## Álgebra

2a. lista de ejercicios

(1) Demuestre que si $G$ es un grupo finito de orden $p^3$, con $p$ primo y $|Z(G)| \geq p^2$, entonces $G$ es abeliano. ¿Se podrá generalizar este resultado? En caso afirmativo, demuéstrelo.

(2) Demuestre que si $H$ es un $p$-subgrupo de Sylow de $G$ y $N = N_G(H)$, entonces $N_G(N) = N$.

(3) Demuestre que si $G$ un grupo de orden $|G| = pq^2$, con $p$ y $q$ primos distintos tales que $p < q$, entonces $G$ tiene un subgrupo normal de orden $q^2$.

(4) Demuestre que si $G$ es un grupo de orden $|G| = pqr$, con $p < q < r$ primos, entonces $G$ tiene un $q$-subgrupo de Sylow normal o un $r$-subgrupo de Sylow normal. Más aún, demuestre que en cualquier caso, $G$ tiene un subgrupo normal de orden $qr$.

(5)* Suponga que $G$ es un grupo finito y que existe un $p$-subgrupo $J \leq G$, no necesariamente Sylow, tal que $C_G(J)$ también es un $p$-grupo. Demuestre que en este caso, si $H$ es un subgrupo normal de $G$ tal que $p \not| |H|$, entonces $|H| \equiv 1 \mod p$.

(6) Suponga que $G$ es un grupo finito de orden par y que existe $x \in G$ de orden 2 y tal que $C_G(x)$ admite un 2-subgrupo de Sylow cíclico. Demuestre que en estas circunstancias, $G$ tiene un subgrupo de índice 2. En particular, si $|G| > 2$, $G$ no es simple.