Ramas del argumento

Si $z \in \mathbb{C}$, se pidió en la tarea demostrar que existen $r \geq 0$ y $\theta \in [-\pi, \pi)$ tal que $z = re^{i\theta}$, queremos ver cómo se comportan θ y r como funciones de z. Para esto, definimos la función argumento

$$\theta(x+iy) = \begin{cases} \arctan\left(-\frac{x}{y}\right) + \frac{\pi}{2}, & x < 0, y > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \\ \arctan\left(-\frac{x}{y}\right) - \frac{\pi}{2}, & x < 0, y < 0, \end{cases}$$

esta es una función continua definida en el dominio abierto

$$\Omega = \{x + iy \in \mathbb{C} : y \neq 0\} \cup \Omega = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\},$$

conocida como la **rama principal del argumento** y cumple con que

$$z = |z|e^{i\theta(z)}, \qquad \forall z \in \Omega. \tag{1}$$

Notamos que tenemos que pedir que θ esté definida en Ω y no en todo $\mathbb{C}$ para conservar la continuidad pues

$$\lim_{y>0,\ y\to 0} \theta(x+iy) = \pi, \quad \text{y} \quad \lim_{y<0, y\to 0} \theta(x+iy) = -\pi.$$

Más aún, θ es una función diferenciable cuyas derivadas parciales están dadas por

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2},$$

o de manera compacta lo escribimos como[1]

$$d\theta = \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2}.$$

Ahora, podemos notar que la theta aquí definida no es la única que resuelve la ecuación (1), porque de hecho dado $k \in \mathbb{Z}$ y $0 < \alpha < 2\pi$, thenemos que

$$\theta_{k,\alpha} : \Omega_{k,\alpha} \to \mathbb{R},$$

con $\theta_{k,\alpha} = \theta + 2\pi k + \alpha$, resuelve también la ecuación (1), donde

$$\Omega_{k,\alpha} = e^{i\alpha}\Omega = \{e^{i\alpha}z : z \in \Omega\}$$

es el abierto Ω rotado un ángulo α, por lo tanto es simplemente $\mathbb{C}$ quitándole un rayo que parte del origen. Ahora, sabiendo que la exponencial e es periódica con

[1] Observamos que $d\theta$ está definida en todo $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ aunque θ está definida en el abierto más pequeño Ω, ésta es una propiedad mucho más profunda de lo que parece al inicio y es la idea central de una herramienta topológica llamada cohomología.

periodo 2π, podemos observar que las funciones $\theta_{k,\alpha}$ son las únicas soluciones de la ecuación (1) y de hecho

$$d\theta_{k,\alpha} = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2},$$

las funciones $\theta_{k,\alpha}$ son conocidas como **ramas del argumento**.

Ramas del logaritmo

Definamos la función módulo

$$r : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad r(x + iy) = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

y tomemos $\theta : \Omega \to \mathbb{R}$ la rama principal del argumento, entonces podemos definir la **rama principal del logaritmo** como

$$\log : \Omega \to \mathbb{C}, \qquad \log(z) = \log(r(z)) + i\theta(z),$$

y dado que

$$d\log(r(x + iy)) = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2},$$

de lo que $log(r)$ y θ cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann y entonces log es una función holomorfa que cumple con la ecuación

$$e^{\log(z)} = e^{\log(r(z))}e^{i\theta(z)} = z, \tag{2}$$

con lo que es una inversa de la función exponencial. Nótese que estamos diciendo una inversa, pues de hecho podemos tomar cualquier otra rama del argumento y definir

$$\log_{k,\alpha} : \Omega_{k,\alpha} \to \mathbb{C}, \qquad \log_{k,\alpha}(z) = \log(r(z)) + i\theta_{k,\alpha}(z),$$

que satisfacerá la ecuación (2) con lo que es otra inversa de la función exponencial. Se puede ver que éstas son todas las inversas de la exponencial y son conocidas como las **ramas del logaritmo**.

Ramas de funciones multivaluadas

Tanto las ramas del argumento como las ramas del logaritmo son "inversas" de funciones bien definidas en todo $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$), entonces por ejemplo si tenemos una función holomorfa

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

tal que $f'(z_0) \neq 0$ para algún $z_0 \in \mathbb{C}$, entonces como consecuencia del teorema de la función inversa podemos ver que existe una función

$$g : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

que es holomorfa, donde U es un abierto que contiene z_0 y tal que $f(g(z)) = z$, para todo $z \in U$. Por supuesto f puede ser invertible en otros puntos lejos de z_0 con lo que existirán varias funciones definidas en distintos abiertos que inviertan f. Se suele considerar a tales funciones como una sóla que puede tener distintos valores en un mismo punto (como pasa cuando consideras las ramas del logaritmo como una sóla función), a tales funciones se les conoce como **funciones multivaluadas** y escoger una rama bien definida de tal función, es elegir una función holomorfa de entre la familia de funciones que define la función multivaluada.

Ejemplos de funciones multivaluadas con ramas bien definidas es el logaritmo que acabamos de ver y las funciones

$$z \mapsto z^{1/n}$$

que invierten las funciones holomorfas $z \mapsto z^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.