Álgebra

3a. lista de ejercicios

(1) Encuentre, salvo isomorfismo, todos los grupos abelianos de orden 30.

(2) Encuentre, salvo isomorfismo, todos los grupos abelianos de orden 144.

(3) Suponga que G es un grupo finito.
   (i) Demuestre que si $x \in G$ es un elemento de orden máximo, digamos m, entonces $y^m = 1$ para todo $y \in G$.
   Sugerencia: Demuestre que si existiese $g \in G$ tal que $g^m \neq 1$, entonces existen enteros positivos j, k tales que $o(g^j x^k) > m$.

   (ii) Muestre mediante un ejemplo, que la afirmación anterior puede ser falsa si G no es abeliano.

(4) Dados un grupo abeliano finito G y un subgrupo $H \leq G$, suponga que $K \leq G$ es máximo con respecto a que $H \cap K = \{1\}$ y que existe $g \in G$ tal que $g^p \in K$ para algún primo p; demuestre que en tal caso $g \in HK$.
Sugerencia: Demuestre que si $g \notin K$, entonces existen $h \in H$ y $k \in K$ tales que $h = kg^r$ para algún entero r no divisible por p.

(5) Suponga que G es un grupo abeliano finito, $H KleG$ son subgrupos de G y K es máximo con respecto a que $H \cap K = \{1\}$. Demuestre que en estas circunstancias, las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   (i) $G \cong H \times K$.

   (ii) Para cualquier primo p y cualesquiera elementos $g \in G$, $h \in H$ y $k \in K$ tales que $g^p = hk$, existe $h' \in H$ tal que $h = (h')^p$.

Sugerencia: Para demostrar $(ii) \Leftarrow (i)$ suponga que $H \times K < G$ es un subgrupo propio, considere un elemento de orden primo en $G/(H \times K)$ y aplique el ejercicio precedente.

(6) Demuestre que si G es un grupo abeliano finito y $x \in G$ es un elemento de orden máximo, entonces $< x >$ es un factor directo de G.
Sugerencia: Demuestre que si $H =< x >$ y $K \leq G$ máximo con respecto a que $H \cap K = \{1\}$, entonces $G \cong H \times K$. Considere independientemente los casos en que $p||H|$ y $p \not| |H|$.

(7) Demuestre que el grupo $\mathbb{R}$, con la operación suma, no tiene subgrupos finitos distintos del grupo trivial $\{0\}$. En particular, todo subgrupo cíclico de $\mathbb{R}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

(8) Demuestre que $\mathbb{Z}$ es un subgrupo normal del grupo aditivo $\mathbb{R}$ y que el grupo cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es isomorfo a S^1.

(9) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ dos números reales positivos y $H =< a >$, $N =< b >$ los subgrupos generados por a y b respectivamente.

a) Demuestre que $H \cap N \neq \{0\}$ si y sólo si $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

b) Suponga que $H \cap N \neq \{0\}$. Demuestre que en tal caso, el grupo

$$G =< a, b >\subset \mathbb{R}$$

generado por a y b es de hecho un grupo cíclico.

Sugerencia: Por el inciso a), $\dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ con $(m, n) = 1$. Sean s, t enteros tales que $sm + nt = 1$ y sea $\gamma = sb + ta \in G$. Demuestre que G es de hecho el grupo cíclico generado por γ.

(10) Sean a, b dos números reales positivos, $H =< a >, N =< b >$ y $G =< a, b >$ subgrupos aditivos de $\mathbb{R}$.

a) Demuestre que si $H \cap N = \{0\}$, entonces a y b son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$ (i.e., pensando a $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$ espacio vectorial de dimensión infinita).

b) Demuestre que si $H \cap N = \{0\}$, entonces la aplicación natural

$$\phi : N \to \mathbb{R}/H \cong S^1$$

dada por

$$N \to \mathbb{R} \to \frac{\mathbb{R}}{H}$$

es un homomorfismo inyectivo de grupos.