Ejercicios de “ Variable Compleja”

2017

Prof.: Pedro Luis del Angel Rodríguez. Of.: K312 luis@cimat.mx

Ayudante: Manuel Sedano Mendoza. Of.: D305 manuel.sedano@cimat.mx

Sexta lista de ejercicios

Ejercicio 1. Calcule las siguientes integrales:

$a)\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2\, dx}{x^4+x^2+1}$ $\quad b)\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{cos\ x-1}{x} dx$

$c)\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{cos\ 2\theta d\theta}{1-2acos\ \theta+a^2}$, donde $a^2<1$ $\quad d)\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a+cos\ \theta)^2}$, donde $a>1$.

Ejercicio 2. Verifique las siguientes igualdades:

$a)\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{\pi}{4a^3}$ si $a>0$ $\quad b)\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{(log\ x)^3}{1+x^2} dx=0$

$c)\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{cos\ ax}{(1+x^2)^2}=\frac{\pi(a+1)e^{-a}}{4}$ si $a>0$ $\quad d)\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+sen^2\theta}=\frac{\pi}{2(a^2+a)^{\frac{1}{2}}}$ si $a>0$

Ejercicio 3. Verifique las siguientes igualdades:

$a)\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{log\ x}{(1+x^2)^2} dx=-\frac{\pi}{4}$ $\quad b)\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$

$c)\displaystyle\int_{\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\, dx=\frac{\pi}{sen\ ax}$ si $0<a<1$

$d)\ \int_0^{2\pi} log\ sen^2 2\theta\, d\theta=4\int_0^{\pi} log\ sen\,\theta\, d\theta=-4\pi\ log\, 2$

Ejercicio 4. Demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du = \sqrt{\pi}$$

Sugerencia: Defina una rama apropiada de $\sqrt{z}$ en $\mathbb{C} - \mathbb{R}_{\geq 0}$ y use un contorno de integración de la forma $L_1 \cup \gamma_R \cup L_2 \cup \gamma_r$, donde γ_R es un arco de círculo de radio R con centro en el origen, que sale de (R, ϵ) a $(R, -\epsilon)$ recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj, γ_r es un arco de círculo de radio r con centro en el origen, que sale de $(r, -\epsilon)$ a (r, ϵ) recorrido en el sentido de las manecillas del reloj, L_1 es un segmento horizontal de (ϵ, r) a (ϵ, R) y L_2 es un segmento horizontal de $(R, -\epsilon)$ a $(r, -\epsilon)$.

Ejercicio 5. Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Sugerencia: haga el cambio de variable $u = x^2$.

Ejercicio 6. Demuestre que toda reflexión manda círculos en círculos.

Ejercicio 7. Demuestre que la transformación más general que deja fijo al origen y preserva distancias es o bien una rotación o bien una rotación seguida de una reflexión en el eje real.

Ejercicio 8. Sean D el disco unitario con centro en cero y D' un disco de radio r con centro en z_0. Demuestre que toda transformación $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(D) = D'$ es de la forma $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.
Sugerencia: Considere la función $g(z) = \frac{1}{r}(z - z_0)$ y la composición $g \circ f$.

Ejercicio 9. ¿Existe una función analítica del disco unitario $D = \{z \mid |z| < 1\}$ en si mismo tal que $f(1/2) = 3/4$ y $f'(1/2) = 2/3$?

Ejercicio 10. ¿Existe una función analítica del disco unitario $D = \{z \mid |z| < 1\}$ en si mismo tal que $|f(z)| < 1$ para $|z| < 1$, $f(0) = 1/2$ y $f'(0) = 3/4$? En caso afirmativo, ¿es esta función única?

Ejercicio 11. Demuestre que la transformación más general que deja fijo al origen y preserva distancias es o bien una rotación o bien una rotación seguida de una reflexión en el eje real.

Ejercicio 12. Demuestre que cualquier transformación de Möbius que transforma el eje real en si mismo se puede escribir con coeficientes reales.

Ejercicio 13. Demuestre que cualquier transformación de Möbius manda rectas con ángulo de incidencia θ en curvas con ángulo de incidencia θ.

Ejercicio 14. Demuestre que cualquier transformación de Möbius transforma curvas de grado uno o dos en curvas de grado a lo más dos.

Ejercicio 15. Encuentre la transformación de Möbius que manda los puntos $0, i, -i$ en los puntos $1, -1, 0$ respectivamente.

Ejercicio 16. Demuestre que si los vértices v_1, v_2, v_3, v_4 de un cuadrilátero caen en un círculo, entonces se cumple que

$$|v_1 - v_3| \cdot |v_2 - v_4| = |v_1 - v_2| \cdot |v_3 - v_4| + |v_2 - v_3| \cdot |v_1 - v_4|.$$

De una interpretación geométrica de este resultado.

Ejercicio 17. Demuestre que cualesquier cuatro puntos distintos del plano complejo se pueden transformar mediante una transformación de Möbius en los puntos $1, -1, k, -k$; donde k depende de los cuatro puntos elegidos. ¿Cuántas soluciones hay y cómo se relacionan?