Ejercicios de Álgebra

2011

Pedro Luis del Angel

Sexta lista de ejercicios

Ejercicio 1. Sean K un campo, V un K-espacio vectorial de dimensión finita, T una transformación K-lineal de V en V y $R = K[X]$ el anillo de polinomios en una variable con coeficientes en K. Definimos una *multiplicación* $R \times V \longrightarrow V$ como sigue:

$$(a_0 + a_1 X + \cdots + a_n x^n) \cdot v := (a_0 I + a_1 T + \cdots + a_n T^n)(v),$$

donde I es la transformación identidad en V.

a) Demuestre que con esta multiplicación, V se convierte en un R-módulo finitamente generado.
b) Demuestre que V es un R-módulo de torsión, es decir $Tor_R(V) = V$.
Sugerencia: Demuestre que si $v \in V - \{0\}$, entonces $\{v, Xv, \cdots, X^n v, \cdots\}$ es l.d.

Ejercicio 2. Sean K, V, $R = K[X]$ y $T : V \longrightarrow V$ como en el ejercicio 1. Demuestre que existen elementos $v_1, \cdots, v_s \in V$ tales que

$$V = Rv_1 + \cdots + Rv_s,$$

con $Ann_R(v_i) = (d_i(X))$ para algunos $d_i(X) \in R$ con la propiedad de que $d_i(X) \mid d_{i+1}(X)$ para todo $1 \leq i \leq s-1$.

Ejercicio 3. Sean K, V, $R = K[X]$ y $T : V \longrightarrow V$ como en el ejercicio 1 y supongamos que V es un R-módulo cíclico (ver ejercicio 2), es decir

$$V = Rv$$

para algún vector $v \in V$ con $Ann_R(v) = (d(x)) \subset R$.

Demuestre que si $d(x) = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, entonces existe una base de V con respecto a la cual la transformación lineal T está dada por la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. Más generalmente, demuestre que si K es un campo, V es un K-espacio vectorial de dimensión finita, $T : V \longrightarrow V$ es una transformación K-lineal y $R = K[X]$ con la multiplicación $R \times V \longrightarrow V$ definida como en el ejercicio 1; entonces existe una base de V con respecto a la cual la transformación T está dada por una matriz de la forma

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & C_s \end{pmatrix},$$

donde cada C_i es una *matriz compañera*

$$C_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix}$$

de un polinomio $d_i(X) = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ con la propiedad de que $d_i(X) \mid d_{i+1}(X)$ para todo $1 \leq i \leq s-1$.

A esta representación se le conoce como la *forma canónica racional* de T.

Ejercicio 5. Encuentre la forma canónica racional de $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 6. Sean K, T, V y $R = K[X]$ como en el ejercicio 1 y supongamos que existe $v \in R$ tal que $V = Rv$ y $Ann_R(v) = (X - \lambda)^n$. Demuestre que existe una K-base de V con respecto a la cuál la transformación lineal T está representado por una matriz de la forma

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 & \\ 1 & \lambda & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & \lambda & \\ & 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Sugerencia: Demuestre que el conjunto $\{v, (X-\lambda)v, (X-\lambda)^2 v, \cdots, (X-\lambda)^{n-1}v\}$ es K-linealmente independiente.

Ejercicio 7. Más generalmente, si K, T, V y R son como en el ejercicio 1 y K es algebraicamente cerrado, existe una base de V con respecto a la cuál la transformación lineal T se representa mediante una matriz en *forma canónica de Jordan*, es decir, de la forma

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & J_s \end{pmatrix},$$

donde cada J_i es una matriz

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & 0 & & \\ 1 & \lambda_i & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & 1 & \lambda_i & & \\ & 0 & & 1 & \lambda_i & \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8. Encuentre la forma canónica de Jordan de $T : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

con respecto a la base canónica de $\mathbb{C}^3$.