Álgebra

7a. lista de ejercicios

**Definición.** Dado un dominio entero $A$, decimos que $A$ es de *característica* $> 0$ si existe $n > 0$ tal que $n \cdot a = 0$ para todo $a \in A$. Si no existe ningún entero positivo $n$ con esta propiedad decimos que $A$ es de *característica cero*. Si $A$ es de característica positiva y $p = \min\{n \in \mathbb{N} | n \cdot a = 0 \quad \forall a \in A\}$ decimos que $A$ es de *característica* $p$.

(1) Demuestre que si $K$ es un campo de característica cero, entonces la función

$$\mathbb{Z} \longrightarrow F$$

$$k \longmapsto k{\cdot}1$$

es un monomorfismo. Concluya que en este caso existe un monomorfismo $\mathbb{Q} \to K$. Al campo $\mathbb{Q}$ se le llama el *campo primo* de $K$.

(2) Dado un dominio $A$ de característica positiva, demuestre lo siguiente:
a) $n \cdot a = 0$ para todo $a \in A$ si y sólo si $n{\cdot}1 = 0$.

b) Si $A$ es de característica $p > 0$, entonces $p$ es un número primo.

(3) Demuestre que todo campo finito es un dominio de característica $p > 0$ para algún primo $p$.

(4) Demuestre que si $F$ es un campo de característica $p > 0$, entonces la función

$$\mathbb{Z} \longrightarrow F$$

$$k \longmapsto k{\cdot}1$$

es un homomorfismo de anillos. Encuentre su núcleo.

(5) Concluya que si $F$ es un campo de característica $p > 0$, entonces existe un monomorfismo $\mathbb{F}_p \to F$. A $\mathbb{F}_p$ se le llama el *campo primo* de $F$.

(6) Demuestre que si $F$ es un campo finito de característica $p > 0$, entonces la extensión $\mathbb{F}_p \subset F$ es una extensión finita. Concluya que de hecho es una extensión algebraica.

(7) Demuestre que si $F$ es un campo finito, entonces toda extensión algebraica finita de $F$ es una extensión separable. Concluya que todo campo finito es perfecto.

Sugerencia: Use el hecho de que si $L/F$ es una extensión finita y $\mathbb{F}_p$ es el campo primo de $F$, entonces $L/\mathbb{F}_p$ es finita.

(8) Considere $f(x) = x^3 + px^2 + q \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio irreducible con raíces $\alpha, \beta$ y $\gamma$ (necesariamente distintas) en alguna extensión finita de $\mathbb{Q}$ y sea $\Delta(f) = (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \gamma^2) = -4p^3 - 27q^2 \in \mathbb{Q}$; demuestre lo siguiente:

a) El campo de descomposición de $f$ sobre $\mathbb{Q}$ es $L = \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{\Delta(f)}$.

b) $|Gal(L/\mathbb{Q})| \geq 3$.

c) Si $\sqrt{\Delta(f)} \in \mathbb{Q}$, entonces $Gal(L/K) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, en tanto que si $\sqrt{\Delta(f)} \notin \mathbb{Q}$, entonces $Gal(L/K) \cong S_3$.

(9) Demuestre que si $L/K$ es una extensión normal y separable con grupo de Galois $Gal(L/K)$ cíclico de orden $n$, entonces para cada divisor $d$ de $n$ existe una única extensión de Galois $E/K$, con $E \subset L$, de grado $\dfrac{n}{d}$.