# Ejercicios de Álgebra

2012

Pedro Luis del Angel

**Cuarta lista de ejercicios. Entregar el lunes 5 de marzo.**

Ejercicio 1. Un anillo $R$ se dice *anillo de división* si todo elemento no cero tiene un inverso bilateral (necesariamente único). SI $R$ es conmutativo, diremos que $R$ es un *campo*

Demuestre que el anillo

$$\mathbb{H} := \{a+bi+cj+dk \mid i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik == j\}$$

de los cuaterniones (reales) es un anillo de división.

Ejercicio 2. Un *homomorfismo de anillos* es una función $f : R \to S$ que es un homomorfismo de grupos y tal que $f(ab) = f(a)f(b)$. El *núcleo* $ker\ f$ de un homomorfismo de anillos es su núcleo como homomorfismo de grupos.

Demuestre si $f : R \to S$ es un homomorfismo de anillos, entonces $ker\ f$ es un ideal bilateral.

Ejercicio 3. Describa a $Hom\ (\frac{\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}}, \frac{\mathbb{Z}}{p^m\mathbb{Z}})$

Ejercicio 4. Un ideal $p$ se dice *ideal primo* si siempre que $ab \in p$ se tiene que ó bien $a \in p$ o bien $b \in p$.

Demuestre que un ideal $(x) \subset \mathbb{Z}$ es un ideal primo si y sólo si $x \in \mathbb{Z}$ es un número primo.

Ejercicio 5. Sean $R$ un anillo e $I \subset R$ un ideal. Definimos el *radical* de $I$ como el conjunto

$$\sqrt{I} := \{f \in R \mid f^n \in I \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

Demuestre que $\sqrt{I}$ es un ideal.

Sugerencia: Use la fórnula del binomio de Newton

Ejercicio 6. Recuerde que un ideal $I \subset R$ se dice un *ideal primo* si para todo $x, y \in R$, $xy \in I$ si y sólo si $x \in I$ o $y \in I$. Recuerde también que un anillo $R$ se dice un *dominio entero* si para todo $x, y \in R$ se cumple $xy = 0$ si y sólo si $x = 0$ o $y = 0$.

Demuestre que $I \subset R$ es un ideal primo si y sólo si $R/I$ es un dominio entero.

Ejercicio 7. Dado un anillo $R$, definimos el *centro* de $R$ como

$$Z(R) = \{a \in R \mid ab = ba \; \forall b \in R\}.$$

Sea

$$\mathbb{H} := \{a + bi + cj + dk \mid i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j\}$$

el anillo de los cuaterniones (reales), encuentre $Z(\mathbb{H})$.

Ejercicio 8. Sea $R$ un anillo conmutativo con unidad y $A \in M_{n\times n}(R)$ una matriz $n \times n$ sobre $R$. Demuestre que $A$ es invertible si y sólo si $det\ (A) \in R$ es una unidad.

Ejercicio 9. Demuestre que si $R$ es un anillo simple, entonces la característica de $R$ es o bien cero o bien un número primo.

Ejercicio 10. Sea $R$ un anillo conmutativo y $p, q, r$ ideales de $R$ con $p$ ideal primo; demuestre que si $qr \subset p$, entonces o bien $q \subset p$ o bien $r \subset p$.