ÁLGEBRA

4a. lista de ejercicios

(1) Considere el anillo $R = \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$. Encuentre un ideal máximo izquierdo de R. ¿Es ideal derecho? ¿Cuál es el cociente $R/\mathcal{M}$? Donde $\mathcal{M}$ es el ideal máximo izquierdo que usted encontró.

(2) Un anillo R se dice *anillo de división* si todo elemento no cero tiene un inverso bilateral (necesariamente único). Si R es conmutativo, diremos que R es un *campo*

Demuestre que el anillo

$$\mathbb{H} := \{a+bi+cj+dk \mid i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j\}$$

de los cuaterniones (reales) es un anillo de división que no es conmutativo.

(3) Dados un campo K y dos polinomios cualesquiera $f, g \in k[x]$, sabemos que existen polinomios $q, r \in k[x]$ tales que

$$f = qg + r$$

donde $r = 0$ o $grad(r) < grad(g)$.

Demuestre que r y q son únicos.

(4) Dados un anillo R y $a, b \in R$, decimos que $d = (a, b)$ es el *máximo común divisor* de a y b si

i) $d|a$ y $d|b$.

ii) Si $s|a$ y $s|b$, entonces $s|d$.

Sean R un dominio de ideales principales, $a, b \in R$ y $d = (a, b)$ su máximo común divisor. Demuestre que existen $m, n \in R$ tales que $am + bn = d$.

(5) Sean R un anillo de ideales principales, $a, b \in R$ y $x \in R$ un elemento irreducible. Demuestre que si x divide a ab y $(x, a) = 1$, entonces x divide a b.