Álgebra

6a. lista de ejercicios

(1) Demuestre que la cerradura entera de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}(i)$ es
$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \in \mathbb{Q}(i) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Sugerencia: Recuerde que el polinomio irreducible de $z = a + ib$ es $x^2 + 2ax + a^2 + b^2$ (sobre $\mathbb{Q}$), por tanto $a+ib$ pertenece a la cerradura entera si y sólo si $2a \in \mathbb{Z}$ y $a^2+b^2 \in \mathbb{Z}$. Escriba $a = m/2$ y $b = p/q$ con $(m, 2) = (p, q) = 1$ y observe que para todo entero k se cumple que si $k \equiv 1 \bmod 4$ o $k \equiv 3 \bmod 4$, entonces $k^2 \equiv 1 \bmod 4$.

(2) Demuestre el criterio de irreducibilidad de Eisenstein cuando A es un dominio de ideales principales y $K = Coc(A)$. ¿Se puede generalizar al caso en que A es un DFU y $K = Coc(A)$?

(3) Demuestre que si $\varphi : R \to S$ es un monomorfismo de anillos (con unidad), entonces $\varphi_* : R[x] \to S[x]$, dada por $\varphi_*(\sum_j r_j x^j) = \sum_j \varphi(r_j)x^j$ tambien es un monomorfismo. Demuestre también que si φ es un isomorfismo, entonces φ_* también lo es.

(4) Demuestre que si L/K es una extensión y
$$Gal(L/K) = \{\varphi : L \to L \mid \varphi \quad \text{es un homomorfismo de campos tal que} \quad \varphi|_K = id_K\},$$
entonces $Gal(L/K)$ es un grupo bajo la composición.

(5) Encuentre $Gal(L/K)$ en los siguientes casos:

a) $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(\omega)$, donde $\omega^3 = 1$ y $\omega \neq 1$.

b) $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{11})$.

c) $K = \mathbb{F}_3(x)$, $L = K(y)/(y^3 - x)$.

(6) Considere el polinomio $f(x) = x^7 - 13 \in \mathbb{Q}[x]$.

a) Demuestre que las raíces de f son
$$\sqrt[7]{13}, \sqrt[7]{13}\omega, \sqrt[7]{13}\omega^2, \sqrt[7]{13}\omega^3, \sqrt[7]{13}\omega^4, \sqrt[7]{13}\omega^5 \text{ y } \sqrt[7]{13}\omega^6,$$
donde ω es una raíz del polinomio irreducible $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$. Deduzca que $\sqrt[7]{13}$ es la única raíz real de f.

b) Encuentre $Gal\left(\mathbb{Q}(\sqrt[7]{13})/\mathbb{Q}\right)$.

c) Demuestre que el campo de descomposición de f es $L = \mathbb{Q}(\sqrt[7]{13}, \omega)$ y calcule $[L : \mathbb{Q}]$.

d) Encuentre $Gal(L/\mathbb{Q})$.

(7) Considere el polinomio $f(x) = x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{F}_x[x]$, donde $\mathbb{F}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$.

a) Demuestre que f es irreducible en $\mathbb{F}_3[x]$.

b) Encuentre un campo de descomposición L de f y determine $[L : \mathbb{F}_3]$.
Sugerencia: Considere el campo $M = \mathbb{F}_3[x]/(f)$ y factorice $f(x)$ en $M[x]$.

c) Encuentre $Gal(L/\mathbb{F}_3)$.

(8) Demuestre que si $p \in \mathbb{Z}$ es primo, entonces $|\mathbb{F}_p^*| = p - 1$ y deduzca que $a^p = a$ para todo $a \in \mathbb{F}_p$. Concluya que $n^p \equiv n \bmod p$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(9) Demuestre que si $f(x) = \sum_{j=0}^{d} a_j x^j \in \mathbb{F}_p[x]$ es tal que $f'(x) \equiv 0$, entonces existe $g(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ tal que $f(x) = g(x)^p$. En particular f no es irreducible.
Sugerencia: Compare términos y deduzca que $a_j = 0$ para todo $0 \leq j \leq d$ tal que $p \not| j$.

(10) Demuestre que si $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ es irreducible, entonces $f'(x) \not\equiv 0$.

(11) Concluya que si $L/\mathbb{F}_p$ es el campo de descomposición de un polinomio irreducible $f \in \mathbb{F}_p[x]$, entonces todas las raíces de f en L son distintas.
Sugerencia: Escriba $f(x) = c\prod_{i=1}^{r}(x - \alpha_i)^{\beta_i} \in L[x]$ con $c \in \mathbb{F}_p$ y $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$ y demuestre que $\beta_i = 1$ para toda i.