Ejercicios de Álgebra

2012

Pedro Luis del Angel

segunda lista de ejercicios: Entrega miércoles 15 de febrero.

Ejercicio 1. Dado un grupo G y un subgrupo H de G decimos que H es un *subgrupo normal* de G si $x^{-1}Hx \subset H$ para todo $x \in G$.

Sean G un grupo y M, N dos subgrupos normales de G. Demuestre que MN es un subgrupo de G.

Ejercicio 2. Sean G un grupo y M, N dos subgrupos normales de G. Demuestre que si $M \cap N = \{e\}$, entonces $mn = nm$ para todo $m \in M$ y para todo $n \in N$.

considere $mnm^{-1}n^{-1}$.

Ejercicio 3. Sean G un grupo y H un subgrupo de G. Demuestre que si toda clase lateral derecha de H en G es también una clase lateral izquierda de H en G, entonces $aHa^{-1} = H$ para todo $a \in G$.

Ejercicio 4. Sean G un grupo abeliano finito y sean $a_1, \cdots a_n$ todos los elementos de G. Demuestre que $x = a_1 a_2 \cdots a_n$ satisface $x^2 = e$.

Ejercicio 5. Usando el ejercicio anterior, demuestre que para todo primo p se tiene $(p-1)! \cong -1 \ mod \ p$. Este se conoce como el teorema de Wilson.

Ejercicio 6. Recuerde que el grupo diédrico de orden 2n es el grupo D_n generado por dos elementos a, b distintos de la identidad y tales que $a^2 = b^n = e$ y $aba^{-1} = b^{-1}$. Demuestre que $H = \{e, b, b^2, b^3\} \subset D_4$ es un subgrupo normal de D_n. ¿Cuántos elementos tiene el grupo cociente D_n/H?

Ejercicio 7. Más generalmente, demuestre que $H = \{e, b, \cdots, b^{n-1}\} \subset D_n$ es un subgrupo normal de D_n. ¿Cuántos elementos tiene el grupo cociente D_n/H?

Ejercicio 8. Sean G y H dos grupos, $\phi : G \to H$ un homomorfismo suprayectivo de grupos y $N < G$ un subgrupo normal. Demuestre que $\phi(N) < H$ es un subgrupo normal.

Ejercicio 9. Un subgrupo $N < G$ se dice *característico* si $\phi(N) \subset N$ para todo automorfismo de G. Demuestre que

a) Todo subgrupo característico de G es un subgrupo normal de G.
b) Si M y N son subgrupos característicos de G, entones MN también es un subgrupo característico de G.
c) Encuentre un ejemplo de un grupo G y un subgrupo normal N tal que N **no** es un subgrupo característico de G.

Ejercicio 10. Sea G un grupo de orden pm con p un primo que no divide a n. Demuestre que si H es un subgrupo normal de G de orden p, entonces necesariamente H es un subgrupo característico.

Ejercicio 11. Si G es un grupo (no necesariamente abeliano) de orden $p^r n$ con p un primo que no divide a n y H es un subgrupo normal de G de orden p^r, demuestre que H es un subgrupo característico.

Ejercicio 12. Demuestre que el grupo $\mathbb{R}$, con la operación suma, no tiene subgrupos finitos distintos del grupo trivial $\{0\}$. En particular, todo subgrupo cíclico de $\mathbb{R}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Ejercicio 13. Demuestre que $\mathbb{Z}$ es un subgrupo normal del grupo aditivo $\mathbb{R}$ y que el grupo cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es isomorfo a S^1.

Ejercicio 14. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ dos números reales positivos y $H =< a >$, $N =< b >$ los subgrupos generados por a y b respectivamente.

a) Demuestre que $H \cap N \neq \{0\}$ si y sólo si $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$
b) Suponga que $H \cap N \neq \{0\}$. Demuestre que en tal caso, el grupo $G =< a, b > \subset \mathbb{R}$ generado por a y b es de hecho un grupo cíclico.

Sugerencia: Por el inciso a), $\dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ con $(m, n) = 1$. Sean s, t enteros tales que $sm + nt = 1$ y sea $\gamma = sb + ta \in G$. Demuestre que G es de hecho el grupo cíclico generado por γ.

Ejercicio 15. Sean a, b dos números reales positivos, $H =< a >, N =< b >$ y $G =< a, b >$ subgrupos aditivos de $\mathbb{R}$.

a) Demuestre que si $H \cap N = \{0\}$, entonces a y b son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$ (i.e., pensando a $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$ espacio vectorial de dimensión infinita).
b) Demuestre que si $H \cap N = \{0\}$, entonces la aplicación natural ϕ dada por

$$N \to \mathbb{R} \to \frac{\mathbb{R}}{H}$$

es un homomorfismo inyectivo de grupos.

Ejercicio 16. Recuerde que en la primer tarea demostró el siguiente ejercicio:
Sea $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. S^1 es un grupo bajo la multiplicación usual en $\mathbb{C}$.

a) Sea $\phi : \mathbb{Z} \to S^1$ un homomorfismo de grupos. Demuestre que si $Im\ \phi$ es un subconjunto cerrado de S^1, entonces es un subconjunto finito.
b) Demuestre que si $Im\ \phi$ no es un subconjunto cerrado, entonces existe x_0 en S^1 y una sucesión $\{a_n\} \subset \mathbb{Z}$ tal que $lim_{n\to\infty}\phi(a_n) = x_0$.

Ejercicio 17. Un subgrupo $G < \mathbb{R}$ se dice discreto si para todo punto $g \in G$ existe una vecindad $U \subset \mathbb{R}$ tal que $U \cap G = \{g\}$.

Sean a, b, H, N y G como en el ejercicio 15. Demuestre que si $H \cap N = \{0\}$, entonces G no es un subgrupo discreto de $\mathbb{R}$.
Sugerencia: Considere la aplicación natural $N \to \mathbb{R}/\mathbb{H}$ y use los ejercicios 13, 15 y 16 b).

Ejercicio 18. Demuestre que todo subgrupo discreto de $\mathbb{R}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$.