Ejercicios de Álgebra

2012

Pedro Luis del Angel

Primera lista de ejercicios

Ejercicio 1. Sea V un espacio vectorial real de dimensión n. Dados $A \in GL_n(\mathbb{R}),\ w \in V$ definimos

$$\begin{array}{rccc} T_{A,w}: & V & \to & V \\ & v & \mapsto & Av + w \end{array}$$

i) Demuestre que $\mathbb{A} = \{T_{A,w} \mid A \in GL_n(\mathbb{R}), w \in V\}$ es un grupo no conmutativo bajo la composición de funciones.
ii) Demuestre que $\mathbb{B} = \{T_{A,w} \mid A \in GL_n(\mathbb{Q}), w \in V\}$ es un (sub)grupo no conmutativo de $\mathbb{A}$ bajo la composición de funciones.
iii) Demuestre que $\mathbb{T} = \{T_{1,w} \mid 1 = id_V, w \in V\}$ es un (sub)grupo conmutativo tanto de $\mathbb{A}$ como de $\mathbb{B}$ bajo la composición de funciones.

Ejercicio 2. Sea G un grupo. Demuestre que el elemento identidad e de G es único.

Ejercicio 3. Sea G un conjunto con una operación binaria $\bullet$ tal que

i) $a \bullet b \in G$ para toda pareja $a, b \in G$.
ii) Existen $e_i, e_d \in G$ tales que $e_i \bullet a = a \bullet e_d = a$ para todo $a \in G$.
iii) Parra todo $a \in G$ existen $x, y \in G$ tales que

$$\begin{array}{rcl} a \bullet x & = & e_d \\ c \bullet a & = & e_i \end{array}$$

iv) $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$ para todo $a, b, c \in G$.

Demuestre que $e_i = e_d$ y que para todo $a \in G$, los elementos x, y mencionados en el inciso iii) son iguales y por tanto G es un grupo.

Ejercicio 4. Sea G un grupo y $H \subset G$ no vacío tal que si $a, b \in H$, entonces $ab^{-1} \in H$. Demuestre que H es un subgrupo de G.

Ejercicio 5. Decimos que un grupo G es *abeliano* si para todo $a, b \in G$ se cumple $a \bullet b = b \bullet a$.

Sea $(G, \bullet)$ un grupo abeliano. Demuestre que

$$(a \bullet b)^n = a^n \bullet b^n$$

para todo $a, b \in G$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 6. Sea $(G, \bullet)$ un grupo tal que $a^2 = e$ para todo $a \in G$. Demuestre que $(G, \bullet)$ es un grupo abeliano.

Ejercicio 7. Al grupo de simetrías de un polígono regular de n lados se le llama el *grupo diédrico* de orden $2n$ y se le denota como D_{2n}.

a) Demuestre que si n es impar y $a \in D_{2n}$ satisface $ab = ba$ para todo $b \in D_{2n}$, entonces $a = e$, donde e es la identidad del grupo.
b) Demuestre que si n es par entonces existe $a \in D_{2n}$, $a \neq e$, tal que $ab = ba$ para todo $b \in D_{2n}$.
c) Sea n par. Encuentre todos los elementos $a \in D_{2n}$ con la propiedad de que $ab = ba$ para todo $b \in D_{2n}$.

Ejercicio 8. Dado un grupo G, definimos el *centro* de G como el subconjunto

$$Z(G) := \{g \in G \mid gx = xg \text{ para toda } x \in G\}.$$

Demuestre que $Z(G)$ es un subgrupo de G.

Ejercicio 9. Sean G un grupo y $H = \{a \in G \mid a^2 = e\}$, donde $e \in G$ es la identidad. Demuestre que si G es abeliano, entonces H es un subgrupo. Muestre con un ejemplo que la afirmación puede no ser cierta si G no es abeliano.

Ejercicio 10. Sea G un grupo abeliano, no necesariamente finito, y $H = \{a \in G \mid a^{n(a)} = e\}$ para algún entero $n(a)$ que depende de a. Demuestre que H es un subgrupo de G.

a este subgrupo se le conoce como la torsión de G y coincide con G si G es un grupo finito.

Ejercicio 11. Sea G un grupo cíclico. Demuestre que todos sus subgrupos son también cíclicos.

Ejercicio 12. Sea G un grupo que no tiene subgrupos propios no triviales (i.e., distintos del subgrupo $\{e\}$). Demuestre que G es un grupo cíclico. Más aún, demuestre que en este caso G tiene orden p con p un número primo.

Ejercicio 13. Sean $G = \mathbb{R} - \{0\}$ con $*$ el producto usual de números reales y $H = \mathbb{R}$ con $+$ la suma usual en $\mathbb{R}$.

a) Demuestre que existe un homomorfismo $F : G \to H$ (i.e., una función F que satisface $F(a * b) = a + b$ para todo $a, b \in G$.
b) Demuestre que ningún homomorfismo $F : G \to H$ puede ser inyectivo.

Ejercicio 14. Sean A y B dos subgrupos de un grupo abeliano G. Demuestre que si $|A| = n$ y $|B| = m$ con $(n, m) = 1$, entonces $|AB| = nm$. ¿Cuál es el orden de AB si $(m, n) \neq 1$?

Ejercicio 15. Sean G un grupo abeliano finito y sean $a_1, \cdots a_n$ todos los elementos de G. Demuestre que $x = a_1 a_2 \cdots a_n$ satisface $x^2 = e$.

Ejercicio 16. Sea G un grupo abeliano de orden n y sean $a_1, \cdots a_n$ sus elementos. Sea $x = a_1 \cdots a_n$ el producto de todos ellos. Demuestre que:

a) Si G tiene un único elemento $b \neq e$ tal que $b^2 = e$, entonces $x = b$.
b) Si G tiene más de un elemento $b \neq e$ tal que $b^2 = e$, entonces $x = e$.
c) Si n es impar, entonces $x = e$.

Ejercicio 17. Sea G un grupo. ¿Bajo qué condiciones es la función $\phi : G \to G$ dada por $\phi(a) = a^{-1}$ un homomorfismo de grupos? ¿Cuál es su nucleo?

Ejercicio 18. Sean G un grupo abeliano y $n \in \mathbb{Z}$ un entero. Demuestre que la función $\phi : G \to G$ dada por $\phi(a) = a^n$ es un homomorfismo. ¿Cuál es su nucleo?

Ejercicio 19. Sean G un grupo y $A(G)$ el conjunto de todas las transformaciones biyectivas de G en si mismo (como conjunto).

a) Demuestre que $A(G)$ es un grupo bajo la composición de funciones.
c) Definimos una función $L : G \to A(G)$ como sigue

$$\begin{array}{rlcllcl} L & : G & \to & A(G) & & & \\ & g & \mapsto & L_g & : G & \to & G \\ & & & & x & \mapsto & xa^{-1} \end{array}$$

Demuestre que L es un homomorfismo inyectivo.

Ejercicio 20. Sean G y H dos grupos. Suponga que G es abeliano y que $\phi : G \to H$ es un homomorfismo suprayectivo. Demuestre que H es un grupo abeliano.

Ejercicio 21. Sean G un grupo y $a \in G$. Definimos $\sigma_a : G \to G$ como $\sigma_a(g) := aga^{-1}$.

a) Demuestre que σ_a es un isomorfismo.
b) Si $A(G)$ denot al grupo de todas las aplicaciones inyectivas de G en si mismo, demuestre que $\sigma : G \to A(G)$ dada por $\sigma(a) := \sigma_a$ es un homomorfismo de grupos. ¿Cuál es el nucleo de σ?

Ejercicio 22. Dado un grupo G, a los isomorfismos de G en si mismo se les llama *automorfismos*. Demuestre que el conjunto $Aut(G)$ de los automorfismos de G es un grupo bajo la composición.

Ejercicio 23. Sea $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. S^1 es un grupo bajo la multiplicación usual en $\mathbb{C}$.

a) Sea $\phi : \mathbb{Z} \to S^1$ un homomorfismo de grupos. Demuestre que si $Im\ \phi$ es un subconjunto cerrado de S^1, entonces es un subconjunto finito.
b) Demuestre que si $Im\ \phi$ no es un subconjunto cerrado, entonces existe x_0 en S^1 y una sucesión $\{a_n\} \subset \mathbb{Z}$ tal que $lim_{n\to\infty}\phi(a_n) = x_0$.