Ejercicios de Álgebra Moderna

Pedro Luis del Angel

Octava lista de ejercicios

Entrega: Lunes 28/05/2012.

Ejercicio 1. Sea G un grupo cíclico y V un espacio vectorial real de dimensión finita. Demuestre que si $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ es una representación irreducible, entonces $dim\ V \leq 2$.

Sugerencia: Encuentre el polinomio característico de $T = \rho(\alpha)$, donde α es un generador de G, y construya un espacio de dimensión ≤ 2 que sea T invariante.

Ejercicio 2. Sea G un grupo finito y V un espacio vectorial real de dimensión finita. Demuestre que existe un producto interno en V que es G invariante, es decir, que satisface

$$< \rho(g)(v), \rho(g)(w) >=< v, w >$$

para todo $g \in G$ y para toda pareja $v, w \in V$. ¿Cuál será una condición necesaria para poder afirmar algo semejante en el caso de un grupo infinito?

Ejercicio 3. Demuestre que si G es un grupo finito, entonces toda representación real $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ es totalmente indescomponible, es decir

$$V \cong \oplus_i W_i$$

donde los W_i son subespacios vectoriales reales G invariantes tales que las representaciones inducidas

$$\rho_i : G \longrightarrow W_i$$

son representaciones irreducibles.

Ejercicio 4. Sea $\rho : S_3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la representación canónica. Encuentre la descomposición de esta representación como suma directa de representaciones irreducibles.

Ejercicio 5. Sean G el grupo cíclico de orden 15 y $\rho : G \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la representación dada por

$$\rho(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde α es un generador de G. Encuentre la descomposición de esta representación como suma directa de representaciones irreducibles.

Ejercicio 6. Demuestre la siguiente versión del lema de Schur para representaciones reales:
Si V y W son dos representaciones irreducibles reales y $\phi : V \longrightarrow W$ es un G-homomorfismo, entonces
a) Si $\phi \not\equiv 0$, entonces ϕ es un isomorfismo.
b) Si ϕ es un isomorfismo distinto de $\lambda \cdot I$, entonces el polinomio característico de ϕ coincide con el mínimo y es de grado 2.

Ejercicio 7. Demuestre que toda representación irreducible real de un grupo abeliano tiene dimensión ≤ 2.