,$$

donde γ es una curva cerrada simple que no pasa por ninguno de los puntos $0, 1, -1$.

Ejercicio 15. Definimos el seno hiperbólico (senh) y el coseno hiperbólico (cosh) de θ como sigue:

$$senh\ \theta=\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}, \qquad cosh\ \theta=\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}.$$

Demuestre que

$$\int_0^{2\pi} cos\ (cos\ \theta) cosh\ (sin\ \theta) d\theta = 2\pi.$$

Sugerencia: Use la fórmula integral de Cauchy para la función $f(z)=coz\ z$.

Ejercicio 16. ¿Existe una función analítica del disco unitario $D=\{z\mid |z|<1\}$ en si mismo tal que $f(1/2)=3/4$ y $f'(1/2)=2/3$?

Ejercicio 17. ¿Existe una función analítica del disco unitario $D=\{z\mid |z|<1\}$ en si mismo tal que $|f(z)|<1$ para $|z|<1$, $f(0)=1/2$ y $f'(0)=3/4$? En caso afirmativo, ¿es esta función única?

Ejercicio 18. Demuestre que la transformación más general que deja fijo al origen y preserva distancias es o bien una rotación o bien una rotación seguida de una reflexión en el eje real.

Ejercicio 19. Demuestre que cualquier transformación de Möbius que transforma el eje real en si mismo se puede escribir con coeficientes reales.

Ejercicio 20. Encuentre la transformación de Möbius más general $f(z)$ que manda el círculo unitario con centro en cero en el semiplano superior.