Ejercicios de “ Álgebra ”

2011

Pedro Luis del Angel

Tercera lista de ejercicios: Entrega, miércoles 22 de febrero

Ejercicio 1. Sea G un grupo. Definimos de manera inductiva subgrupos D^iG y L_iG como sigue:

$$\begin{aligned} D^0G &:= G \\ D^{i+1}G &:= [D^iG, D^iG] \\ L_0G &:= G \\ L_{i+1}G &:= [L_i, G] \end{aligned}$$

Demuestre que $D^iG < L_iG$ para todo i.

Ejercicio 2. Sean G un grupo y D^iG como en el ejercicio 1; demuestre que

$$D^iG/D^{i+1}G$$

es un grupo abeliano para todo $i \geq 0$.

Ejercicio 3. Sean G un grupo y L_iG como en el ejercicio 1; demuestre que
a) $L_{i+1}G \triangleleft L_iG$ es un subgrupo normal para todo $i \geq 0$.
b) $L_iG/L_{i+1G} < Z(G/L_{i+1}G)$, donde $Z(H)$ es el centro de H.

Ejercicio 4. Con la notación introducida en el ejercicio 1, decimos que un grupo G es *soluble* si $D^iG = \{e\}$ para algún $i \geq 0$ y decimos que G es *nilpotente* (en el curso le hemos llamado fuertemente soluble) si $L_iG = \{e\}$ para algún $i \geq 0$.
Demuestre que
a) Si G es un grupo abeliano, entonces G es un grupo nilpotente.
b) Si G es un grupo nilpotente, entonces G es un grupo soluble.
Sugerencia: Use el ejercicio 1.

Ejercicio 5. Demuestre que todo subgrupo y toda imagen homomorfa de un grupo nilpotente (respectivamente soluble) es nilpotente (respectivamente soluble).

Ejercicio 6. Sean G un grupo y $N \triangleleft G$ un subgrupo normal de G; demuestre que si N y G/N son solubles si y sólo si G es soluble.

Ejercicio 7. Un subgrupo $N < G$ se dice *característico* si $\phi(N) \subset N$ para todo automorfismo de G. Demuestre que

a) Todo subgrupo característico de G es un subgrupo normal de G.
b) Si M y N son subgrupos característicos de G, entones MN también es un subgrupo característico de G.
c) Encuentre un ejemplo de un grupo G y un subgrupo normal N tal que N **no** es un subgrupo característico de G.

Ejercicio 8. Demuestre que D^iG y L_iG son subgrupos característicos de G.

Ejercicio 9. Sean G un grupo y $Z = Z(G)$ el centro de G. Demuestre que si G/Z es nilpotente, entonces G es nilpotente.

Ejercicio 10. Demuestre que si G es un grupo soluble, entonces existe un subgrupo normal $N \triangleleft G$ distinto de $\{e\}$ tal que N es un grupo abeliano.

Ejercicio 11. Demuestre que si G es un grupo nilpotente, entonces $Z(G) \neq \{e\}$.

Ejercicio 12. Demuestre que si G es un grupo tal que $|G| = p^r$ para algún primo p, entonces $Z(G) \neq \{e\}$.

Ejercicio 13. Demuestre que si G es un grupo tal que $|G| = p^r$ para algún primo p, entonces G es nilpotente.
Sugerencia: Use inducción en r y los ejercicios 12 y 9

Ejercicio 14. Sean G un grupo y $\mathcal{C}$ la colección de todos los subconjuntos de G de cardinalidad $k \leq |G|$. Considere la acción natural

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ (g, X) & \mapsto & gX \end{array}$$

Demuestre que si $\mathcal{O}$ es una órbita de esta acción, entonces existe a lo más un subgrupo $H < G$ de cardinalidad k tal que $H \in \mathcal{O}$. Demuestre también que en este caso $Stab_G(H) = H$.

Ejercicio 15. Sean G y $\mathcal{C}$ como en el ejercicio 14, con $|G| = p^r m$, p primo, $(p, m) = 1$ y $k = p^s$ para una s fija, $1 \leq s \leq r$.
Tomando $q = p^{r-s}m$, demuestre que
a) $|\mathcal{C}| = \binom{p^s q}{p^s} \equiv q \pmod{pq}$,
b) La órbita $\mathcal{O}$ contiene un subgrupo de G si y sólo si $p^{r-s+1} \not| \, |\mathcal{O}|$.
Sugerencia: Use el ejercicio 14 y recuerde que $\binom{p^s n}{p^s} \equiv n \pmod{pn}$ para todo n y que $|G| = |\mathcal{O}| \cdot |Stab_G(X)|$, donde $X \in \mathcal{O}$ arbitrario.

Ejercicio 16. Sean G, $\mathcal{C}$, p, m, r y s como en el ejercicio 15. Demuestre que existe al menos una órbita $\mathcal{O}$ de G que contiene a un subgrupo de G.
Sugerencia: Por 15 a), existe al menos una órbita $\mathcal{O}$ tal que $p^{r-s+1} \not| \, |\mathcal{O}|$.

Ejercicio 17. Demuestre el siguiente

Teorema (Sylow) Sea G un grupo de orden $p^r m$ con p primo, $p \not| \, m$ y $r \geq 1$. Si $1 \leq s \leq r$, entonces el número n de subgrupos de G de orden p^s satisface $n \equiv 1 (\text{mod } p)$. En particular existen subgrupos de G de orden p^m, llamados p-subgrupos de Sylow de G.
Sean G y $\mathcal{C}$ como en el ejercicio 15 y sea n el número de órbitas que contienen un subgrupo de G. Demuestre que si $\mathcal{O}$ es una de estas órbitas, entonces $|\mathcal{O}| = p^{r-s}m$. Concluya de aquí que $|\mathcal{C}| = np^{r-s}m \equiv p^{r-s}m (\text{mod } p^{r-s+1})$.

Ejercicio 18. Si H es un grupo de orden p^m con p primo y actúa en un conjunto finito y no vacío X tal que $p \not| \, |X|$, entonces X tiene un punto fijo.
Sigerencia: Recuerde que $|G| = |\mathcal{O}| \cdot |Stab_G(x)|$, donde $x \in \mathcal{O}$.

Ejercicio 19. Demuestre el siguiente
Teorema (Sylow) Sea G un grupo de orden $p^r m$ con p primo, $p \not| \, m$, $r \geq 1$ y sean $P < G$ un p-subgrupo de Sylow de G y H un subgrupo de G de orden p^s, con $1 \leq s \leq r$; entonces existe $x \in G$ tal que $H \subset xPx^{-1}$. En particular, los p-subgrupos de Sylow de G son conjugados entre si.
Sugerencia: Considere la acción de H (por multiplicación izquierda) en el conjunto de clases laterales G/P y use el ejercicio 18.