

1. ÁLGEBRA

1a. lista de ejercicios

- (1) Suponga que se tiene una acción $G \times X \rightarrow X$ y demuestre lo siguiente:
- (i) Si la acción es transitiva y $Stab_G(x) = e$ para algún $x \in X$, entonces la acción es regular.
 - (ii) Si G es abeliano y la acción es fiel y transitiva, entonces es regular.
- (2) Si G es un grupo finito que actúa transitivamente en un conjunto finito X , con $|X| = n$, entonces $|G|$ es múltiplo de n y de hecho $|G| = n$ si y sólo si la acción es regular.
- (3) Suponga que $|G| = 2r$, con $r > 1$ impar. Sabiendo que existe un elemento $x \in G$ de orden 2, demuestre que $\rho(x)$ es una permutación impar, donde
- $$\rho : G \rightarrow S_G$$
- es la representación asociada a la acción de G en G por la izquierda. Deduzca que G no es simple.
- (4) Suponga que G es un grupo no abeliano y demuestre lo siguiente
- (i) Para todo $x \in G$, $Z(G) < C_G(x)$.
 - (ii) Si $|G| = p^3$, entonces $|Z(G)| = p$ y G tiene $k(G) = p^2 + p - 1$ clases de conjugación distintas.
- (5) Encuentre las clases de conjugación de $D_4 = \langle x, y \mid x^4 = y^2 = e, yxy = x^3 \rangle$.