Seminario de Geometría Algebraica
Cohomología étale

Pedro Luis del Angel

Contents

Chapter 1

Morfismos y topologías de Grothendieck.

En este capítulo daremos las definiciones técnicas necesarias para poder introducir la topología étale. Además se dará una descripción general de lo que son las topologías de Grothendieck.
Salvo indicación expresa de lo contrario, todos los anillos y módulos considerados serán noetherianos.

1.1 Morfismos Planos.

El primer concepto técnico necesario para estudiar morfismos étales, es el concepto de morfismo plano, que a su vez requiere hablar de lo que son los módulos planos.

Definición. Sea A un anillo y M un A-módulo. Diremos que M es A-

plano (o simplemente *plano* cuando no haya lugar a confusión) si, para toda sucesión exacta corta de A-módulos

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0,$$

la sucesión

$$0 \longrightarrow N' \otimes M \longrightarrow N \otimes M \longrightarrow N'' \otimes M \longrightarrow 0$$

es exacta.
En la definición precedente, basta considerar sucesiones exactas de la forma

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0,$$

donde I es un ideal de A, pues todo A-módulo admite una filtración donde los diferentes cocientes son isomorfos a A/I para algún ideal I.

Proposición 1.1.1 *Sean A y B anillos, $f : A \to B$ un morfismo de anillos, M un A-módulo y N un B-módulo.*
a) (Extensión de base) Si M es A-plano, entonces $M \otimes_A B$ es B-plano.
b) (Transitividad) Si B es una A-algebra plana (i.e., es una A-algebra que es a su vez un A-módulo plano) y N es B-plano, entonces N es A-plano.
c)(Localización) M es A-plano si y sólo si M_p es A_p-plano, para todo ideal

primo p de A.
d) Sea $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una sucesión exacta corta de A-módulos. Si M' y M'' son planos, entonces M es plano. Por otro lado, si M y M'' son planos, entonces M' es plano.

DEMOSTRACIÓN. a) Basta recordar que $(M \otimes_A B) \otimes_B N \cong \mathcal{M} \otimes_A N$.
b) Es suficiente considerar sucesiones exactas cortas de la forma $0 \to I \to A \to A/I \to 0$ para ideales I de A y trabajar con la sucesión exacta corta correspondiente para IB.
c)
d) Considere el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N'\otimes M' & \longrightarrow & N\otimes M' & \longrightarrow & N''\otimes M' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & N'\otimes M & \longrightarrow & N\otimes M & \longrightarrow & N''\otimes M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & N'\otimes M'' & \longrightarrow & N\otimes M'' & \longrightarrow & N''\otimes M'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Lema 1.1.2 *Si A es un anillo local, entonces un A-módulo finitamente generado M es plano si y sólo si M es libre.*

DEMOSTRACIÓN. I) Suponga que M es plano y de trosión, entonces la sucesión exacta

$$0 \to m \to A \to k = A/m \to 0$$

donde m es el ideal maximo de A, induce una sucesión exacta

$$0 \to M \otimes m \to M \otimes A \to M \otimes k \to 0.$$

Siendo torsión, $M \otimes k = 0$; por otro lado, $M \otimes m \cong mM$ y $M \otimes A \cong M$, por lo que tenemos $mM \cong M$, que por el lema de Nakayama es imposible, salvo que $M = 0$.
II) En general, sea $M' := Tor(M)$ el subgrupo de torsión de M. Entonces tenemos una sucesión exacta corta $0 \to M' \to M \to M/M' \to 0$, donde M es plano y M/M' es libre de tosión. Como el anillo es local, entonces M/M' es de hecho libre, por tanto plano. De la proposición precedente, inciso d) se concluye que M' es plano, pero M' es un módulo de torsión, por tanto de I) se sigue que $M' = 0$, es decir $M = M/M'$ es libre. $\diamond$

Definición. Un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ entre variedades se dice *plano*, si,

para todo punto $x \in X$, $f_*\mathcal{O}_{x,X}$ es un $\mathcal{O}_{y,Y}$ módulo plano. Aqui $y = f(x)$.

Ejemplo 1.1.2.1 Toda inmersión abierta es un morfismo plano, pues evidentemente $\mathcal{O}_{y,Y}$ es un $\mathcal{O}_{y,Y}$-módulo plano.

Ejemplo 1.1.2.2 Sea X una variedad y sea $\mathcal{E}$ un haz localmente libre de rango $r+1$ sobre X. Construyamos la gavilla de O_X-álgebras $Sym\ \mathcal{E} := \oplus_k Sym^k\ \mathcal{E}$, donde $Sym^k\ \mathcal{E} := \mathcal{E} \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}/S_k$, con S_k es el grupo de permutaciones de k puntos y el producto tensorial tiene k factores.

No es difícil ver que $Sym^k\,\mathcal{E}$ es localmente isomorfo al subespacio de polinomios homogéneos de grado k en $r+1$ variables, con el isomorfismo dado por

$$v_{i_1} \otimes \cdot \otimes v_{i_k} \to x_{i_1} \cdots x_{i_k},$$

donde los v_j son una base local de $\mathcal{E}$.
Como $Sym\,\mathcal{E}$ es una $\mathcal{O}_X$-álgebra graduada, podemos definir las variedades Spec $(Sym\,\mathcal{E})$ y $\mathbb{P}(\mathcal{E}) :=$ Proj $(Sym\,\mathcal{E})$.
El morfismo natural p de Spec $(Sym\,\mathcal{E})$ en X (al igual que el de $\mathbb{P}(\mathcal{E}) :=$ Proj $(Sym\,\mathcal{E})$ en X) es plano, pues $p_*\mathcal{O}_{z,Sym\,\mathcal{E}} = \mathcal{E}_{p(z)}$, que es un $\mathcal{O}_{p(z)}$ módulo libre, luego plano.

Ejemplo 1.1.2.3 Si S es una superficie reglada con base una curva C, entonces el morfismo natural de S en C es un morfismo plano, pues $S = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ para alguna gavilla localmente libre de rango 2.

Observación. Es posible demostrar (vease por ejemplo ([Hartshorne, Robin], III.9.9) que un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ (donde Y es entero y noetheriano y X es un subesquema cerrado de $\mathbb{P}^n_Y$) es un morfismo plano, si y solo si el polinomio de Hilbert de las fibras (que es el único polinomio P_t con la propiedad de que $P_y(m) = H^0(X_y, \mathcal{O}_{X_y}(m))$ para $m >> 0$) $X_y := X \times_k$ Spec $k(y)$ de f en $y \in Y$ es independiente de y. en particular todas las fibras tienen la misma dimensión.

Ejemplo 1.1.2.4 Considere a la variedad $S \subset \mathbb{A}^3$ definida mediante la ecuación

$$y^2 = x(x-1)(x-z),$$

el morfismo natural de S en $\mathbb{A}^1$ dado por $(x, y, z) \to z$ es un morfismo plano (la familia de curvas cúbicas es plana pues todas tienen el mismo polinomio de Hilbert, $p(n) = n$, como se desprende del teorema de Riemann-Roch).

1.2 Morfismos lisos.

Considere un morfismo $f : X \longrightarrow Y$, este morfismo induce un morfismo natural de gavillas

$$f^*\Omega_Y \longrightarrow \Omega_X,$$

a la gavilla conucleo de dicho morfismo se le llama la gavilla de diferenciales relativas y se le denota como $\Omega_{X/Y}$.

Definición. Un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ entre variedades se dice *liso, de dimensión relativa* n, si
a) f es plano,
b) Para toda subvariedad $Z \subset Y$ irreducible, se cumple que dim $f^{-1}(Z) =$ dim Z $+ n$,
c) $\mathrm{rang}_{k(x)}\, \Omega^1_{X/Y} \otimes k(x) = n$ para todo punto $x \in X$.

Ejemplo 1.2.0.5 Todo encaje abierto es un morfismo liso de dimensión relativa cero

.

Ejemplo 1.2.0.6 Sea $p : X \longrightarrow \text{Spec}\ \ k$ el morfismo estructural de la variedad X en el campo k. Si X es una variedad no singular, entonces p es un morfismo liso de dimensión relativa $n = \dim X$.
En efecto, Ω^1_X es dual al haz tangente y éste es localmente libre de rango n pues X es lisa.

Ejemplo 1.2.0.7 Consideremos nuevamente la variedad S definida mediante la ecuación

$$y^2 = x(x-1)(x-z),$$

el morfismo natural de S en $\mathbb{A}^1$ dado por $(x, y, z) \to z$ es un morfismo plano, pero no es liso, pues la fibra en $z = 1$ es la curva singular $y^2 = x(x-1)^2$. En particular, el haz tangente relativo a la fibra en $z = 1$ en el punto $(1, 0, 1)$ tiene dimensión 2, por tanto el haz $\Omega_{S/\mathbb{A}^1}$ tiene rango dos en dicho punto, pero la dimensión de las fibras es uno, luego el morfismo no es liso.

Ejemplo 1.2.0.8 Siguiendo con el ejemplo anterior, sean $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_2, k = \mathbb{F}_2$ y $R = \mathbb{Z}_2$. Considere al R-esquema $\mathcal{X}$ definido mediante la ecuación $y^2 = x(x-1)(x+1)$. La fibra generica de $\mathcal{X}$ es $X := \mathcal{X} \otimes_R \mathbb{K} = \text{Spec}\ \mathbb{Q}_2[x, y, z]/(y^2 - x(x-1)(x+1))$ y la fibra cerrada es $\bar{X} := \mathcal{X} \otimes_R k = \text{Spec}\ \mathbb{F}_2[x, y, z]/(y^2 - x(x-1)(x+1))$, por tanto la familia el morfismo estructural de $\mathcal{X} \to \text{Spec}\ R$ es plano, pero no liso, porque la fibra cerrada es singular, dado que $1 = -1$ en $\mathbb{F}_2$.

Ejemplo 1.2.0.9 Más generalmente, sea X una curva no singular definida sobre un campo $\mathbb{K}$ y sea R algún anillo de valuación discreta con campo de cocientes igual a k. El modelo $\mathcal{X}$ de la curva X sobre R es una variedad regular de dimensión 2, pero el morfismo estructural de $\mathcal{X}$ en $\text{Spec}\ \ R$ no necesariamente es liso, eso depende de que la fibra $\bar{X}$ en el punto cerrado sea o no regular.

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & \mathcal{X} & \longleftarrow & \bar{X} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}\ \mathbb{Q}_2 & \longrightarrow & \text{Spec}\ \mathbb{Z}_2 & \longleftarrow & \text{Spec}\ \mathbb{F}_2 \end{array}$$

Ejemplo 1.2.0.10 Sea X una variedad definida sobre un campo k y sea $\mathcal{E}$ una gavilla localmente libre de rango $n+1$, el morfismo natural de $f : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow X$ es liso de dimensión relativa $n = \text{rang}\mathcal{E} - 1$.
En efecto, las condiciones a), b) y c) son locales, por tanto, podemos suponer que $X = \text{Spec}\ A$, con A un anillo local. Entonces $\mathcal{E}$ es libre de rango $n+1$ y por tanto $\mathbb{P}(\mathcal{E}) = \mathbb{P}^n_A$, así la fibra de f en $x \in X$ es simplemente $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \times_k \text{Spec}\ k(x) = \mathbb{P}^n_A \times_k \text{Spec}\ k(x) = \mathbb{P}^n_{k(x)}$, luego b) y c) son inmediatas (el haz tangente relativo tiene dimensión n en todo punto!). La condicion a) se sigue, como antes, del hecho de que $\mathcal{O}_{y,\mathbb{P}(\mathcal{E})} = \mathcal{E}_{f(y)}$.

Como consecuencia del ejemplo anterior, si S es una superficie reglada con base una curva C, entonces el morfismo natural de S en C es un morfismo liso de dimensión relativa 1, pues $S = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ para alguna gavilla localmente libre de rango 2.

Proposición 1.2.1 *Sea $f : X \to Y$ un morfismo, con $n = \dim X - \dim Y \geq 0$. Son equivalentes:*
a) f es liso de dimensión relativa n.
b) $\Omega_{X/Y}$ es localmente libre de rango n en X.

La proposición precedente es una consecuencia inmediata del lema siguiente:

Lema 1.2.2 *Sea A un dominio local entero noetheriano, con campo residual k y campo de cocientes K. Si M es una A-módulo finitamente generado y si*

$$\dim_k M \otimes_A k = \dim_{\mathbb{K}} M \otimes_A \mathbb{K} = r,$$

entonces M es libre de rango r.

Demostración. Por el lema de Nakayama, como $\dim_k M \otimes_A k = r$, entonces se tiene una sucesión exacta

$$0 \to R \to A^r \to M \to 0,$$

con R libre de torsión. Multiplicando dicha sucesión por $\mathbb{K}$ se obtiene

$$0 \to R \otimes_A \mathbb{K} \to \mathbb{K}^r \to M \otimes_A \mathbb{K} \to 0,$$

pero $\dim_{\mathbb{K}} M \otimes_A \mathbb{K} = r$ y el último homomorfismo no es cero, asi que es un isomorfismo, por tanto $R \otimes_A \mathbb{K} = 0$, pero R es libre de torsión, por tanto $R = 0$ ◇

1.3 Morfismos étale.

Definición. Un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ entre variedades se dice *étale*, si f es liso de dimensión relativa cero.

Observación. Si $f : X \to Y$ es étale, entonces $\Omega^1_{X/Y} = 0$, pues f es de dimensión relativa cero (ver ejemplo 1.2.0.6). Pero $\Omega^1_{X/Y} = I_\Delta / I_{\Delta^2}$, luego $I_\Delta = I_{\Delta^2}$ y por Nakayama, $I_\Delta = 0$, es decir, f es un morfismo separado.

Observación. Si f es étale, entonces f es casi-finito, es decir, las fibras de f son conjuntos finitos, pues f es liso de dimensión relativa cero.

Definición. Un morfismo $f : X \to Y$ se dice *no ramificado* si para todo $x \in X$ se cumple $m_{f(x)}\mathcal{O}_x = m_x$ y $k(x)/k(f(x))$ es una extensión algebraica separable.

Lema 1.3.1 *Sea $f : X \to Y$ un morfismo de k-esquemas. Supongamos que $\dim X \geq \dim Y$, entonces las condiciones siguientes son equivalentes:*
a) f es étale.
b) f es plano y $\Omega_{X/Y} = 0$.
c) f es plano y no ramificado.

DEMOSTRACIÓN. a) $\Longrightarrow$ b) es consecuencia del lema 1.2.1.
b) $\Longrightarrow$ a)
Para todo morfismo $f : X \to Y$ se tiene una sucesión exacta:

$$f^*\Omega_{Y/k} \to \Omega_{X/k} \to \Omega_{X/Y} \to 0$$

si multiplicamos por $k(x) = k$ para un punto cerrado (k-racional) $x \in X$, se tiene entonces la sucesión exacta

$$f^*\Omega_{Y/k} \otimes k \to \Omega_{X/k} \otimes k \to \Omega_{X/Y} \otimes k \to 0. \tag{1.1}$$

Por hipotesis, $\Omega_{X/Y} = 0$, por tanto el homomorfismo $f^*\Omega_{Y/k} \otimes k \to \Omega_{X/k} \otimes k$ es suprayectivo. Como $\dim f^*\Omega_{Y/k} \otimes k = \dim Y \leq \dim X = \dim \Omega_{X/k} \otimes k$, este homomorfismo es de hecho un isomorfismo, es decir, $\dim X = dimY$, por tanto se cumplen las condiciones de la definición de un morfismo étale.
b) Lra c). Esta es una condición local, por lo que podemos suponer $p = x \in X = \text{Spec } A \to Y = \text{Spec } B$, $q = f(x) \in Y$, esto induce un homomorfismo $f^\# : B \to A$ y por tanto un homomorfismo $f^\#_p : B_q \to A_p$. Como f es plano, entonces A_p es B_q plano, por tanto, la sucesión exacta corta

$$0 \to qB_q \to B_q \to B_q/qB_q = k(f(x)) \to 0$$

induce un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & qB_q & \to & B_q & \to & k(f(x)) & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow_\alpha & \\ 0 \to & qA_p & \to & A_p & \to & A_p \otimes k(f(x)) & \to 0 \end{array}$$

donde α es inyectiva ó identicamente cero; como este último no es el caso ($\alpha(1) = 1$), entonces α es inyectiva. Por otro lado, $A_p \otimes k(f(x))$ es un dominio entero que es algebraico sobre $k(x)$, pues $\dim A_p = \dim A = \dim B = \dim B_q$ y f es étale, entonces $A_p \otimes k(f(x))$ es un campo, que es una extensión algebraica (forzosamente separable -ver [Hartshorne, Robin], II. 8.6A). Pero si $A_p \otimes k(f(x))$ es un campo, entonces qA_p es un ideal máximo. Como A_p es local, entonces $qA_p = p$ es *el* ideal máximo de A_p y por tanto $A_p \otimes k(f(x)) = k(x)$, es decir, f es no ramificado.
c) $\Longrightarrow$ a). Para comenzar, el morfismo f tiene fibras finitas (con lo que la segunda condición en la definición de étale queda satisfecha), pues si $x \in f^{-1}(y)$ es el punto genérico de la fibra en y, entonces $k(x)/k(y)$ es algebraica y separable (finitamente generada, pues nuestros esquemas son de tipo finito), por tanto la extensión es finita, es decir, la dimensión de la fibra es cero. Por otro lado, si x es el punto genérico de X e $y = f(x)$, el razonamiento anterior nos dice que $\dim X = \dim Y$, por tanto, para que se cumplan todas las condiciones de la definición de un morfismo liso de dimensión relativa cero, sólo necesitamos verificar que $\dim_{k(x)} \Omega_{X/Y} \otimes k(x) = 0$ para todo $x \in X$. Para demostrar lo anterior, observemos que, por hipotesis, $m_{f(x)}\mathcal{O}_x = m_x$, por tanto se tiene un morfismo inyectivo $m_x/m_x^2 \to m_{f(x)}/m_{f(x)}^2$, lo cual induce un morfismo suprayectivo $f^*\Omega_{Y/k(x)} \otimes k(x) \twoheadrightarrow \Omega_{X/k} \otimes k$, de donde, por la exactitud de la sucesión 1.1, se concluye que $\Omega_{X/Y} \otimes k(x) = 0$ para todo $x \in X$ ◇

Ejemplo 1.3.1.1 Sea k un campo y sea K una extensión finita no ramificada de k, entonces el morfismo natural $\text{Spec } K \longrightarrow \text{Spec } k$ es un morfismo étale.

Ejemplo 1.3.1.2 La inclusión $\mathbb{Z}_l \to \mathbb{Z}_l[\epsilon]/(\epsilon^2)$ induce un morfismo natural

$$f : \text{Spec } \mathbb{Z}_l[\epsilon]/(\epsilon^2) \to \text{Spec } \mathbb{Z}_l$$

el cual no es étale, pues es ramificado en cero. Observe que en este ejemplo ambos campos residuales son simplemente $\mathbb{F}_{itl}$.

Ejemplo 1.3.1.3 Sea C una curva proyectiva lisa con campo de funciones racionales $K = K(C)$ y sea F una extensión finita no ramificada de K, sea Y la única curva proyectiva lisa cuyo campo de funciones racionales es F, entonces el morfismo natural de Y en C es un morfismo étale.

Ejemplo 1.3.1.4 Si en el ejemplo anterior sustituimos la curva C por una superficie S la conclusión ya no es verdadera, pues dos superficies birracionalmente equivalentes tienen el mismo campo de funciones, en particular, si sustituimos la superficie Y por una dilatación de la misma a lo largo de un punto, el campo de funciones racionales no cambia, pero el morfismo $Y \to S$ no resulta ni siquiera casi-finito, pues la fibra excepcional tiene por imagen un único punto en S.

A continuación se presentan algunos ejemplos de morfismos que *no* son étale, pues son planos pero ramificados ó bien no ramificados pero no planos.

Ejemplo 1.3.1.5 Sea $f : \text{Spec } k[u] \to \text{Spec } k[T]$ el morfismo inducido por el homomorfismo $u \to T^2$, entonces f es un morfismo plano, pero no es étale pues es ramificado en $u = 0$.

Ejemplo 1.3.1.6 Sean $\bar{X} = \text{Spec } (k[x] \oplus k[y])$ y $Y = \text{Spec } (k[x,y]/(xy)) \cong \bar{X}$. Sea $f : \bar{X} \to Y$ el morfismo inducido por el homomorfismo $k[x,y]/(xy) \to k[x] + k[y]$ dado por $\lambda + xp(x) + yq(y) \to (\lambda + xp(x), \lambda + yq(y))$.

El morfismo f es no ramificado, pero no es plano. Si fuese plano, la inclusión $(x) \subset A = k[x,y]/(xy)$ induciríuna inclusión de $(x) \otimes_A (k[x] \oplus k[y])$ en $k[x] \oplus k[y]$, pero la imagen de $(x) \otimes y$ en $k[x] \oplus k[y]$ es cero.

Ejemplo 1.3.1.7 Sea $\bar{X}$ un esquema sobre un campo k de característica $p > 0$ y sea $\bar{X}^{(p)} := \bar{X} \times_F \text{Spec } k$, donde $F_k : k \to k$ es el morfismo de Frobenius dado por $F_k(a) = a^p$.

Si definimos $F_{X/k} : \mathcal{O}_{\bar{X}} \to \mathcal{O}_{\bar{X}}$ mediante la fórmula $F_{X/k}(\sum a_I x^I) = \sum a_I (x^I)^p$, entonces el morfismo de Frobenius absoluto $F(\phi) = \phi^p$ factoriza a traves de F_k y $F_{X/k}$. El morfismo $F : \bar{X} \to \bar{X}$ es altamente ramificado, pues de hecho $\Omega^1_{X/X^p} = \Omega^1_{X/k}$. Sin embargo, si $\bar{X}$ es liso, F es un morfismo plano, pues $k[T] \cong k[T^p] \oplus Tk[T^p] \oplus \cdots \oplus T^{p-1}k[T^p]$ es un $k[T^p]$ módulo libre, por tanto plano.

Proposición 1.3.2 *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos morfismos planos, entonces*

a) la composición $g \circ f : X \to Z$ es un morfismo plano.
b) Si además f es liso de dimensión relativa n y g es liso de dimensión relativa m, entonces $g \circ f$ es liso de dimensión relativa $n + m$.
c) Si f y g son étales, entonces $g \circ f$ es étale.

Demostración. Como la propiedad de ser étale (respectivamente plano o liso) es una propiedad local, entonces podemos suponer que $X = \text{Spec } A$, $Y = \text{Spec } B$ y $Z = \text{Spec } C$.
a) En estas circunstancias, A es un $B-$módulo plano y B es un $C-$módulo plano, por tanto A es un $C-$módulo plano pues $A \otimes_C M \cong A \otimes_B (B \otimes_C M)$ para todo $C-$módulo M.
b) Para toda subvariedad irreducible $W \subset Z$ se tiene que $\dim(g \circ f)^{-1}(W) = \dim g^{-1}(f^{-1}(W)) = m + \dim f^{-1}(W) = m + n + \dim W$, y $\Omega^1_{X/Z} \cong \Omega^1_{X/Y} \otimes \Omega^1_{Y/Z}$, por tanto $\text{rang}_{k(x)}\, \Omega^1_{X/Z} \otimes k(x) = n + m$ para todo punto $x \in X$.
c) Finalmente, si la extensión de anillos A/B es no ramificada y la extensión de anillos B/C es no ramificada, entonces la extensión de anillos A/C es no ramificada. $\diamond$

Proposición 1.3.3 *Sea $f : X \to Y$ un morfismo étale (respectivamente plano o liso de dimensión relativa n) y sea $g : Z \to Y$ otro morfismo, entonces el morfismo $\hat{f} : X \times_Y Z \to Z$ es étale (respectivamente plano o liso de dimensión relativa n)*

Demostración. Nuevamente la propiedad en cuestión es de naturaleza local, por lo que podemos suponer que $X = \text{Spec } A, Y = \text{Spec } B$ y $Z = \text{Spec } C$ entonces $X \times_Y Z = \text{Spec } (A \otimes_B C)$, pero en tal caso todas las afirmaciones son obvias pues si A es un B-módulo plano, entonces $A \otimes_B C$ es un C-módulo plano pues $(A \otimes_B C) \otimes_C M \cong A \otimes_B M$ (todo C-módulo es un B-modulo de manera natural). Por otro lado, es evidente que si la extensión de anillos A/B es no ramificada, entonces la extensión de anillos $A \otimes_B C/C$ también es no ramificada. $\diamond$

Proposición 1.3.4 *Si el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\phi} & Y' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ X & = & X \end{array}$$

conmuta y los morfismos π y π' son étale, entonces ϕ es étale.

Demostración. Si B es un C-módulo plano y A es un B-módulo C plano, entonces A es B plano, además si la extensión A/C es no ramificada y la extensión B/C es no ramificada, necesariamente la extensión A/B es no ramificada. $\diamond$

Obs. La proposición precedente permanece válida si se reemplaza étale por plano o por liso (con las dimensiones relativas correctas).

1.4 Topologías de Grothendieck.

En el estudio de variedades definidas sobre el campo de los números complejos k, usando la topología compleja de la variedad X en cuestión se pueden definir grupos de cohomología $H^q(X, \mathcal{F})$ con coeficientes en una gavilla $\mathcal{F}$ sobre X, que reflejan la estructura de la variedad mejor que si se considera

la topología de Zariski en X. Sin embargo, se se estudian ahora esquemas arbitrarios, ya no se dispone de la topología compleja, y es así cuando aparece la topología étale, de definición puramente algebraica, como un posible substituto. Con la topología étale en X se pueden definir gavillas y grupos de cohomología con propiedades de alguna forma similares al caso complejo.
Comencemos analizando algunas propiedades relevantes de los abiertos en la topología de Zariski.

a) Dado un punto $p \in X$ y un abierto $U \subset X$ que contiene a p, siempre existe un abierto más fino $V \subset U$ que también contiene a p.
b) Dado un abierto $U \subset X$, existe un morfismo de inclusión $i : U \to X$. Dicho morfismo es étale, por tanto liso y también plano.
c) Si $U \subset V$ y $W \subset V$ son dos abiertos, existe un abierto máximo, llamado la intersección de U y W, contenido en ambos y que hace un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U \cap W & \longrightarrow & W \\ \downarrow & & \downarrow j \\ U & \xrightarrow{i} & V. \end{array}$$

Si observamos que, desde el punto de vista de teoría de conjuntos

$$U \times_V W = \{(u, w) \in U \times W \mid i(u) = j(w)\}$$

se tiene que $U \times_V W = U \cap W$. Así , el diagrama anterior puede reescribirse como

$$\begin{array}{ccc} U \times_V W & \longrightarrow & W \\ \downarrow & & \downarrow j \\ U & \xrightarrow{i} & V. \end{array}$$

Es esta última propiedad la que será determinante en la definición de las topologías de Grothendieck.

Definición. Definimos la categoría $\text{Ét}(X)$, como la categoría cuyos objetos

son esquemas étales ($U \xrightarrow{\phi_U} X$) sobre X y cuyos morfismos son morfismos $U \xrightarrow{f} V$ para los cuales el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \phi_U \downarrow & & \downarrow \phi_V \\ X & = & X. \end{array}$$

Observación. Como ya se hizo notar al final de la sección previa, el mor-

fismo f también es étale.
Análogamente se define la categoría de esquemas planos sobre X o la categoría de esquemas lisos sobre X.
Las propiedades a), b) y c) listadas arriba se transforman ahora en las propiedades a) Dado un punto $p \in X$ y un esquema étale (respectivamente plano o liso) $f : U \to X$ tal que p está en la imagen de f, siempre existe un esquema étale (plano o liso) más fino $V \xrightarrow{g} U$ tal que p está en la imagen de $g \circ f$.
b) Dado un esquema étale (plano o liso) $U \to X$, existe un morfismo étale

(plano o liso) $U \to X$.
c) Si $U \to V$ y $W \to V$ son dos morfismos étale, existe un esquema $U \times_V W$ que hace un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U \times_V W & \longrightarrow & W \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ U & \longrightarrow & V. \end{array}$$

Definición. Sea $\pi : Y \to X$ un objeto de la categoría $\text{Ét}(X)$. Una *cubierta étale* de este objeto es una familia $(U_i \xrightarrow{g_i} Y)_{i \in I}$ de morfismos étales, que satisfacen $Y = \bigcup_i g_i(U_i)$.

A la clase de todas las cubiertas étales de los objetos de $\text{Ét}(X)$ se le llama la *topología étale* en $\text{Ét}(X)$, y a la categoría Ét(X) con su topología étale se le llama el *sitio étale* de X y lo denotaremos por X_{et}.

Ejemplo 1.4.0.1 Sea $X = \text{Spec } k$, para algún campo k. Si K/k es una extensión finita separable de campos, entonces el morfismo natural $\text{Spec } K \to \text{Spec } k$ es un morfismo étale suprayectivo, por tanto es un cubriente. Más generalmente, si tenemos una torre de extensiones finitas separables

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \uparrow \\ K_n \\ \uparrow \\ K_{n-1} \\ \uparrow \\ \vdots \\ \uparrow \\ K_1 \\ \uparrow \\ k. \end{array}$$

esta induce una torre de cubrientes étales de k

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \\ \text{Spec } K_n \\ \downarrow \\ \text{Spec } K_{n-1} \\ \downarrow \\ \vdots \\ \downarrow \\ \text{Spec } K_1 \\ \downarrow \\ \text{Spec } k. \end{array}$$

Ejemplo 1.4.0.2 Sea $f : Y \to X$ un morfismo entre variedades analíticas. Como el campo base es de característica cero, toda extensión finita es no ramificada, así , f es étale si y sólo si f es un biholomorfismo local, por tanto, los cubrientes étale son equivalentes a los cubrientes clásicos con la topología analítica.

1.5 Cubrientes de Kummer.

En esta sección discutiremos un ejemplo importante de un cubriente étale, llamado el *cubriente de Kummer* de X.

Sea X/k un esquema separado (es decir, la diagonal Δ es cerrada en $X \times_k X$), sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \in \mathcal{O}(X)^*$ y sea $u \in \mathcal{O}(X)^*$. Definimos un nuevo esquema Y como $Y = \text{Spec }_X \mathcal{O}_X[v]/(v^n - u)$.
El morfismo natural $\pi : Y \to X$ es un morfismo étale de grado n.
En efecto,

$$\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X[v]/(v^n - u) = \mathcal{O}_X \oplus v\mathcal{O}_X \oplus \cdots \oplus v^{n-1}\mathcal{O}_X,$$

por tanto el morfismo es plano, además $\Omega^1_Y =< \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y, dv > /I = \pi^*\Omega^1_X$, donde $I = (du - nv^{n-1}dv)$, de modo que $\Omega^1_{Y/X} = 0$.
Al esquema Y se le conoce como el *cubriente de Kummer* de grado n de X.

Cubrientes de Artin-Schreier

La construcción precedente tiene el único inconveniente de que no es aplicable si la característica del campo divide a n; sin embargo, Artin y Schreier dieron una construcción alternativa de cubrientes étales para el caso en que *carac* $k = p = n$.

Como antes, supondremos que X es un esquema separado y sea $a \in \mathcal{O}_X$.
D efinimos un nuevo esquema Y como $Y = \text{Spec }_X \mathcal{O}_X[T]/(T^p - T - a)$.
El morfismo natural $\pi : Y \to X$ es un morfismo casi finito de grado p, de hecho es un morfismo étale de grado p. En efecto

$$\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X[T]/(T^p - T - a) = \mathcal{O}_X \oplus T\mathcal{O}_X \oplus \cdots \oplus T^{p-1}\mathcal{O}_X,$$

por tanto π es un morfismo plano. Por otra parte, $J(T^p - T - a) = pT^{p-1} - 1 = -1$ es invertible, luego la extensión es separable.

Chapter 2

Gavillas en el sitio étale

Al definir gavillas y pregavillas en el sitio étale de X, básicamente estaremos imitando el procedimiento empleado para definir gavillas y pregavillas en X con la topología de Zariski, sólo que hay algunos aspectos delicados en los que vale la pena detenerse un poco.

2.1 Pregavillas y gavillas.

En este capítulo, X será un esquema separado, $\text{Ét}(X)$ será la categoría de esquemas étales sobre X y $X_{ét}$ denotará al sitio étale de X

Definición. Una *pregavilla étale* en X será un funtor contravariante $\mathcal{F}$:$\text{Ét}(X)\to$

A, donde A es una categoría abeliana (digamos la categoría de grupos abelianos, o la categoría de conjuntos, o la categoría de $\mathcal{O}_X$-módulos, etcétera).

En la topología de Zariski, una pregavilla es una gavilla si toda sección que localmente es cero ya era cero y si tada colección de secciones locales compatibles entre si exteiende a una sección global. Estas dos condiciones pueden reformularse como la exactitud del siguiente diagrama:

$$0 \to \mathcal{F}(U) \to \prod \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i \neq j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j),$$

donde U_i es una cubierta abierta de U.

Definición. Una pregavilla étale se dice una *gavilla étale* si, para todo

esquema V étale en X y para toda cubierta étale $\{U_i\}$ de V la sucesión

$$0 \to \mathcal{F}(V) \to \prod \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i \times_V U_j)$$

es exacta y si $\mathcal{F}(U \coprod V) = \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(V)$ para toda unión disjunta $U \coprod V$.

Observación. La diferencia importante entre las dos definiciones es que

hemos reemplazado la intersección por el producto fibrado sobre V, por esta razón, en el término de la derecha, el producto no se toma únicamente sobre los pares (U_i, U_j) con $i \neq j$, sino sobre todos los pares posibles, incluyendo $i = j$; la razón es que, a diferencia de lo que ocurre en la topología de Zariski, $U \times_V U \neq U$, a menos que el morfismo $U \to V$ sea un encaje.

Lema 2.1.1 *En la definición precedente, nos podemos restringir a cubrientes étales de la forma $U \twoheadrightarrow V$.*

Demostración. Sea $\{U_i\}$ un cubriente étale de X. Sea $W = \coprod_i U_i$ la unión disjunta de los U_i y considere el cubriente $W \twoheadrightarrow X$; como este cubriente es étale, nuestra hipótesis garantiza la exactitud de la sucesión

$$0 \to \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(W) \times \mathcal{F}(W) \rightrightarrows \mathcal{F}(W \times_V W),$$

pero $\mathcal{F}(W) = \mathcal{F}(\coprod_i U_i) = \prod_i \mathcal{F}(U_i)$ y $W \times_V W = \coprod_{i,j} U_i \times_V U_j$, por lo que esta sucesión exacta se convierte en la sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{F}(V) \to \prod \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i \times_V U_j)$$

$\diamond$

Observación. Sea $\mathcal{F}$ una pregavilla en X y sea $\{U_i\}$ una cubierta étale de

V con V una vecindad étale en X, es decir, $V \to X$ étale, entonces se tiene una sucesión exacta

$$\mathcal{F}(V) \to \prod \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \times_V U_j).$$

En particular, esto nos brinda una descripción de $\mathcal{F}(X)$ a través de $\mathcal{F}(U_i)$ para cualquier cubriente étale $\{U_i\}$ de X.

Definición. Un morfismo entre pregavillas $\phi : \mathcal{F} \to \mathbf{G}$ es un a transfor-

mación natural entre funtores, es decir, para cada esquema U étale sobre X, existe un morfismo $\phi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathbf{G}(U)$ que conmuta con los morfismos inducidos por los morfismos entre esquemas étales sobre X.

Lema 2.1.2 *Sea $\mathcal{F}$ una pregavilla, entonces existe una única gavilla $\hat{\mathcal{F}}$ tal que:*
a) Existe un morfismo de pregavillas $\mathcal{F} \xrightarrow{i} \hat{\mathcal{F}}$.
b) Para todo morfismo de pregavillas $\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathbf{G}$ con $\mathbf{G}$ una gavilla, existe un único morfismo de gavillas $\hat{\mathcal{F}} \xrightarrow{\hat{\phi}} \mathbf{G}$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{i} & \hat{\mathcal{F}} \\ \phi \downarrow & & \hat{\phi} \downarrow \\ \mathbf{G} & = & \mathbf{G} \end{array}$$

Demostración. La construcción de la gavilla $\hat{\mathcal{F}}$ correspondiente a la pregavilla $\mathcal{F}$ la dividiremos en dos partes. Recuerde que para toda cubierta étale U_i de un esquema V étale sobre X deseamos obtener una sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{F}(V) \to \prod \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i \times_V U_j).$$

I) Hacemos $\mathcal{F}$ separada, es decir, definimos una pregavilla $\mathcal{F}'$ de tal modo que $0 \to \mathcal{F}(V) \to \prod \mathcal{F}(U_i)$ sea exacta. Para tal efecto, definamos

$$\mathcal{F}'(V) := \varinjlim \text{ im } (\mathcal{F}(V) \to \prod \mathcal{F}(U_i)).$$

II) La exactitud en el segundo término se obtiene si definimos

$$\hat{\mathcal{F}}(V) := \varinjlim \ker \left[\prod \mathcal{F}'(U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}'(U_i \times_V U_j)\right].$$

$\diamond$

Definición. Sea $f : \mathcal{F} \to \mathbf{G}$ un morfismo entre pregavillas. Definimos las pregavillas $\ker\ f$, $\operatorname{coker}\ f$, $\operatorname{im}\ f$ y $\operatorname{coim}\ f$ como sigue:

$$\begin{aligned}
\ker\ f(V) &:= \ker\ [\mathcal{F}(V) \xrightarrow{f} \mathbf{G}(V)],\\
\operatorname{coker}\ f(V) &:= \operatorname{coker}\ [\mathcal{F}(V) \xrightarrow{f} \mathbf{G}(V)],\\
\operatorname{im}\ f(V) &:= \operatorname{im}\ [\mathcal{F}(V) \xrightarrow{f} \mathbf{G}(V)],\\
\operatorname{coim}\ f(V) &:= \operatorname{coim}\ [\mathcal{F}(V) \xrightarrow{f} \mathbf{G}(V)].
\end{aligned}$$

Lema 2.1.3 *Con la definición anterior, si $\mathcal{F}$ y $\mathbf{G}$ son gavillas, entonces la pregavilla* $\ker\ f$ *es de hecho una gavilla*

Demostración. Sea V un esquema étale sobre X y sea $h : U \twoheadrightarrow V$ un cubriente étale de V. $\ker\ f$ será una gavilla si la sucesión

$$0 \to \ker\ f(V) \to \prod \ker\ f(U_i) \rightrightarrows \prod \ker\ f(U_i \times_V U_j)$$

es exacta, pero por ser $\mathcal{F}$ y $\mathbf{G}$ gavillas tenemos el siguiente diagrama conmutativo, con los dos últimos renglones exactos:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & \ker\ f\ (V) & \to & \prod \ker\ f\ (U_i) & \rightrightarrows & \prod \ker\ f\ (U_i \times_V U_j)\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
0 & \to & \mathcal{F}(V) & \to & \prod \mathcal{F}(U_i) & \rightrightarrows & \prod \mathcal{F}(U_i \times_V U_j)\\
 & & f\ \downarrow & & f\ \downarrow & & f\ \downarrow\\
0 & \to & \mathbf{G}(V) & \to & \prod \mathbf{G}(U_i) & \rightrightarrows & \prod \mathbf{G}(U_i \times_V U_j)
\end{array} .$$

Como las flechas de $\ker\ f$ a $\mathcal{F}$ son inclusiones, el morfismo $\ker\ f\ (V) \to \prod \ker\ f\ (U_i)$ es inyectivo. Sea $\alpha \in \prod \ker\ f\ (U_i)$ tal que $p_1(\alpha) = p_2(\alpha)$; visto como elemento en $\prod \mathcal{F}(U_i)$ es de hecho un elemento en la imagen de $h^* : \mathcal{F}(V) \to \prod \mathcal{F}(U_i)$, por tanto existe $\beta \in \mathcal{F}(V)$ tal que $h^*(\beta) = \alpha$. Pero $f(\alpha) = 0$ porque $\alpha \in \prod \ker\ f\ (U_i)$, por tanto $f \circ h^*(\beta) = 0$. Como el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \to & \mathcal{F}(V) & \to & \prod \mathcal{F}(U_i)\\
 & & f\ \downarrow & & f\ \downarrow\\
0 & \to & \mathbf{G}(V) & \to & \prod \mathbf{G}(U_i)
\end{array}$$

conmuta, entonces $h^* \circ f(\beta) = 0$, pero h^* es inyectivo, luego $f(\beta) = 0$, es decir, $\beta \in \ker\ f\ (V)$, lo que prueba la exactitud de la sucesión para $\ker\ f$.

$\diamond$

Veamos ahora algunos ejemplos de gavillas étales

Ejemplo 2.1.3.1 Sea $\mathcal{F}$ una gavilla casi coherente en X con la topología de Zariski. Definimos una gavilla étale asociada a $\mathcal{F}$, que denotaremos como $\mathcal{F}_{et}$, mediante la fórmula

$$\mathcal{F}_{et}(U) := \Gamma(U, p^*\mathcal{F}) := \lim_{\substack{\longleftarrow \\ p(U) \subset W}} \mathcal{F}(W),$$

donde $p : U \to X$ es el morfismo étale estructural de U en X.
No es difícil ver que $\mathcal{F}_{et}$ es una pregavilla. Para verificar que es una gavilla, usaremos el criterio establecido en el lema 2.1.1. Sea $V \to X$ étale y sea $U \to V$ un cubriente étale de V. Deseamos demostrar que la sucesión

$$0 \to \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U) \rightrightarrows \mathcal{F}(U \times_V U).$$

I) Consideremos primero el caso afín $U = \text{Spec } A$ y $V = \text{Spec } B$. Como el morfismo $U \to V$ es supreyectivo y plano, entonces la extensión A/B es fielmente plana.
En este caso, $\mathcal{F}(V) = F$ para algún B-módulo F, $\mathcal{F}(U) = F \otimes_B A$, $U \times_V U =$ Spec $(A \otimes_B A)$, $\mathcal{F}(U \times_V U) = F \otimes_B (A \otimes_B A)$ y la sucesión que nos interesa es la sucesión

$$0 \to F \to F \otimes_B A \overset{P_1^*}{\underset{P_2^*}{\rightrightarrows}} F \otimes_B (A \otimes_B A).$$

a) Considere el siguiente caso particular: $A = B \oplus C$ con C un B-módulo, entonces $A \otimes_B A = (B \oplus C) \otimes_B (B \oplus C)$ y la sucesión está dada como sigue:

$$\begin{array}{ccccccl} 0 \to & F & \to & F \oplus F \otimes_B C & \overset{P_1^*}{\underset{P_2^*}{\rightrightarrows}} & F \oplus F \otimes_B C \oplus F \otimes_B C \oplus F \otimes_B C \otimes_B C & \\ & & & & & & \\ & f & \to & f \otimes_B (1+0) & \overset{P_1^*}{\underset{P_2^*}{\rightrightarrows}} & \begin{array}{l} f \otimes (b+c) \otimes 1 \\ f \otimes 1 \otimes (b+c) \end{array} & \begin{array}{l} = (f \otimes b, f \otimes c, 0, 0) \\ = (f \otimes b, 0, f \otimes c, 0) \end{array} \end{array}$$

por tanto $\{y \in F \otimes_B A \,|P_1^* y = P_2^* y\} = \{f \in F \otimes_B B \subset F \otimes_B A\} = \text{im } F \to F \otimes_B (B \oplus C)$, lo que demuestra la exactitud de la sucesión en este caso.
b) En el caso general A/B fielmente plano, la sucesión

$$0 \to F \to F \otimes_B A \overset{P_1^*}{\underset{P_2^*}{\rightrightarrows}} F \otimes_B (A \otimes_B A)$$

es exacta si y sólo si la sucesión

$$0 \to F \otimes_B A \to (F \otimes_B A) \otimes_B A \overset{P_1^*}{\underset{P_2^*}{\rightrightarrows}} (F \otimes_B A) \otimes_B (A \otimes_B A)$$

lo es, es decir, hemos reemplazado $B \hookrightarrow A$ por $A \hookrightarrow A \otimes_B A$, pero la inclusión $A \hookrightarrow A \otimes_B A$ escinde a través del homomorfismo $A \otimes_B A \to A$ dado por $x \otimes y \to x \cdot y$; por lo tanto podemos escribir $A \otimes_B A = A \oplus C$ para algún A-módulo C, lo cual nos regresa a la situación previa.

II) En general, considere un cubriente de Zariski afín tanto para U como para V, de modo que la imagen inversa de los abiertos afines de V quede cubierta por algunos de los abiertos afines de la cubierta de U y considere el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{F}(V) & \to & \mathcal{F}(U) & \rightrightarrows & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \prod \mathcal{F}(V_i) & \to & \prod \mathcal{F}(U_{ij}) & \rightrightarrows & \\
 & & \downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow & & \\
0 & \to & \prod \mathcal{F}(V_i \times_V V_k) & \to & \prod \mathcal{F}(U_{ij} \times_U U_{kt}) & \rightrightarrows &
\end{array}$$

2.2 Las gavillas $\mathbb{G}_a$ y $\mathbb{G}_m$.

Otros dos ejemplos importantes son la gavilla aditiva $\mathbb{G}_a$ y la gavilla multiplicativa $\mathbb{G}_m$ que definimos a continuación.

La gavilla $\mathbb{G}_a$ es la gavilla étale que corresponde a la gavilla coherente $\mathcal{O}_X$ para la topología de Zariski, es decir, si $\phi : V \to X$ es un morfismo étale, definimos $\mathbb{G}_a(V) := \Gamma(V, \phi^* \mathcal{O}_X)$. Los calculos al final de la secciópn previa nos muestran que $\mathbb{G}_a$ así definida es una gavilla étale.

La gavilla $\mathbb{G}_m$ es la gavilla étale que corresponde a la gavilla $\mathcal{O}_X^*$, por tanto, al menos como conjunto $\mathbb{G}_m(V) \subset \mathbb{G}_a(V)$, de este modo la exactitud de la sucesión

$$0 \to \mathbb{G}_a(V) \to \mathbb{G}_a(W) \times \mathbb{G}_a(W) \rightrightarrows \mathbb{G}_a(W \times_V W)$$

implica la exactitud de la sucesión correspondiente para $\mathbb{G}_m$, por lo que $\mathbb{G}_m$ también es una gavilla étale.

2.3 Gavillas constantes.

El siguiente es un ejemplo decisivo, porque será precisamente en las gavillas de este tipo donde se observe la diferencia entre cohomología étale y cohomología de Zariski.
En la topología de Zariski, dado un grupo abeliano M, definimos la pregavilla constante $\tilde{M}$ mediante la sencilla fórmula $\tilde{M}(U) = M$ para todo abierto no vacío de X y $\tilde{M}(\emptyset) = \{0\}$. Esta pregavilla no es una gavilla, pues si $X = U \coprod V$, entonces la sucesión corta

$$0 \to \tilde{M}(X) \to \tilde{M}(U) \times \tilde{M}(V) \rightrightarrows \tilde{M}(U \cap)$$

se convierte en

$$0 \to M \to M \times M \rightrightarrows 0$$

que evidentemente no es exacta. De este modo, incluso en la topología de Zariski debemos considerar la gavilla asociada a esta pregavilla. No es difícil convencerse de que la gavilla $\hat{M}$ asociada a la pregavilla constante $\tilde{M}$ puede definirse como $\hat{M}(V) = M^k$, donde k es el número de componentes conexas de V.

De manera similar, definiremos la *gavilla constante* $\hat{M}$ en $X_{ét}$ como $\hat{M}(V) =$

M^k, para todo esquema V étale sobre X, donde k es el número de componentes conexas de V.
Un ejemplo particularmente importante se obtiene si tomamos $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ para algún entero n.

2.4 La gavilla μ_n.

Al igual que los haces vectoriales triviales son solo un caso particular del concepto mas general de haz vectorial, de la misma manera, las gavillas constantes son un caso particular de un concepto mas general, el de gavillas localmente constantes.

Definición. Una gavilla $\mathcal{F}$ sobre X se dice *localmente constante* si existe

una cubierta étale $\{U_i\}$ de X tal que la restricción de $\mathcal{F}$ a cada elemento de la cubierta resulta una gavilla constante. Observe que si $V \to U$ es un morfismo étale que conmuta con los morfismos estructurales sobre X, entonces $\mathcal{F}_{|U}(V) := \mathcal{F}(V)$.

Ejemplo 2.4.0.2 El ejemplo más importante es la gavilla de raíces de la unidad, que se construye como sigue:
Sea n un entero y considere al morfismo $\mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m$ dado por $n(f) := f^n$. Como $\mathbb{G}_m$ es una gavilla étale, entonces la pregavilla $\mu_n := \ker\ n$ es una gavilla étale. De hecho, es una gavilla localmente constante, como se verá a continuación. Considere primero el siguiente ejemplo particular

Sea $X = \text{Spec } \mathbb{Q}$ y considere la gavilla μ_{15} sobre X. Considere las cubiertas étales siguientes
$V = \text{Spec } \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to X$, $W = \text{Spec } \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \to X$, $U = \text{Spec } \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \to X$ y $S = \text{Spec } \mathbb{Q}(\sqrt{15}) \to X$, entonces tendremos $\mu_{15}(X) = \{1\}$, $\mu_{15}(V) = \{1\}$, $\mu_{15}(W) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mu_{15}(U) \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\mu_{15}(S) \cong \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$, por tanto la gavilla μ_{15} no es constante, sin embargo, es evidente que su restricción a la cubierta $S \to X$ será una gavilla constante isomorfa a la gavilla constante $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.
En general se tendrá que la gavilla μ_n no será constante, a menos que $K(X)$ contenga a todas las raíces n-ésimas de la unidad, sin embargo, siempre será localmente constante, pues al restringirla a la cubierta $X \times_k k(\alpha) \to X$, con α una raíz n-ésima primitiva de la unidad, si resulta una gavilla constante, que es de hecho isomorfa a la gavilla constante $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2.5 Gavillas construibles.

Si llevamos la definición de gavillas localmente constantes un paso más adelante, tendremos el concepto de gavillas construibles.

Definición. Una gavilla étale $\mathcal{F}$ sobre X se dice *construible* si existe una

cubierta $\{X_i\}$ de X mediante subesquemas localmente cerrados, tal que la restricción de $\mathcal{F}$ a cada uno de los subesquemas X_i es una gavilla localmente constante.

Por supuesto, toda gavilla localmente constante es una gavilla construible. Veamos un ejemplo de una gavilla construible que no sea localmente constante.

Sea $x \in X$ un punto cerrado para la topología de Zariski, definamos una

pregavilla rascacielos $\hat{\mathcal{F}}$ como sigue:
$\hat{\mathcal{F}}(V) = 0$ si $V \to X$ es un esquema étale sobre X pero $x \notin \text{im } [V \to X]$ y
$\hat{\mathcal{F}}(V) = k$ si $x \in \text{im } [V \to X]$, donde k es el campo de definición de X.
Sea $\mathcal{F}$ la gavilla étale asociada a esta pregavilla. Evidentemente esta gavilla no es localmente constante, pues para toda cubierta étale de X existe un abierto U tal que $x \in \text{im } [U \to X]$, pero no hay garantía de que la restricción de $\mathcal{F}$ a U sea una gavilla constante, puesto que si U no se reduce a un punto, es posible encontrar algún esquema V étale sobre X y tal que $x \notin \text{im } [V \to U \to X]$. Sin embargo, $\mathcal{F}$ es una gavilla construible, puesto que podemos elegir X_1 como cualquier abierto denso que no contenga a x, X_2 como un abierto denso de $X - X_1$ que no contenga a x, etcétera. Con esta elección, la restricción de $\mathcal{F}$ a los subesquemas X_i resultará localmente constante. Observe que el proceso es finito, pues $\dim X_{i+1} < \dim X_i$.

2.6 Gavillas l-ádicas.

Considere ahora una familia $(\mathcal{F}_n)_{n\in\Lambda}$ de gavillas (digamos de grupos abelianos) construibles, con Λ algún conjunto de índices. Diremos que esta familia forma un *sistema inverso* si

a) Λ es un conjunto parcialmente ordenado,
b) siempre que $m > n$, existe un morfismo de gavillas construibles $u_{mn} : \mathcal{F}_m \to \mathcal{F}_n$ y
c) Si $m > n > k$, $u_{mk} = u_{nk} \circ u_{mn}$, es decir, los morfismos u_{mn} son compatibles con el orden parcial.

Dado un sistema inverso de gavillas construibles, tiene sentido considerar el límite inverso del sistema (que existe en toda categoría abeliana y que puede describirse de manera explícita como un cociente de la suma directa de los $\mathcal{F}_n$ en la categoría de gavillas de módulos).

Ejemplo 2.6.0.3 Considere al sistema inverso de gavillas constantes

$$(\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}},$$

la gavilla límite se denotará, por analogía con el caso de grupos profinitos, como $\mathbb{Z}_p$, y corresponde de hecho a la gavilla asociada a la pregavilla constante definida mediante el grupo abeliano $\mathbb{Z}_p$.

Observación. Si se tiene una sucesión exacta de sistemas inversos de gavillas construibles

$$0 \to (A_n) \to (B_n) \to (C_n) \to 0,$$

es decir, para cada n fijo se tiene una sucesión exacta de gavillas construibles, entonces al pasar al límite inverso se tiene una sucesión exacta

$$0 \to (A_n) \to (B_n) \to (C_n).$$

Observe que la sucesión anterior es sólo exacta por la izquierda, en general no será exacta por la derecha, como lo prueba el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.6.0.4 Consideré la sucesión exacta de sistemas inversos

$$0 \to (p^n\mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to 0,$$

al pasar al límite tendremos la sucesión

$$0 \to 0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p,$$

que evidentemente no es suprayectiva.

Definición. Sea $(\mathcal{F}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, un sistema inverso de gavillas construibles. Diremos que la gavilla $\varprojlim \mathcal{F}_n$ es una *gavilla l-ádica* si se cumplen

a) $u_{n+1} : \mathcal{F}_{n+1} \to \mathcal{F}_n$ es suprayectiva para toda $n \in \mathbb{N}$,
b) $l^{n+1}\mathcal{F}_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y
c) $\mathcal{F}_{n+1}/l^{n+1}\mathcal{F}_{n+1} \cong \mathcal{F}_n$.

La gavilla $\mathbb{Z}_l$ es, por supuesto, una gavilla l-ádica.
Otro ejemplo de gavilla l-ádica es la gavilla $\mu_l := \varprojlim \mu_{l^n}$.
Estos son los dos ejemplos que mas nos interesarán en lo que sigue.

2.7 Fibras de una gavilla

En esta sección simplemente introducimos el concepto de la fibra de una gavilla y vemos algunas aplicaciones elementales del mismo.

Definición. Sea $\mathcal{F}$ una gavilla y X un esquema. Un *punto* en X es un

morfismo étale $x : \text{Spec } k \to X$ (en el sitio de Zariski sería simplemente un encaje de Spec k en X).

Si x es un punto que corresponde a un campo separablemente cerrado, definimos la fibra de $\mathcal{F}$ en x como $\mathcal{F}_x := \lim_V \mathcal{F}(V)$, donde el límite se toma sobre todos los esquemas étales V sobre X para los cuales se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & & V \\ & \nearrow & \downarrow \\ \text{Spec } k & \xrightarrow{x} & X \end{array}$$

En general, definimos la fibra $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_{\hat{x}}$, donde $\hat{x}$ es el morfismo correspondiente a la cerradura separable de k.

Esto generaliza de manera natural la definición de fibra en el sitio de Zariski, donde el límite se toma sobre todos los abiertos V de X que contienen a la imagen de x.

Ejemplo 2.7.0.5 Si $\mathcal{F}$ es una gavilla constante, entonces la fibra de cualquier punto será igual al grupo $\mathcal{F}(U)$ donde U es algún esquema étale sobre X e irreducible, es decir, coincidirá con el grupo que define a la gavilla constante $\mathcal{F}$.

Ejemplo 2.7.0.6 Si $\mathcal{F}$ es una gavilla rascacielos con grupo K y base p, entonces la fibra en todo punto que no esté sobre p será cero, en tanto que la fibra en cualquier punto sobre p será K.

Una de las mayores aplicaciones de esta definición es el siguiente lema, que se deja como ejercicio al lector.

Lema 2.7.1 *Una sucesión de gavillas étale es exacta si y sólo si la sucesión de sus respectivas fibras es exacta para cada punto p de X.*

Chapter 3

Cohomología étale de gavillas étale.

En este capítulo consideraremos la cohomología de las gavillas en el sitio étale. Comenzaremos hablando de los funtores derivados y, como en el capitulo previo, cuando lo consideremos necesario o conveniente diremos algunas palabras sobre la situación en el sitio de Zariski.

3.1 Funtores derivados.

Dada una gavilla étale Q de $R-$módulos, diremos que Q es una gavilla $R-$*inyectiva* si el funtor $\hom_R(-, Q)$ es exacto, es decir, si cada que se tenga un diagrama

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & \mathcal{F} & \to & G \\ & & f \downarrow & & \\ & & Q & & \end{array},$$

de R módulos existe un único morfismo de R módulos $\hat{f} : G \to Q$ que extiende a f.

Ejemplo 3.1.0.1 Considere la gavilla constante $\mathbb{Z}$. Una gavilla de grupos abelianos Q será $\mathbb{Z}$-inyectiva si para todo $d \in \mathbb{Z}$, el monomorfismo $\mathbb{Z} \xrightarrow{d} \mathbb{Z}$, dado por multiplicación por d, extiende a un morfismo $\hat{d} : \mathbb{Z} \to Q$ que haga conmutar al diagrama

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & \mathbb{Z} & \xrightarrow{d} & \mathbb{Z} \\ & & & \hat{d} & \\ & & f \downarrow & \swarrow & \\ & & Q & & \end{array},$$

es decir, si y sólo si Q es d divisible para todo $d \in \mathbb{Z}$, por ejemplo las gavillas constantes $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son gavillas $\mathbb{Z}$-inyectivas.

Ejemplo 3.1.0.2 De manera semejante, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ es $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ inyectivo.

Por lo general, cuando sea claro del contexto quien es R, omitiremos mencionarlo y diremos simplemente una gavilla inyectiva.

Dada una gavilla $\mathcal{F}$, una *resolución* de $\mathcal{F}$ es una sucesión exacta de gavillas

$$0 \to \mathcal{F} \to R_0 \to R_1 \to R_2 \to \cdots,$$

que se suele denotar como $0 \to \mathcal{F} \to R^\bullet$. Si las R_i son gavillas inyectivas diremos que tenemos una *resolución inyectiva* de $\mathcal{F}$.

Ejemplo 3.1.0.3 $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es una resolución inyectiva de $\mathbb{Z}$.

Los conceptos correspondientes también existen para módulos sobre un anillo y, mas generalmente, para objetos de una categoría abeliana.

Lema 3.1.1 *Sea $0 \to \mathcal{F} \to Q^\bullet$ una resolución inyectiva de $\mathcal{F}$, si $0 \to \mathcal{F} \to R^\bullet$ es una resolución arbitraria de $\mathcal{F}$, entonces existe un único morfismo $f : R^\bullet \to Q^\bullet$ que hace conmutar los diagramas*

$$\begin{array}{ccccc} R_{p-1} & \to & R_p & \to & R_{p+1} \\ f\downarrow & & f\downarrow & & f\downarrow \\ Q_{p-1} & \to & Q_p & \to & Q_{p+1} \end{array}.$$

Demostración. Procederemos por inducción en p.
Considere las sucesión exacta corta

$$0 \to \mathcal{F} \to R_0 \to S_0 \to 0$$

y

$$0 \to \mathcal{F} \to Q_0 \to T_0 \to 0$$

como Q_0 es inyectivo, existe un único morfismo $R_0 \to Q_0$ que extiende a la inclusión $\mathcal{F} \to Q_0$, lo que nos da un diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ 0 & \to & \mathcal{F} & \to & R_0 & \to & S_0 \\ & & \downarrow & \swarrow & & & \\ & & Q_0 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & T_0 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}.$$

Como la imagen de $\mathcal{F} \to R_0 \to Q_0 \to T_0 = \mathcal{F} \to Q_0 \to T_0$ es cero, entonces el morfismo $R_0 \to Q_0$ induce un morfismo $S_0 \to T_0$, el cual, compuesto con la inclusión $T_0 \to Q_1$ nos da un morfismo $S_0 \to Q_1$. Repitiendo el argumento, pero considerando ahora las sucesiones exactas cortas

$$0 \to S_0 \to R_1 \to S_1 \to 0$$

y

$$0 \to T_0 \to Q_1 \to T_1 \to 0$$

y el morfismo $S_0 \to T_0 \to Q_1$ obtenemos un morfismo $R_1 \to Q_1$ que hace conmutar el diagrama del enunciado. Prosiguiendo de esta forma se obtiene el morfismo deseado. ◇

Definición. Sea $\mathcal{F}$ una gavilla étale sobre X y F un funtor de la categoría de gavillas étales a una categoría abeliana $\mathfrak{A}$. Sea $0 \to \mathcal{F} \to Q^\bullet$ una resolución inyectiva de $\mathcal{F}$ y considere el complejo

$$0 \to F(\mathcal{F}) \to F(Q_0) \to F(Q_1) \to F(Q_2) \to \cdots,$$

la homología de este complejo define a los *funtores derivados* de $\mathcal{F}$ (también llamados *imágenes superiores* de F), es decir, definimos la q-ésima imagen superior de $\mathcal{F}$ ante F como

$$R^q\, F_*(\mathcal{F}) := \frac{\ker\ (F(Q_q) \to F(Q_{q+1}))}{\mathrm{im}\ (F(Q_{q-1}) \to F(Q_q))},$$

para $q \geq 0$.

La definición precedente puede de hecho generalizarse para funtores entre categorías abelianas cualesquiera. Mas adelante haremos uso de funtores derivados en el contexto general para establecer los teoremas de comparación.

3.2 Grupos de Cohomología étale.

Consideraremos ahora un caso particular de la definición general de la sección precedente. Todos los resultado pueden formularse para cualquier funtor entre dos categorías abelianas y sus funtores derivados, a condición de que la primera de estas categorías tenga suficientes inyectivos.

Definición. Sea $\mathcal{F}$ una gavilla étale sobre X y Γ el funtor de la categoría de gavillas étales a la categoría de grupos abelianos $\mathfrak{A}$, dado por $\Gamma(\mathcal{F}) := \mathcal{F}(X)$ para toda gavilla $\mathcal{F}$, entonces a los funtores derivados de Γ los llamamos los *grupos de cohomología étale* de X, y se denotan mediante $H^q_{\acute{e}t}(X, \mathcal{F})$ para $q \geq 0$.

Observación. En virtud del último lema de la sección previa, la cohomología étale de una gavilla $\mathcal{F}$ no depende de la resolución inyectiva elegida para calcularla.

Lema 3.2.1 *Si Q es una gavilla inyectiva, entonces $H^q_{\acute{e}t}(X, Q) = 0$ para todo $q > 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Considere la resolución inyectiva $0 \to Q \to Q \to 0 \to 0 \to \cdots$ de Q y calcule la cohomología de Q a través de dicha resolución. $\diamond$

Teorema 3.2.2 *Sea $0 \to \mathcal{M} \to \mathcal{F} \to G \to 0$ una sucesión exacta corta, y suponga que cada una de las gavillas involucradas admite alguna resolución inyectiva, entonces existe una sucesión exacta larga de cohomología*

$$\cdots \to H^i_{\acute{e}t}(X, \mathcal{M}) \to H^i_{\acute{e}t}(X, \mathcal{F}) \to H^i_{\acute{e}t}(X, G) \to H^{i+1}_{\acute{e}t}(X, \mathcal{M}) \to \cdots$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $0 \to \mathcal{M} \to I^\bullet$, $0 \to \mathcal{F} \to J^\bullet$ y $0 \to G \to K^\bullet$ resoluciones inyectivas de sendas gavillas $\mathcal{M}$, $\mathcal{F}$ y G.

Considere el diagrama de complejos

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{M} & & \longrightarrow & \mathcal{F} & & \longrightarrow & G & & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow & & & \\
0 & \longrightarrow & I^0 & & \longrightarrow & J^0 & & \longrightarrow & K^0 & & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \searrow & & & \searrow & & & \searrow & & \\
 & & \downarrow & & Q^0 & \downarrow & & R^0 & \downarrow & & S^0 & \\
 & & & \swarrow & & & \swarrow & & & \swarrow & & \\
0 & \longrightarrow & I^1 & & \longrightarrow & J^1 & & \longrightarrow & K^1 & & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \searrow & & & \searrow & & & \searrow & & \\
 & & \downarrow & & Q^1 & \downarrow & & R^1 & \downarrow & & S^1 & \\
 & & & \swarrow & & & \swarrow & & & \swarrow & & \\
0 & \longrightarrow & I^2 & & \longrightarrow & J^2 & & \longrightarrow & K^2 & & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \searrow & & & \searrow & & & \searrow & & \\
 & & \downarrow & & Q^2 & \downarrow & & R^2 & \downarrow & & S^1 & \\
 & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & &
\end{array}
$$

La composición $\mathcal{M} \to \mathcal{F} \to J^0$ y la inclusión $\mathcal{M} \to I^0$ inducen un morfismo de I^0 en J^0. Como la imagen de $\mathcal{M}$ en R^0 ante este morfismo es cero, entonces el morfismo $I^0 \to J^0$ induce un morfismo entre los grupos cocientes Q^0 y R^0. Un argumento análogo nos permite obtener un morfismo entre J^0 y K^0, el cual pasa al cociente induciendo así un morfismo entre R^0 y S^0. El mismo procedimiento, aplicado a las gavillas Q^t, R^t y S^t nos permite extender el diagrama y obtener complejos $I^t \to J^t \to K^t$ y $Q^t \to R^t \to S^t$ para todo t, por lo que al tomar secciones globales y pasar al cociente obtendremos morfismos $H^t(X, \mathcal{M}) \to H^t(X, \mathcal{F}) \to H^t(X, G)$.
Resta construir un morfismo de conexion $\delta : H^t(X, G) \to H^{t+1}(X, \mathcal{M})$ para toda t.
Considere el siguiente diagrama

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & I & \to & J & \to & K & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & Q & \to & R & \to & S & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

donde las columnas y los renglones son exactos y todos los cuadrados conmutan. Tomando el cociente por A en el segundo complejo horizontal se obtiene el complejo $I/A \to J/A \to K$, que junto con el morfismo de $C \equiv B/A \to J/A$, induce un diagrama

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & 0 \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & C \\
 & & & \swarrow & \downarrow \\
I/A & \to & J/A & \to & K \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
Q & \to & R & \to & S
\end{array}
$$

donde todas las columnas son exactas y los cuadrados conmutan. Como la imagen de $C \to K \to S$ en S es cero, entonces la imagen de $C \to J/A \to R$ en R está contenida en el nucleo del morfismo $R \to S$, es decir, en la imagen de $Q \to R$, lo que nos permite definir un morfismo de C en Q.

Este argumento aplicado a las gavillas Q^t, R^t y S^t (o a las gavillas $\mathcal{M}, \mathcal{F}$ y G) nos permite construir el morfismo de conexión δ_t, con lo que se concluye la demostración del teorema. $\diamond$

Proposición 3.2.3 *Sea $\mathcal{F}$ una gavilla y suponga que $0 \to \mathcal{F} \to J^\bullet$ es una resolución de $\mathcal{F}$. Si $H^q(X, J_i) = 0$ para todo $q > 0$ (es decir, si las gavillas J_k son acíclicas) entonces podemos usar esta resolución para calcular la cohomología de $\mathcal{F}$, i.e., $H^q(X, \mathcal{F}) \equiv \frac{\ker\ [J_q(X) \to J_{q+1}]}{\mathrm{im}\ [J_{q-1}(X) \to J_q]}$.*

Demostración. Por inducción en la longitud de la resolución (aceptemos sin demostración que todo modulo finitamente generado admite una resolución de longitud finita).

I) Si la resolución es de longitud cero, entonces tenemos

$$0 \to \mathcal{F} \to J \to 0$$

y por tanto $\mathcal{F} \equiv J$ es acíclica, es decir, los grupos de cohomología de $\mathcal{F}$ son cero, al igual que la homología del complejo.

II) En general, considere el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & J_0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & J_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & J_2 \arrow[r] & \cdots \\
& & & R_0 \arrow[ur] & & R_1 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

La sucesión exacta corta $0 \to \mathcal{F} \to J_0 \to R_0 \to 0$ induce una sucesión exacta larga de cohomología

$$\cdots \to H^q(X, \mathcal{F}) \to H^q(X, J_0) \to H^q(X, R_0) \to H^{q+1}(X, \mathcal{F}) \to \cdots$$

Pero J_0 es acíclico, por tanto se tienen isomorfismos

$$H^{q+1}(X, \mathcal{F}) \equiv H^q(X, R_0) \text{ para todo } q \geq 1.$$

Por inducción, dado que $0 \to R_0 \to J_1 \to \cdots$ es una resolución acíclica de R_0 con longitud menor que la resolución original de $\mathcal{F}$, tenemos que $H^q(X, R_0) \equiv \frac{\ker\ [J_{q+1}(X) \to J_{q+2}]}{\mathrm{im}\ [J_q(X) \to J_{q+1}]}$, por lo que

$$H^{q+1}(X, \mathcal{F}) \equiv \frac{\ker\ [J_{q+1}(X) \to J_{q+2}]}{\mathrm{im}\ [J_q(X) \to J_{q+1}]}$$

para todo $q \geq 1$.
Por lo que toca a $H^1(X, \mathcal{F})$, considere el diagrama exacto y conmutativo siguiente:

$$\begin{tikzcd}
& & & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & H^0(X,\mathcal{F}) \arrow[r] & H^0(X,J_0) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "d_0"'] & H^0(X,R_0) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(X,\mathcal{F}) \arrow[r] & 0 \\
& & & H^0(X,J_1) \arrow[dl, "d_1"'] \arrow[d, "\beta"] & & \\
\cdots & & H^0(X,J_2) \arrow[ll] & H^0(X,R_1) \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] & \\
& & & H^1(X,R_0) & &
\end{tikzcd}$$

por tanto ker $d_1 =$ ker $\beta = H^0(X, R_0)$ e im $d_0 =$ im α, luego

$$\frac{\ker\ d_1}{\mathrm{im}\ d_0} = \frac{\ker\ \beta}{\mathrm{im}\ \alpha} = \frac{H^0(X, R_0)}{\mathrm{im}\ \alpha} = H^1(X, \mathcal{F}).$$

$\diamond$

3.3 Resolución de Godement para gavillas étale.

Hasta aquí hemos necesitado suponer que la categoría en cuestión tiene suficientes inyectivos. Mostremos que la categoría de gavillas étales tiene suficientes inyectivos, con lo que todo lo dicho en las dos secciones precedentes resultará aplicable a las gavillas étales. Supondremos únicamente que el lector está familiarizado con el hecho de que la categoría de grupos abelianos tiene suficientes inyectivos.

Teorema 3.3.1 *La categoría de gavillas étales de grupos abelianos tiene suficientes inyectivos, es decir, toda gavilla étale de grupos abelianos admite una resolución inyectiva*

Demostración. Es suficiente con demostrar que toda gavilla étale de grupos abelianos puede encajarse en una gavilla inyectiva de grupos abeliano, pues el cociente de dos grupos abelianos es abeliano.
Sea $\mathcal{F}$ una gavilla de grupos abelianos y sea $x \in X$ un punto geométrico de X, es decir, existe un campo separable L y un encaje Spec $\text{Ł} \to X$ cuya imagen es x. Sea $\mathcal{F}_x$ la fibra de $\mathcal{F}$ en x y sea Q_x un $\mathbb{Z}$ módulo inyectivo tal que $0 \to \mathcal{F}_x \to Q_x$ sea exacto. Definamos a la gavilla

$$\mathcal{M} := \prod_{x \in X} Q_x.$$

Se tiene entonces un encaje de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{M}$ inducido por los encajes naturales $\mathcal{F} \to \prod \mathcal{F}_x$ y $\prod \mathcal{F}_x \to \mathcal{M}$.
Se deja como ejercicio sencillo al lector verificar que $\mathcal{M}$ es una gavilla inyectiva. $\diamond$

3.4 Cohomología de $\check{C}$ech.

La teoría general desarrollada en las secciones anteriores tiene un inconveniente: en general es muy difícil dar resoluciones inyectivas (o acíclicas) de una gavilla dada, por lo que calcular los grupos de cohomología étale para una gavilla dada puede ser sumamente complicado o imposible.

En esta sección definiremos un método que, en algunas ocasiones, permite calcular los grupos de cohomología étale a partir de conocer algunos cubrientes étales del esquema X.

Sea $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ un cubriente étale de X y sea $\mathcal{F}$ una gavilla étale sobre X. Como en el sitio de Zariski, definimos aquí el p-ésimo grupo de $\check{C}$ech como

$$\mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\text{multiíndices}} \mathcal{F}(U_{i_0 i_1 \cdots i_p})$$

donde $(U_{i_0 i_1 \cdots i_p}) = U_{i_0} \times_X U_{i_1} \times_X \cdots \times_X U_{i_p}$ (a diferencia del sitio de Zariski, donde $(U_{i_0 i_1 \cdots i_p}) = \cap_{i_k} U_{i_k}$).

Observe que esta definición se debe al hecho de que no deseamos obtener grupos de cohomología triviales para el esquema $X = \text{Spec } \ k$. Con la definición precedente, si se considera la cubierta étale $Y = \text{Spec } \ L \ \rightarrow \text{Spec } \ k = X$ obtendremos en particular $\mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(Y \times_X \cdots \times_X Y)$, donde el producto incluye $p+1$ copias de Y.

Los grupos de Čech $\mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ forman un complejo

$$0 \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \cdots \quad ,$$

llamado el complejo de Čhech de $\mathcal{F}$ relativo a $\mathfrak{U}$, donde el morfismo $d_{p-1} : \mathcal{C}^{p-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ está dado mediante la fórmula

$$d_p(x)_{i_0 \cdots i_p} = \sum_j (-1)^j x_{i_0 \cdots \hat{i}_j \cdots i_p} |_{U_{i_0} \times_x \cdots \times_X U_{i_{p+1}}}.$$

Se verifica facilmente que $d_{p+1} \circ d_p = 0$, de modo que en efecto tendremos un complejo.

Definición. Definimos el *p-ésimo grupo de cohomología de Čech* de $\mathcal{F}$

relativo a $\mathfrak{U}$ como el p-ésimo grupo de homología del complejo de Čech, es decir

$$\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \frac{\ker \ d_p}{\text{im} \ \ d_{p-1}}.$$

Definición. $\mathfrak{V}$ es un refinamiento de $\mathfrak{U}$ si $\mathfrak{V}$ es una cubierta de X y todo

esquema de la cubierta $\mathfrak{V}$ admite un morfismo étale sobre algún esquema de la cubierta $\mathfrak{U}$.
Si $\mathfrak{V}$ es un refinamiento de $\mathfrak{U}$ tendremos un morfismo $\theta : \check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \hat{H}^p(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$.

Definición. Definimos la *cohomología de Čech* de $\mathcal{F}$ como

$$\check{H}^p(X, \mathcal{F}) = \lim_{\overrightarrow{\mathfrak{U}}} \check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

Definamos ahora una versión gavillada del complejo de *Čech* como sigue:

$$\mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\text{multiíndices}} \mathcal{F}|U_{i_0 i_1 \cdots i_p}$$

y la diferencial en el complejo se define como

$$\begin{array}{rccc} d_p : & \mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) & \rightarrow & \mathcal{C}^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \\ & x & \rightarrow & d_p(x) \end{array}$$

donde $d_p(x)_{i_0 \cdots i_{p+1}} = \sum_j (-1)^j x_{i_0 \cdots \hat{i}_j \cdots i_{p+1}} |_{U_{i_0} \times_X \cdots \times_X U_{i_{p+1}}}$.

Evidentemente, las secciones globales de $\mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ no son otra cosa que los grupos $\mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ y el morfismo inducido en las secciones globales coincide con el morfismo del complejo de Čech.

Con esta notación podemos formular el siguiente lema:

Lema 3.4.1 *La sucesión*

$$0 \xrightarrow{v} \mathcal{F} \to \mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \mathcal{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \cdots$$

es exacta, es decir, el complejo $\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ es una resolución de $\mathcal{F}$.

Demostración. Definamos v mediante la fórmula $v = \prod_i (\mathcal{F} \to \mathcal{F}|_{U_i}$.

Como los morfismos están definidos globalmente, el complejo está bien definido y la exactitud del mismo es un asunto local, es decir, basta verificarla en las fibras. De hecho, demostraremos que la derivación d_p es homótopa a la identidad, es decir, construiremos, localmente, un morfismo $k_p : \mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \mathcal{C}^{p-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ tal que $(d_{p-1} \circ k_p + k_{p+1} \circ d_p)\alpha = \alpha$. En efecto, sea $x \in X$ y sea $\alpha \in \mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})_x$; sea $V \to U_j$ un morfismo étale que realiza a α, es decir, tal que $\alpha \in \Gamma(V, \mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}))$, donde U_j es algún elemento de la cubierta $\mathfrak{U}$ tal que x está en la imagen de U_j en X.
Definamos primero $\hat{k}_p(\alpha)$ mediante la fórmula

$$\hat{k}_p(\alpha)_{i_0,\cdots,i_{p-1}} := \alpha_{j i_0,\cdots,i_{p-1}}$$

y definamos $k_p(\alpha) := \hat{k}_p(\alpha)_x$. k así definido satisface la identidad buscada. ◇

Corolario 3.4.2 *Sea $\mathcal{F}$ una gavilla étale sobre X, entonces para todo $q \geq 0$ existe un morfismo canónico*

$$\check{H}^q(X, \mathcal{F}) \to H^q_{ét}(X, \mathcal{F}).$$

Demostración. Como el complejo $\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ es una resolución de $\mathcal{F}$, el lema 3.1.1 nos garantiza que, para toda resolución inyectiva $I^\bullet$ de $\mathcal{F}$ se tiene un único morfismo $\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to I^\bullet$, el cual induce un morfismo canónico $\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^p(X, \mathcal{F})$. Si $\mathfrak{V}$ es un refinamiento de $\mathfrak{U}$ se tiene entonces un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) & \to & H^p(X, \mathcal{F}) \\ \searrow & & \swarrow \\ & \check{H}^p(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) & \end{array}$$

el cual, pasando al límite inverso, induce el morfismo buscado. ◇

Chapter 4

Teoremas de comparación.

En el capítulo previo hemos definido la cohomología étale de una gavilla étale así como la cohomología de Čech de una gavilla étale, también hemos visto que existe un morfismo entre la cohomología de Čech y la cohomología étale de una gavilla (necesariamente étale). En este capítulo nos proponemos comparar estas cohomologías entre si, así como con otras cohomologías, como la de Zariski y la analítica, donde esto tenga sentido.

4.1 Definición de $j_!$ para las topologías de Zariski y étale.

Uno de los primero resultados esperables para la cohomología de *Čech*, si ésta ha de coincidir con la cohomología étale para algunas gavillas razonables, es que las gavillas inyectivas sean acíclicas para dicha cohomología. Para demostrar esto necesitaremos definir el funtor $j_!$.

Sea X un esquema y $U \overset{j}{\hookrightarrow} X$ un abierto de Zariski de X. Dada una gavilla de Zariski $\mathcal{F}$ sobre U, definimos una pregavilla en X (en la topología de Zariski de X) mediante la fórmula

$$V \mapsto \begin{cases} \mathcal{F}(V) & \text{si} \quad V \subset U\ , \\ 0 & \text{si} \quad V \not\subset U\ . \end{cases}$$

La gavilla asociada a esta pregavilla se denota como $j_!\mathcal{F}$ y la conocemos como la gavilla que se obtiene al *extender $\mathcal{F}$ por cero* fuera de U.

La principal dificultad para extender esta definición al caso étale es que no hay ninguna razon para que los esquemas que pertenecen a un cubriente étale de U sean subconjuntos de U.

Definición. Sean X un esquema, $U \xrightarrow{j} X$ un morfismo étale y $\mathcal{F}$ una gavilla sobre U. Considere la pregavilla definida como $V \mapsto \varinjlim_{V'} \mathcal{F}(V')$, donde V' corre sobre todos los esquemas $V' \to U$ étales sobre U para los cuales existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} V' & \overset{\phi}{\leftarrow} & V \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ U & \rightarrow & X \end{array}$$

Observe que existe sólo un nḿero finito de tales ϕ pues la fibra de $U \to X$ es finita. Más aún, si existe al menos una V' que haga conmutar el diagrama,

como $V \to X = V \to V' \to U \to X$ es étale y tanto $U \to X$ como $V' \to U$ son étales, entonces $V \to V'$ también es étale, por tanto ϕ también lo es, es decir, si existe al menos un esquema V' que haga conmutar el diagrama, entonces $V \mapsto \oplus_\phi \mathcal{F}(V)$, pues V resulta entonces un esquema étale sobre U. Si no existe V' que haga conmutar el diagrama, entonces $V \mapsto 0$.
A la gavilla correspondiente a esta pregavilla la conocemos también como la *extension* de $\mathcal{F}$ *por cero* "fuera de U" y la denotamos como $j_!\mathcal{F}$.

Observación. La fibra de $j_!\mathcal{F}$ en todo punto x que no factoriza a través

de $U \to X$ es cero.

Lema 4.1.1 *Sean X, j y U como antes y sea $\mathfrak{G}$ una gavilla en X, entonces*

$$\mathrm{Hom}(j_!\mathbb{Z}, \mathfrak{G}) = \mathfrak{G}(U).$$

Demostración. Sean $U \xrightarrow{j} X$ étale, $\mathfrak{G}$ una gavilla étale en X y $\{U_i \to X\}$ una colección de morfismos étales tal que $\{U_i\} \cup \{U\}$ sea una cubierta étale de X que satisface im $U_i \cap (X - \text{im } U) \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{F} := \mathcal{H}om(j_!\mathbb{Z}, \mathfrak{G})$, en particular $\mathcal{F}(X) = \mathrm{Hom}(j_!\mathbb{Z}, \mathfrak{G})$ y tenemos

$$Hom(j_!\mathbb{Z}, \mathfrak{G}) \hookrightarrow \mathcal{F}(U) \times_X \cdots \times_X \mathcal{F}(U_i) \overset{\to}{\underset{\to}{}} \begin{array}{c} \mathcal{F}(U \times_X U) \\ \oplus_i \mathcal{F}(U \times_X U_i) \\ \oplus_i \mathcal{F}(U_i \times_X U) \\ \oplus_{i,j} \mathcal{F}(U_i \times_X U_j) \end{array}$$

Pero im $U_i \not\subset$ im U para toda i, por tanto $j_!\mathbb{Z}(U_i) = 0$ para toda i, luego $\mathcal{F}(U_i) = 0$ para toda i. Lo mismo sucede con $\mathcal{F}(U \times_X U_i)$ y $\mathcal{F}(U_i \times_X U)$ para toda i y el diagrama de arriba se transforma en la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}(j_!\mathbb{Z}, \mathfrak{G}) \to \mathcal{F}(U) \overset{\to}{\underset{\to}{}} \mathcal{F}(U \times_X U).$$

Sean

$$\Phi = \{\phi : U \to U \mid \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\phi} & U \\ & \searrow \quad {}_j\swarrow & \\ & X & \end{array} \text{ conmuta}\}$$

y

$$\begin{array}{ccc} U \times \Phi & \xrightarrow{\sigma} & U \times_X U \\ (x, \phi) & \mapsto & (x, \phi(x)) \end{array}$$

Como σ es un isomorfismo, $\mathcal{F}(U \times_X U) \cong \mathcal{F}(U \times_X \Phi) = \oplus_\Phi \mathcal{F}(U)$, donde la flecha superior corresponde a $(p_1\sigma)^*$ y la flecha inferior corresponde a $(p_2\sigma)^*$, con p_i las proyecciones naturales de $U \times_X U \to U$. De este modo, puesto que $p_1\sigma(x, \phi) = x$ y $p_2\sigma(x, \phi) = \phi(x)$, se tiene $(p_1\sigma)^* f(x, \phi) = f(x)$ y $(p_2\sigma)^* f(x, \phi) = \phi^* f(x)$, es decir, todo elemento $f \in \mathrm{Hom}(j_!\mathbb{Z}, \mathfrak{G})$ satisface $f(x) = (p_1\sigma)^* f(x, \phi) = (p_2\sigma)^* f(x, \phi) = \phi^* f(x)$ para todo $\phi \in \Phi$.
Como $j_!\mathbb{Z}(U) = \oplus_\Phi \mathbb{Z}$, entonces

$$\mathcal{F}(U) := \mathrm{Hom}(j_!\mathbb{Z}, \mathfrak{G})(U) = \{\oplus_\Phi \mathbb{Z} \to \mathfrak{G}(U)\}$$

y cada elemento $\psi \in \Phi$ induce un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \oplus_\Phi \mathbb{Z} & \to & \mathfrak{G}(U) \\ {}_{\psi^*} \downarrow & & {}_{\psi^*} \downarrow \\ \oplus_\Phi \mathbb{Z} & \to & \mathfrak{G}(U) \end{array}.$$

Observe que $\psi^*(1_\phi = 1_{\psi \circ \phi}$, por lo tanto, si escribimos $f(x)(1_\phi) = g_{\phi, f(x)} \in \mathfrak{G}(U)$, $f(x) = \psi^* f(x) : \oplus_\Phi \mathbb{Z} \to \mathfrak{G}(U)$ equivale a $\psi^* g(\psi \circ \phi, f(x)) = g(\phi, f(x))$ para todo $\psi \in \Phi$. En particular, con $\psi = \phi^{-1}$ tenemos $(\phi^{-1})^* g(id, f(x)) =$

$g(\phi, f(x))$, es decir, $f(x, id)$ es un elemento de $\mathfrak{G}(U)$ que determina (via ϕ^*) a $f(x, \phi)$, luego $f \in \mathfrak{G}(U)$, i.e. $\mathrm{Hom}(j_!\mathbb{Z}, \mathfrak{G}) \subset \mathfrak{G}(U)$.

De manera análoga, a todo elemento $g \in \mathfrak{G}(U)$ le asociamos un elemento f_g en $\mathrm{Hom}(j_!\mathbb{Z}, \mathfrak{G})$ mediante la fórmula

$$f_g(1_\phi) := (\phi^{-1})^* g.$$

Como esta asociación es evidentemente inyectiva, se concluye que $\mathfrak{G}(U) \subset \mathrm{Hom}(j_!\mathbb{Z}, \mathfrak{G})(U)$, lo que demuestra el lema. $\diamond$

Este resultado técnico nos permite demostrar la aciclicidad de las gavillas inyectivas para la cohomología de Čech

Teorema 4.1.2 *Sea $\mathcal{F}$ una gavilla inyectiva sobre un esquema X, entonces para toda cubierta étale $\mathfrak{U} := \{U_i\}$ de X, los grupos de cohomología $\check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ para toda k.*

Demostración. En efecto, estos grupos de cohomología son cero si y sólo si la sucesión

$$\cdots \substack{\to \\ \vdots \\ \to} \oplus \mathcal{F}(U_{i_0 \cdots i_{p-1}}) \substack{\to \\ \vdots \\ \to} \oplus \mathcal{F}(U_{i_0 \cdots i_p}) \substack{\to \\ \vdots \\ \to} \oplus \mathcal{F}(U_{i_0 \cdots i_{p+1}}) \substack{\to \\ \vdots \\ \to} \cdots$$

es exacta, donde $U_{i_0 \cdots i_p} := U_{i_0} \times_X \cdots \times_X U_{i_p}$. Como $\mathcal{F}(U_{i_0 \cdots i_p}) = \mathrm{Hom}(j_{i_0 \cdots i_p !}\mathbb{Z}, \mathcal{F})$, esta sucesión será exacta si y sólo si la sucesión

$$\cdots \substack{\to \\ \vdots \\ \to} j_{i_0 \cdots i_{p+1}!}\mathbb{Z} \substack{\to \\ \vdots \\ \to} j_{i_0 \cdots i_p !}\mathbb{Z} \substack{\to \\ \vdots \\ \to} j_{i_0 \cdots i_{p-1}!}\mathbb{Z} \substack{\to \\ \vdots \\ \to} \cdots$$

es exacta. Ahora bien, con la notación del lema precedente, si $V \to U$ es étale y denotamos por Φ al conjunto de todas las transformaciones de V en V que forman un triángulo conmutativo, entonces tendremos $j_{i_0 \cdots i_{p+1}!}\mathbb{Z}(V) = \oplus_\Phi \mathbb{Z}$, por lo que el resultado buscado equivale a la exactitud del diagrama

$$\cdots \substack{\to \\ \vdots \\ \to} \oplus_{\Phi \times \cdots \times \Phi} \mathbb{Z} \substack{\to \\ \vdots \\ \to} \cdots \substack{\to \\ \to \\ \to} \oplus_{\Phi \times \Phi} \mathbb{Z} \substack{\to \\ \to} \oplus_\Phi \mathbb{Z}$$

que es homótopo a cero, de donde se concluye la exactitud de la sucesión original.
$\diamond$

Gracias a este lema, en la sección siguiente podremos dar condiciones bajo las cuales la cohomología de Čech de una gavilla étale en una variedad coincide con la cohomología étale de la gavilla en dicha variedad

4.2 Teorema de Artin.

Comencemos por observar que $\check{H}^0(\mathcal{F}) = H^0(\mathcal{F})$ para toda gavilla $\mathcal{F}$, simplemente por la definición de ambos grupos de cohomología. En esta sección veremos que, para casi cualquier variedad, la cohomología de Čhech de una gavilla étale coincide con la cohomología étale de dicha gavilla. Comencemos por un caso particular, que ilustra la técnica general.

Lema 4.2.1 *Sea $\mathcal{F}$ una gavilla étale en X, entonces $\check{H}^1(X, \mathcal{F}) = H^1_{ét}(X, \mathcal{F})$.*

DEMOSTRACIÓN. Como toda gavilla admite una resolución inyectiva (sección 3.3), considere la sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} Q \xrightarrow{\beta} R$$

donde Q es una gavilla inyectiva. Por ser Q inyectiva, los grupos de cohomología $H^i(X, Q)$ son cero para $i \geq 1$, por lo que a esta sucesión exacta le podemos asociar el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{e} & \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\delta_0} & \mathcal{F}(V \times_X V) & \xrightarrow{\delta_1} & \mathcal{F}(V \times_X V \times_X) \\
 & & \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow \\
0 & \to & Q(X) & \xrightarrow{e} & Q(V) & \xrightarrow{\delta_0} & Q(V \times_X V) & \xrightarrow{\delta_1} & Q(V \times_X V \times_X) \\
 & & \beta \downarrow & & \beta \downarrow & & \beta \downarrow & & \beta \downarrow \\
0 & \to & R(X) & \xrightarrow{e} & R(V) & \xrightarrow{\delta_0} & R(V \times_X V) & \xrightarrow{\delta_1} & R(V \times_X V \times_X) \\
 & & d \downarrow & & d \downarrow & & d \downarrow & & d \downarrow \\
 & & H^1(X, \mathcal{F}) & & H^1(V, \mathcal{F}) & & H^1(V \times_X V, \mathcal{F}) & & H^1(V \times_X V \times_X, \mathcal{F}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

donde las columnas son exactas.

Sea $\bar{y} \in H^1(X, \mathcal{F})$, como d es suprayectivo, existe $y \in R(X)$ tal que $d(y) = \bar{y}$. Puesto que la sucesión $\mathcal{F} \to Q \to R$ es exacta en fibras, podemos elegir al cubriente étale $\mathfrak{U} := V \to X$ de tal forma que $d \circ e(y) = 0$, pero entonces existe $x \in Q(V)$ tal que $\beta(x) = e(y)$. Para esta x se cumple la relación $\beta \circ \delta_0(x) = \delta_0 \circ \beta(x) = \delta_0 \circ e(y) = 0$, es decir, $\delta_0(x) \in ker\beta$, por tanto existe $z \in \mathcal{F}(V \times_X V)$ tal que $\alpha(z) = \delta_0(x)$, pero entonces se tiene $\alpha \circ \delta_1(z) = \delta_1 \circ \alpha(z) = \delta_1 \circ \delta_0(x) = 0$. Como α es inyectivo se concluye que $z \in \ker\, \delta_1$, por tanto $\bar{z} \in \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

Más aún, si $\bar{z}(\bar{y}) = \bar{z_1}(\bar{y_1})$, entonces $z(\bar{y}) = z(\bar{y_1}) + \delta_0(w)$ para algún $w \in \mathcal{F}(V)$, es decir

$$\begin{aligned}
\delta_0(x) &= \alpha(z(\bar{y})) \\
&= \alpha(z(\bar{y_1}) + \alpha(\delta_0(w)) \\
&= \delta_0(x_1) + \delta_0(\alpha(w)) \\
&= \delta_0(x_1 + \alpha(w))
\end{aligned}$$

pero $\ker\, \delta_0 = \mathrm{im}\, e$ (ver la definición de gavilla), entonces $x = x_1 + \alpha(w) + e(v)$ con $w \in \mathcal{F}(v)$, $v \in \mathbb{Q}(X)$.

De este modo, $e(y) = \beta(x) = \beta(x_1 + \alpha(w) + e(v)) = \beta(x_1) + \beta \circ e(v) = e(y_1) + e \circ \beta(v)$ pues $\beta \circ \alpha = 0$. Como e es inyectivo, concluímos que $y = y_1 + \beta(v)$, de donde $\bar{y} = d(y) = d(y_1) + d \circ \beta(v) = d(y_1) = \bar{y_1}$ pues $d \circ \beta = 0$. La conclusión se sigue de aquí y del corolario (3.4.2).
$\diamond$

Podemos ahora enunciar el resultado principal de esta sección:

Teorema 4.2.2 *Sea X una variedad y suponga que X tiene la siguiente propiedad:*
Para toda cubierta étale $\mathfrak{U} := V \to X$, para todo natural k y para toda cubierta étale $W \to V^k$, existe una cubierta étale $\mathfrak{V} := U \to X$ tal que

$U^k \to W$ existe y es una cubierta étale, donde $V^k := V \times_X \cdots \times_X V$ k veces.
Entonces, para toda gavilla étale $\mathcal{F}$ sobre X se tiene

$$\check{H}^i(X, \mathcal{F}) \cong H^i(X, \mathcal{F}).$$

Demostración. Procederemos por inducción en i. Si $i = 0$, el resultado es cierto por definición de H^0 y $\check{H}^0$. Si $i = 1$, el resultado es cierto por el lema previo.

Sea $i \geq 1$ y supongamos el teorema cierto para toda gavilla étale sobre X y para todo $k \leq i$. Como en el lema previo, considere una sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} Q \xrightarrow{\beta} R$$

donde Q es una gavilla inyectiva. Nuevamente tendremos $H^k(X, R) \cong H^{k+1}(X, \mathcal{F})$ para todo $k \geq 1$ y, por hipótesis de inducción, $H^k(X, R) \cong \check{H}^k(X, R)$ para todo $k \leq i$, en particular tendremos $H^{i+1}(X, \mathcal{F}) \cong H^i(X, R) \cong \check{H}^i(X, R)$. Basta por tanto demostrar que $\check{H}^{i+1}(X, \mathcal{F}) \cong \check{H}^i(X, R)$. Más aún, como $\check{H}^i(X, R)$ es límite de los grupos $\check{H}^i(\mathfrak{U}, R)$, donde $\mathfrak{U}$ es una cuberta étale de X, basta demostrar que $\check{H}^i(\mathfrak{U}, R) \hookrightarrow \check{H}^{i+1}(X, \mathcal{F})$.
Considere el diagrama siguiente, donde $\mathfrak{U} := V \to X$ es un cubriente étale de X, $V^i := V \times_X \cdots \times_X V$ i veces y las columnas son exactas.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \to & \mathcal{F}(V^i) & \stackrel{\delta_{i-1}}{\to} & \mathcal{F}(V^{i+1}) & \stackrel{\delta_i}{\to} & \mathcal{F}(V^{i+2}) & \stackrel{\delta_{i+1}}{\to} & \mathcal{F}(V^{i+3}) & \to & \cdots \\
 & & \alpha\downarrow & & \alpha\downarrow & & \alpha\downarrow & & \alpha\downarrow & & \\
\cdots & \to & Q(V^i) & \stackrel{\delta_{i-1}}{\to} & Q(V^{i+1}) & \stackrel{\delta_i}{\to} & Q(V^{i+2}) & \stackrel{\delta_{i+1}}{\to} & Q(V^{i+3}) & \to & \cdots \\
 & & \beta\downarrow & & \beta\downarrow & & \beta\downarrow & & \beta\downarrow & & \\
\cdots & \to & R(V^i) & \stackrel{\delta_{i-1}}{\to} & R(V^{i+1}) & \stackrel{\delta_i}{\to} & R(V^{i+2}) & \stackrel{\delta_{i+1}}{\to} & R(V^{i+3}) & \to & \cdots \\
 & & d\downarrow & & d\downarrow & & d\downarrow & & d\downarrow & & \\
 & & H^1(V^i, \mathcal{F}) & & H^1(V^{i+1}, \mathcal{F}) & & H^1(V^{i+2}\mathcal{F}) & & H^1(V^{i+3}\mathcal{F}) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Sea $\bar{y} \in \check{H}^i(\mathfrak{U}, R)$ y sea $W \to V^{i+1}$ un cubriente étale de V^{i+1} tal que $\bar{y} \in$ im $(Q(W) \to R(W))$ (recuerde que la sucesión $\mathcal{F} \to Q \to R$ es exacta en fibras); entonces existe un cubriente étale $\mathfrak{V} := U \to V$ de V tal que $U^{i+1} \to W$ es un cubriente étale, en particular tendremos $\bar{y} \in$ im $(Q(U^{i+1}) \to R(U^{i+1}))$ y $R(V^{i+1}) \hookrightarrow R(U^{i+1})$. Considere ahora el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathcal{F}(W) & \stackrel{\delta_{i-1}}{\to} & \mathcal{F}(U^{i+1}) & \stackrel{\delta_i}{\to} & \mathcal{F}(U^{i+2}) & \stackrel{\delta_{i+1}}{\to} & \mathcal{F}(U^{i+3}) & \to & \cdots \\
\alpha\downarrow & & \alpha\downarrow & & \alpha\downarrow & & \alpha\downarrow & & \\
Q(W) & \stackrel{\delta_{i-1}}{\to} & Q(U^{i+1}) & \stackrel{\delta_i}{\to} & Q(U^{i+2}) & \stackrel{\delta_{i+1}}{\to} & Q(U^{i+3}) & \to & \cdots \\
\beta\downarrow & & \beta\downarrow & & \beta\downarrow & & \beta\downarrow & & \\
R(W) & \stackrel{\delta_{i-1}}{\to} & R(U^{i+1}) & \stackrel{\delta_i}{\to} & R(U^{i+2}) & \stackrel{\delta_{i+1}}{\to} & R(U^{i+3}) & \to & \cdots
\end{array}$$

cuyas columnas son exactas.
Como $\bar{y} \in$ im β, existe $y \in Q(U^{i+1})$ tal que $\beta(y) = \bar{y}$, entonces $\beta \circ \delta_i(y) = \delta_i \circ \beta(y) = \delta_i(\bar{y}) = 0$ (por definición de $\check{H}^i(\mathfrak{U}, R)$). Como las columnas son exactas, existe $s \in \mathcal{F}(U^{i+2})$ tal que $\alpha(s) = \delta_i(y)$, por tanto $\alpha \circ \delta_{i+1}(s) = \delta_{i+1} \circ \alpha(s) = \delta_{i+1} \circ \delta_i(y) = 0$, pero α es inyectivo, por tanto $\delta_{i+1}(s) = 0$, es decir, $s \in \ker\, \delta_{i+1}$, i.e., $\bar{s} \in \check{H}^{i+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.
Un argumento similar al empleado en la demostración del lema precedente,

muestra que la asignación $\bar{y} \mapsto \bar{s}$ es inyectiva.
$\diamond$

Observación. Artin demostró que si X es un esquema casi compacto en

el que todo conjunto finito de puntos geométricos tiene una vecindad afín (por ejemplo cualquier variedad casi-proyectiva), entonces para todo par de cubiertas étales $U \to X$ y $W \to U^n$, existe un cubriente étale $V \to U$ tal que $V^n \to W$ es un cubriente étale. En particular, para todos estos esquemas la cohomología de *checkC*ech de cualquier gavilla étale coincide con la cohomología étale de la gavilla.

4.3 Cohomología étale vs. cohomología de Galois.

Los resultados de Artin que hemos visto en la sección precedente permiten comparar la cohomología étale de una gavilla con algunos grupos de cohomología de Galois, lo que será fundamental en las aplicaciones de cohomología étale a problemas aritméticos.

Lema 4.3.1 *Sean $\mathcal{F}$ una gavilla étale, X un esquema conexo e $Y \overset{G}{\to} X$ un cubriente de Galois finito (no ramificado) con grupo de Galois G, entonces*

$$\check{H}^a((Y \to X), \mathcal{F}) = H^a(G, \mathcal{F}(Y)).$$

Demostración. $\check{H}^a((Y \to X), \mathcal{F}) = \ker \delta_a / \mathrm{im}\, \delta_{a-1}$, donde $\mathcal{F}(Y^a) \overset{\delta_{a-1}}{\to} \mathcal{F}(Y^{a+1}) \overset{\delta_a}{\to} \mathcal{F}(Y^{a+2})$. Pero $Y^a \cong Y \times G^{a-1}$, por tanto

$$\mathcal{F}(Y^a) = \mathcal{F}(Y \times G^{a-1}) = \prod_{\bar{g} \in G^{a-1}} \mathcal{F}(Y \times \{\bar{g}\}),$$

es decir, la sucesión exacta anterior puede reescribirse como

$$\prod_{\bar{g} \in G^{a-1}} \mathcal{F}(Y \times \{\bar{g}\}) \overset{\delta_{a-1}}{\to} \prod_{\bar{g} \in G^{a}} \mathcal{F}(Y \times \{\bar{g}\}) \overset{\delta_{a}}{\to} \prod_{\bar{g} \in G^{a+1}} \mathcal{F}(Y \times \{\bar{g}\}). \tag{4.1}$$

donde $\delta_a(s) =??$

Por otro lado, $H^a(G, \mathcal{F}(Y)) = Ext^a_{\mathbf{Z}G}(\mathbb{Z}, \mathcal{F}(Y))$, por lo que podemos calcularlos a partir de cualquier resolución $\mathbb{Z}G$-proyectiva de $\mathbb{Z}$.
Sea $Q^\bullet \to \mathbb{Z} \to 0$ la resolución $\mathbb{Z}G$ proyectiva de $\mathbb{Z}$ dada por $Q_0 = \mathbb{Z}G$.
$Q_n = \mathbb{Z}G$-modulo libre generado por $\bar{g} \in G^n$.
$\alpha_n([g_1, \cdots, g_n]) = g_1[g_2, \cdots, g_n] + \sum(-1)^i [g_1, \cdots, g_i g_{i+1}, \cdots, g_n] + (-1)^n [g_1, \cdots, g_{n-1}]$.

Los morfismos α_i inducen un complejo

$$\cdots \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(Q_{a-1}, \mathcal{F}(Y)) \overset{\alpha_{a-1}}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(Q_a, \mathcal{F}(Y)) \overset{\alpha_a}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(Q_{a+1}, \mathcal{F}(Y)) \overset{\alpha_{a+1}}{\to} \cdots$$

como $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(Q_a, \mathcal{F}(Y)) = \prod_{\bar{g} \in G^a} \mathcal{F}(Y \times \{\bar{g}\})$, el complejo precedente equivale a:

$$\cdots \prod_{\bar{g} \in G^{a-1}} \mathcal{F}(Y \times \{\bar{g}\}) \overset{\alpha_{a-1}}{\to} \cdots \prod_{\bar{g} \in G^{a}} \mathcal{F}(Y \times \{\bar{g}\}) \overset{\alpha_{a}}{\to} \cdots \prod_{\bar{g} \in G^{a+1}} \mathcal{F}(Y \times \{\bar{g}\}) \overset{\alpha_{a+1}}{\to} \cdots$$
(4.2)

donde $\alpha_a(s)$ =??.
Comparando [?] con [?], como $H^a(G, \mathcal{F}(Y)) = \ker \alpha_a / \mathrm{im}\ \alpha_{a-1}$ se tiene la conclusión deseada.
$\diamond$

Corolario 4.3.2 *(Artin). Sean $X = \mathrm{Spec}\ K$, $G = Gal(K^{nr}/K)$ y $\mathcal{F}/X$ una gavilla étale, entonces*

$$H^*_{ét}(X, \mathcal{F}) = H^*(G, \mathcal{F}(\mathrm{Spec}\ K^{nr})).$$

$\diamond$

Si $\mathcal{F}$ es $\mathbf{G}_m$, entonces $H^*_{ét}(X, \mathcal{F}) = H^*(G, (K^{nr})^*))$.

Definición. Sea $\mathcal{F}$ una gavilla l-ádica, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$, entonces definimos

$$H^a_{ét}(X, \mathcal{F}) := \lim_{\leftarrow} H^a_{ét}(X, \mathcal{F}_n).$$

Ejemplo 4.3.2.1 Considere la gavilla $\mathbb{Z}_l = \lim_{la} \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$, entonces $H^a_{ét}(X, \mathbb{Z}_l) := \lim_{\leftarrow} H^a_{ét}(X, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$.

4.4 Sucesión espectral de Leray-Grothendieck

La escuela francesa (Cartan, E. Artin, Leray, etc.) habían desarrollado métodos para comparar algunos grupos de cohomología con los grupos de cohomología en otros espacios, esto en el contexto de la topología algebraica. Grothendieck introdujo una herramienta similar para comparar el valos que toma un funtor con el que toma otro funtor, en el contexto de categorías, lo cual puede particularisarse al contexto del sitio étale de un esquema dado, recobrando entonces los resultado de la vieja escuela, pero en el contexto de la cohomología étale.

El primer resultado que citaremos, sin demostración, es un teorema de Grothendieck, que el llama la *sucesión espectral de Leray*, por su semejanza con un resultado clásico de Leray en el contexto de variedades complejas.

Teorema 4.4.1 *Sean $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ tres categorías. Supongase que se tienen dos funtores*

$$F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

y

$$G : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$$

tales que para todo objeto inyectivo $Q \in Ob(\mathfrak{A})$, $F(Q)$ es un objeto $G-$acíclico en $\mathfrak{B}$, entonces se tiene una sucesión espectral

$$R^iF \circ R^jG(A) \Longrightarrow R^{i+j}(F \circ G)(A)$$

que converge a $R^{i+j}(F \circ G)(A)$.

Ejemplo 4.4.1.1 (Hochschild-Serre) Sea $Y \to X$ un morfismo de Galois étale y con grupo de Galois G. Sea $\mathcal{F}$ una gavilla étale de $\mathbb{Z}$-módulos sobre X, entonces se tiene una sucesión espectral

$$E_2^{i,j} := H^i(G, H^j(Y, \mathcal{F})) \Longrightarrow H^{i+j}(X, \mathcal{F}).$$

En efecto, considere los funtores $F(\mathcal{F}) = \Gamma(Y, \mathcal{F})$ y $L(M) = M^G = H^0(G, M)$, entonces $R^j F_*(\mathcal{F}) = H^j(Y, \mathcal{F})$ y $R^i L_*(M) = H^i(G, M)$, por lo que le teorema de Grothendieck se lee en este caso

$$H^i(G, H^j(Y, \mathcal{F})) \Longrightarrow H^{i+j}(X, \mathcal{F}).$$

Ejemplo 4.4.1.2 Sean $\mathfrak{A} = \acute{E}t/X$ y $\mathfrak{B} = \acute{E}t/Y$; sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas. F induce un funtor, que denotaremos como f_*, de $\acute{E}t/X \to \acute{E}t/Y$, entonces considere el funtor $\Gamma \circ f_*$. La sucesión de Leray-Grothendieck asociada se lee entonces

$$H^i(Y, R^j f_* \mathcal{F}) \Longrightarrow H^{i+j}(X, \mathcal{F})$$

que es la que se conoce como sucesión espectral de Leray.

Ejemplo 4.4.1.3 Sean $\mathfrak{A} = X_{\acute{e}t}$, $\mathfrak{B} = X_{Zar}$ y

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & X_{\acute{e}t} & \to & X_{Zar} \\ & \mathcal{F} & \to & \mathcal{F} \end{array}$$

el morfismo de restricción. Entonces la sucesión espectral de Leray-Grothendieck es

$$H^i_{Zar}(X, R^j \alpha_* \mathcal{F}) \Longrightarrow H^{i+j}_{\acute{e}t}(X, \mathcal{F}).$$

Si $\mathcal{F}$ es una gavilla coherente, entonces $R^j \alpha_* \mathcal{F} = 0$, como puede verificarse fibr a fibra, por tanto la sucesión espectral dice simplemente que, si $\mathcal{F}$ es una gavilla coherente, entonces

$$H^i_{Zar}(X, \mathcal{F}) \cong H^i_{\acute{e}t}(X, \mathcal{F}).$$

Ejemplo 4.4.1.4 (GAGA) Sean ahora $\mathfrak{A} = X_{an}$ el sitio analítico de X, $\mathfrak{B} = X_{Zar}$ y

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & X_{\acute{e}t} & \to & X_{Zar} \\ & \mathcal{F} & \to & \mathcal{F} \end{array}$$

el morfismo de restricción. Entonces la sucesión espectral de Leray-Grothendieck es

$$H^i_{Zar}(X, R^j \alpha_* \mathcal{F}) \Longrightarrow H^{i+j}_{an}(X, \mathcal{F}).$$

Si $\mathcal{F}$ es una gavilla coherente, entonces $R^j \alpha_* \mathcal{F} = 0$, como puede verificarse fibr a fibra, por tanto la sucesión espectral dice simplemente que, si $\mathcal{F}$ es una gavilla coherente, entonces

$$H^i_{Zar}(X, \mathcal{F}) \cong H^i_{an}(X, \mathcal{F}),$$

lo que recupera un viejo resultado de Serre.

Ejemplo 4.4.1.5 Sea X un esquema complejo y sean $\mathfrak{A} = X_{an}$, $\mathfrak{B} = X_{\acute{e}t}$ y

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & X_{\acute{e}t} & \to & X_{an} \\ & \mathcal{F} & \to & \mathcal{F} \end{array}$$

el morfismo de restricción. Entonces la sucesión espectral de Leray-Grothendieck es

$$H^i_{\acute{e}t}(X, R^j\alpha_*\mathcal{F}) \Longrightarrow H^{i+j}_{an}(X, \mathcal{F}).$$

Si $\mathcal{F}$ es una gavilla constante de grupos abelianos entonces $R^j\alpha_*\mathcal{F} = 0$, como puede verificarse fibra a fibra, por tanto la sucesión espectral dice simplemente que, si $\mathcal{F}$ es una gavilla constante de grupos abelianos, entonces

$$H^i_{\acute{e}t}(X, \mathcal{F}) \cong H^i_{an}(X, \mathcal{F}),$$

en particular se tiene

$$\begin{aligned} H^a(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_l &= lim_{la} H^a(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) \\ &= lim_{la} H^a_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) \\ &= H^a_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_l). \end{aligned}$$

4.4.1 En $\mathbf{G}_m$ y en μ_m.

Chapter 5

Clases de Chern.

5.1 Grupo de Brauer.

5.2 Clases de Chern para haces lineales.

5.3 Fórmula de Whitney generalizada.

5.4 Teorema débil de Lefschetz.

5.5 Teorema del índice, de Hodge

◇

Bibliography

[Hartshorne, Robin] *Algebraic Geometry*