Ejercicios de Geometría Algebraica

2014

Pedro Luis del Angel

Primera lista de ejercicios

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ un morfismo de gavillas sobre un espacio topológico X y sea $p \in X$.
a) Demuestre que $(Ker\ f)_p = Ker\ f_p$ y que $(Im\ f)_p = Im\ f_p$.
b) Demuestre que f es inyectivo (respectivamente suprayectivo) si y sólo si f_p es inyectivo (respectivamente suprayectivo) para todo p.
c) Demuestre que un complejo de gavillas de grupos abelianos

$$\ldots \longrightarrow \mathcal{F}^{i-1} \longrightarrow \mathcal{F}^{i} \longrightarrow \mathcal{F}^{i+1} \ldots$$

es exacto si y sólo si el correspondiente complejo de grupos

$$\ldots \longrightarrow \mathcal{F}_p^{i-1} \longrightarrow \mathcal{F}_p^{i} \longrightarrow \mathcal{F}_p^{i+1} \ldots$$

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ un morfismo de pregavillas.
a) Suponga que el morfismo $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ es inyectivo para todo abierto Ude X, demuestre que en ese caso, el morfismo $\mathcal{F}^+ \longrightarrow \mathcal{G}^+$ entre las correspondientes gavillas asociadas también es un monomorfismo.
b) Use el inciso precedente para demostrar que si $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ es un morfismo de gavillas, entonces $Im\ F$ se puede identificar de manera natural con una subgavilla de $\mathcal{G}$.

Ejercicio 3. Demuestre que un morfismo entre gavillas de grupos abelianos es un isomorfismo si y sólo si es un morfismo inyectivo y suprayectivo.

Ejercicio 4. a) Sea $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ un morfismo entre gavillas. Demuestre que f es un isomorfismo si y sólo si f_p es un isomorfismo para todo p.
b) De un ejemplo de dos gavillas $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ tales que $\mathcal{F}_p \cong \mathcal{G}_p$ para todo punto p, pero que no sean isomorfas. ¿Por qué esto no contradice lo enunciado en el inciso a)?