Ejercicios de Álgebra

2012

Pedro Luis del Angel

Quinta lista de ejercicios. Entregar el lunes 23 de abril

Ejercicio 1. Sea $f : R \to S$ un homomorfismo de anillos.

a) Demuestre que para todo ideal $I \subset S$, el conjunto $f^{-1}(I) \subset R$ es de hecho un ideal. En particular, $Ker\ f$ es un ideal en R.
b) Más aún, demuestre que si $\mathcal{P}$ es un ideal primo en S, entonces $f^{-1}(\mathcal{P})$ es un ideal primo en R.
c) ¿Qué podemos decir acerca de $f^{-1}(\mathcal{M})$ si $\mathcal{M} \subset S$ es un ideal máximo?

Ejercicio 2. Sean R un anillo, $p \subset R$ un ideal primo y $S = R - p$ el sistema multiplicativo correspondiente. Demuestre que existe una correspondencia biyectiva entre los ideales primos de $R_p := S^{-1}R$ y los ideales primos de R contenidos en p.

Ejercicio 3. Sea R un anillo y T la colección de todos los divisores de cero en R, es decir

$$T = \{a \in R \mid \text{existe } b \in R \text{ tal que } ab = 0\}.$$

Demuestre que $S := R - T$ es un conjunto multiplicativo.

Al anillo $S^{-1}R$ se le llama el *anillo de cocientes totales* de R.

Encuentre el anillo de cocientes totales de $\dfrac{\mathbb{Z}}{10\mathbb{Z}}$.

Un elemento $x \in R$ se dice **nilpotente** *si existe un natural $n \geq 1$ tal que $x^n = 0$.*

Ejercicio 4. Sean R un anillo conmutativo y $x \in R$ un elemento nilpotente; demuestre que $1 - x$ es invertible.

Dado un anillo R, decimos que R es un anillo **noetheriano** *si toda cadena ascendente de ideales tiene longitud finita, es decir, si para toda cadena ascendente de ideales*

$$I_0 \subset I_1 \subset \ldots$$

existe un índice j tal que $I_l = I_j$ para todo $l \geq j$.

Ejercicio 5. Demuestre que $\mathbb{Z}$ es un anillo noetheriano.

Ejercicio 6. Demuestre que para todo campo K, el anillo de polinomios $K[x]$ es un anillo noetheriano.

Ejercicio 7. Demuestre que de hecho, si R es un dominio euclidiano, entonces R es un anillo noetheriano.

Ejercicio 8. Más aún, demuestre que si R es un dominio de ideales principales (DIP), entonces R es noetheriano.
Sugerencia: Recuerde que todo DIP es un dominio de factorización única.

Ejercicio 9. De un ejemplo de un anillo conmutativo que no sea noetheriano.

Ejercicio 10. Demuestre que el anillo $M_n(R)$ de las matrices $n \times n$ sobre un anillo noetheriano R es noetheriano.

Ejercicio 11. Sean A un anillo noetheriano y $f : A \longrightarrow A$ un homomorfismo suprayectivo de anillos; demuestre que f es inyectivo.
Sugerencia: Considere la cadena $\ker\ f \subset \ker\ f^2 \subset \cdots$