

Gérard Laumon
Laurent Moret-Bailly

Champs algébriques

Springer

*Berlin
Heidelberg
New York
Barcelona
Hong Kong
London
Milan
Paris
Singapore
Tokyo*



Springer

Gérard Laumon
Mathématique, UMR 8628
CNRS et Université de Paris-Sud
F-91405 Orsay, Cedex
France
e-mail: Gerard.Laumon@math.u-psud.fr

Laurent Moret-Bailly
IRMAR, UMR 6625
Université de Rennes 1
Campus de Beaulieu
F-35042 Rennes, Cedex
France
e-mail: Laurent.Moret-Bailly@univ-rennes1.fr

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data

Laumon, Gérard.

Champs algébriques / Gérard Laumon, Laurent Moret-Bailly.

p. cm. -- (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete,

ISSN 0071-1136; 3. Folge, v. 39) Includes bibliographical references (p. --) and index.

ISBN 3-540-65761-4 (acid-free paper) 1. Algebraic fields. I. Moret-Bailly, Laurent. II. Title.

III. Series: Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete; 3. Folge, Bd. 39.

QA247.L38 2000

512'.3--dc21

99-39146
CIP

Mathematics Subject Classification (1991): 14D15, 14D22, 14F20

ISSN 0071-1136

ISBN 3-540-65761-4 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, reuse of illustrations, recitation, broadcasting, reproduction on microfilms or in any other ways, and storage in data banks. Duplication of this publication or parts thereof is permitted only under the provisions of the German Copyright Law of September 9, 1965, in its current version, and permission for use must always be obtained from Springer-Verlag. Violations are liable for prosecution under the German Copyright Law.

  Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2000
Printed in Germany

Typeset in T X by the authors. Edited and reformatted by Kurt Mattes, Heidelberg,
using a Springer T X macro package.

SPIN 10717099 44/3143/LK - 5 4 3 2 1 0 - Printed on acid-free paper

UNIVERSITY
OF
PENNSYLVANIA
LIBRARIES

Introduction

Heureux celui qui peut, d'une aile vigoureuse
S' lancer vers les champs lumineux et sereins...

BAUDELAIRE, *Les Fleurs du mal*

L'objet de ce travail est d'exposer la théorie des champs algébriques développée par Deligne et Mumford [De-Mu] et par Artin [Ar 6].

(0.1) La théorie des champs algébriques a son origine dans la refonte par Grothendieck des bases de la géométrie algébrique ([EGA], [SGA] et [Gr]). On peut voir la catégorie des schémas essentiellement de deux façons :

- soit comme sous-catégorie pleine de la catégorie des espaces localement annelés (c'est le «point de vue géométrique»);
- soit comme sous-catégorie pleine de la catégorie des foncteurs covariants de la catégorie des anneaux dans celle des ensembles (c'est le «point de vue fonctoriel»).

Le second point de vue s'avère –  videmment – plus commode chaque fois qu'il s'agit de construire un schéma X vérifiant une propriété universelle (du moins lorsque celle-ci revient à prédéfinir le foncteur $T \mapsto \text{Hom}(T, X)$ sur la catégorie des schémas). C'est celui qui prévaut dans ce livre.

Pour préciser les choses, notons (Aff) le site dont la catégorie sous-jacente est celle des schémas affines (i.e. la catégorie opposée à celle des anneaux commutatifs et unitaires), munie, disons, de la topologie étale (la topologie fpqc ou fppf ferait aussi bien l'affaire ici). Alors un schéma est un faisceau d'ensembles sur (Aff), ayant la propriété d'être «recouvert pour la topologie de Zariski» par des schémas affines (c'est-à-dire par des foncteurs représentables). Cette définition suggère naturellement des généralisations telles que la notion, souvent plus maniable, d'espace algébrique où l'on remplace «recouvert pour la topologie de Zariski» par «recouvert pour la topologie étale» (notion pour laquelle, d'ailleurs, le «point de vue géométrique» n'a pas de véritable analogue).

Cette approche a constitué un progrès décisif, notamment, dans la construction et l'utilisation de schémas paramétrant eux-mêmes des objets «géométriques», tels que les schémas de Hilbert ou les «variétés de Picard» dont Grothendieck a ainsi obtenu la première définition vraiment satisfaisante, c'est-à-dire indépendante de telle ou telle méthode de construction.

Plutôt que de plaquer une structure de variété plus ou moins naturelle sur un ensemble d'objets (ou de classes d'isomorphie d'objets), on commence par définir un foncteur $F : (\text{Aff}) \rightarrow (\text{Ens})$ (ou $(\text{Sch})^{\text{opp}} \rightarrow (\text{Ens})$) où $F(A)$ est l'ensemble des «familles» d'objets du type considéré paramétrées par $\text{Spec}(A)$, et l'on cherche ensuite si ce foncteur est un schéma, ou un espace algébrique.

(0.2) Cette approche fonctorielle présente cependant de sérieuses limitations. Par exemple, si k est un corps algébriquement clos, on sait que l'ensemble des classes d'isomorphie de k -courbes elliptiques est en bijection avec k , par le truchement de l'invariant modulaire classique j . Si l'on veut étendre cette propriété aux familles, on constate immédiatement qu'à toute T -courbe elliptique E , où T est un k -schéma, on sait associer un élément $j(E)$ de $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$, obtenant ainsi une application, fonctorielle en T , de l'ensemble $\text{ELL}(T)$ des classes d'isomorphie de T -courbes elliptiques vers $\Gamma(T, \mathcal{O}_T) = \text{Hom}_k(T, \mathbb{A}_k^1)$. Comme on l'a dit cette application est bijective pour $T = \text{Spec}(k)$, mais elle n'est, en général, ni injective ni surjective pour T quelconque. Ceci est lié au fait que le foncteur ELL n'est pas un faisceau (ni même un préfaisceau séparé) pour la topologie étale, ce qui ôte tout espoir qu'il soit un schéma ou même un espace algébrique.

Or il y a là quelque chose d'immoral, puisque les courbes elliptiques elles-mêmes se comportent fort bien par descente étale. Le problème rencontré vient donc du passage aux classes d'isomorphie, et de fait il se présente chaque fois que l'on cherche à traiter des problèmes de modules où les objets à classer admettent des automorphismes non triviaux (torseurs sous un groupe, fibrés vectoriels sur une variété, variétés abéliennes polarisées,...). Dans ce cas, on dispose classiquement de deux types de palliatifs.

On peut d'abord «tuer» les automorphismes (rigidifier) par adjonction de structures supplémentaires (telles que les structures de niveau pour les courbes elliptiques) : on remplace alors le foncteur $F : (\text{Aff}) \rightarrow (\text{Ens})$ initial par un autre foncteur F' muni d'un morphisme $\Phi : F' \rightarrow F$ (oubli de la structure supplémentaire), de telle sorte que F' soit, disons, un espace algébrique et que Φ ait de «bonnes» propriétés.

Une autre réponse, en quelque sorte duale, est de trouver un «bon» morphisme $\Psi : F \rightarrow F''$ où F'' est un espace algébrique : on peut demander que Ψ soit universel pour les morphismes de F vers un espace algébrique (ce qui conduit à la notion d'espace de modules grossier, dont le morphisme $\text{ELL} \rightarrow \mathbb{A}^1$ vu plus haut est un exemple), voire pour les morphismes de F vers un faisceau étale (comme dans le cas du schéma de Picard).

Ces deux méthodes, qui consistent à «approcher» le foncteur étudié par un autre plus maniable, sont et resteront utiles mais font perdre de l'information. Or on peut observer que la source des difficultés – le passage aux classes d'isomorphie – est en un sens une contrainte artificielle : ainsi, dans l'exemple du foncteur ELL , l'objet naturel que l'on cherche à étudier est la donnée, pour tout k -schéma T , de la catégorie $\text{ELL}(T)$ des T -courbes elliptiques,

avec comme morphismes les T -isomorphismes de courbes elliptiques, qui est «fonctorielle en T » pour peu que l'on fixe, pour tout k -morphisme $T' \rightarrow T$ et tout objet E de $\text{ELL}(T)$, un produit fibré $E \times_T T'$. L'«application» $T \mapsto \text{ELL}(T)$ vérifie alors une série de propriétés qui en font une *catégorie fibrée en groupoïdes* sur la catégorie des (k -)schémas (ou celle des (k -)schémas affines, à laquelle, pour des raisons techniques, nous préférons nous limiter dans cet ouvrage).

(0.3) La notion de catégorie fibrée – sur une catégorie C donnée – introduite elle aussi par Grothendieck ([SGA 1] VI), généralise la notion de préfaisceau (foncteur contravariant à valeurs dans la catégorie des ensembles) sur C : c'est, en termes imprécis, un «préfaisceau de catégories sur C ». Lorsque C est munie d'une topologie de Grothendieck, l'extension à ce contexte de la notion de faisceau conduit tout naturellement à la notion de *champ* sur C . Ainsi, ELL est un champ de groupoïdes sur la catégorie des k -schémas, pour la topologie fpqc (et donc pour toute topologie moins fine, notamment la topologie étale) : ce n'est là qu'une reformulation du théorème de descente fidèlement plate, dans le cas particulier des courbes elliptiques. La théorie générale des champs sur un site est exposée dans [Gir 2].

L'étude détaillée des champs *algébriques* a commencé avec les travaux de Deligne et Mumford [De-Mu] et d'Artin [Ar 6] (mais dans le cas particulier des courbes elliptiques on trouvera déjà les idées essentielles exposées dans [Mu]). Les champs algébriques jouent en gros le même rôle par rapport aux champs généraux – sur le site étale des (k -)schémas affines – que les espaces algébriques par rapport aux faisceaux d'ensembles : un champ algébrique est un champ $\mathcal{X}$ qui admet un «recouvrement» par un schéma X , c'est-à-dire un morphisme $P : X \rightarrow \mathcal{X}$ vérifiant certaines propriétés dont il existe d'ailleurs deux variantes principales, suivant que l'on exige que P soit étale [De-Mu] ou seulement lisse [Ar 6].

(0.4) Grothendieck propose d'élargir à son tour le cadre précédent en remplaçant les 1-champs par des n -champs (grosso modo, des faisceaux en n -catégories sur (Aff) ou sur un site arbitraire) et il ne fait guère de doute qu'il existe une notion utile de n -champs algébriques. Cette question n'est pas abordée ici mais fait l'objet de travaux récents, tels que [Si]. Par contre nous utiliserons librement le langage des 2-catégories.

(0.5) En gros, cet ouvrage se compose de quatre parties : généralités sur les faisceaux, les espaces algébriques et les champs (chapitres 1 à 3 et appendice), généralités sur les champs algébriques (chapitres 4 à 8), comparaison avec le point de vue fppf (chapitres 9 à 11), faisceaux sur les champs algébriques (chapitres 12 à 18). Donnons un bref aperçu du contenu des chapitres.

Au chapitre 1, nous rappelons très brièvement la définition des espaces algébriques. Pour plus de détails nous renvoyons aux travaux originaux

d'Artin, Knutson et Moishezon ; quelques résultats ont été, faute de référence, rassemblés dans l'appendice.

Le chapitre 2 est consacré à la 2-catégorie des groupoïdes. Par groupoïde nous voulons dire plus exactement catégorie fibrée en groupoïdes au-dessus de (Aff).

La 2-catégorie des champs est introduite au chapitre 3. Nous nous sommes beaucoup inspirés de [De-Mu] pour ce chapitre ainsi d'ailleurs que pour le suivant. Nous nous limitons ici aux champs sur le site (Aff) ; pour les notions générales on renvoie à [Gir 1] ou [Gir 2]. On traite aussi la notion de 1-morphisme de champs représentable (qui apparaît pour la première fois dans [De-Mu]) et la définition et quelques propriétés des gerbes.

Au chapitre 4, nous définissons les champs algébriques. Il s'agit de la définition d'Artin [Ar 6] (restreinte aux champs quasi-séparés), plus générale que celle de [De-Mu]. Le reste de ce chapitre est consacré à définir diverses propriétés des champs algébriques et des 1-morphismes entre eux (en général par réduction au cas des schémas).

Au chapitre 5, nous définissons l'espace topologique sous-jacent à un champ algébrique (qui généralise l'espace sous-jacent à un schéma) et quelques propriétés topologiques élémentaires des morphismes (par exemple : morphismes ouverts, fermés, générants, parties constructibles, théorème de Chevalley).

Au chapitre 6, nous établissons divers résultats de structure pour les champs algébriques, variations sur le thème de l'existence, pour un champ algébrique $\mathcal{X}$, d'un schéma X et d'un morphisme $X \rightarrow \mathcal{X}$ ayant de bonnes propriétés (i.e. permettant de ramener l'étude de $\mathcal{X}$ à celle de X).

Le chapitre 7 est consacré aux critères valuatifs et aux notions de séparation et de propreté. On sait [De-Mu] que, même pour les champs de Deligne-Mumford, l'énoncé du critère valuatif de propreté est plus compliqué que dans le cas des morphismes de schémas. Nous avons essayé d'en donner diverses variantes, mais il faut bien reconnaître qu'en l'état actuel de nos connaissances, la notion de propreté ne prend toute sa puissance que si l'on dispose d'un énoncé du type « lemme de Chow » permettant de se ramener au cas d'un morphisme projectif de schémas. C'est d'ailleurs déjà le cas dans les EGA, où le théorème de finitude pour les images directes (par un morphisme propre) de Modules cohérents repose sur une telle réduction au cas projectif. En ce qui concerne les champs algébriques, cette réduction est possible pour les champs de Deligne-Mumford (cf. (16.6), plus précis que le théorème 4.12 de [De-Mu]) mais nous ne connaissons pas d'énoncé plus général. Le même problème se pose avec le théorème de changement de base (18.5.1) pour les images directes de faisceaux constructibles.

Le chapitre 8 est consacré à la démonstration du résultat suivant : tout champ algébrique dont le morphisme diagonal est non ramifié est un champ de Deligne-Mumford (la réciproque est bien connue et facile). On en tire immédiatement le fait – que certains auteurs semblent considérer comme

trivial – qu'un champ algébrique dont les objets n'ont pas d'automorphismes non triviaux est un espace algébrique.

Les chapitres 9, 10 et 11 s'articulent autour du théorème d'Artin selon lequel, en gros, le champ quotient d'un groupoïde plat est algébrique. Entre autres conséquences importantes, ce théorème implique notamment que l'on ne changerait rien à la notion de champ algébrique en utilisant dans la définition la topologie fppf plutôt que la topologie étale, et des « présentations fppf » plutôt que lisses. Ceci justifie les préliminaires du chapitre 9 sur les topologies utilisées, la topologie étale étant jusqu'alors la « topologie par défaut ». Le résultat principal (10.1) est donné ensuite, ainsi que les importants théorèmes de représentabilité qu'il implique. Signalons cependant les résultats de représentabilité obtenus précédemment par Grothendieck ([Gr 1] III, [SGA 3] V, [Mur]) et Raynaud ([Ra 1] et [Ra 2]). Enfin, comme autre application, nous définissons au chapitre 11 les notions de point algébrique d'un champ algébrique et de gerbe résiduelle en un tel point, ainsi que la notion de dimension. Nous montrons en particulier (11.5) qu'un champ algébrique de type fini sur un schéma noethérien admet une stratification par des sous-champs localement fermés qui sont des gerbes sur des espaces algébriques.

L'étude des faisceaux sur un champ algébrique commence au chapitre 12, où sont étudiés le site « lisse-étale » d'un tel champ et le topos associé. Il faut prendre garde que dans le cas d'un espace algébrique, ce topos est plus gros que le topos étale usuel qui s'identifie seulement à la sous-catégorie pleine du topos lisse-étale formée des faisceaux « cartésiens ». Cette dernière notion a un sens pour tout champ algébrique $\mathcal{X}$, et la catégorie des faisceaux lisses-étales cartésiens sur $\mathcal{X}$ admet une description simpliciale, dans l'esprit de [De 1], permettant d'en ramener l'étude à celle des faisceaux étales sur un espace algébrique simplicial construit à l'aide d'une présentation de $\mathcal{X}$. Ce point de vue a une grande importance « technique » dans la suite de l'ouvrage.

Au chapitre 13, nous considérons les faisceaux quasi-cohérents sur les champs algébriques et leurs fonctorialités, ainsi que la descente fidèlement plate de ces faisceaux.

Le chapitre 14 est consacré d'une part aux « constructions locales » $\mathbb{V}(\mathcal{E})$, $\mathbb{P}(\mathcal{E})$,... sur les champs algébriques, d'autre part à la notion de champ de Picard et à la correspondance de Deligne entre champs de Picard et complexes de longueur 1.

Au chapitre 15, nous traitons les fonctorialités des faisceaux cohérents sur les champs algébriques localement noethériens.

Les sorites des chapitres précédents sont exploités au chapitre 16 qui contient deux résultats de structure importants : une généralisation (partielle) du « Main Theorem » de Zariski (16.5), et l'existence, pour tout champ de Deligne-Mumford noethérien $\mathcal{X}$, d'un morphisme *fini et surjectif* $X \rightarrow \mathcal{X}$, où X est un schéma (16.6). Ce théorème améliore le « lemme de Chow » énoncé sans démonstration dans [De-Mu] et, comme on l'a dit plus haut, il simplifie

l'utilisation de la notion de propreté pour les champs de Deligne-Mumford; il entraîne en particulier (15.6) le théorème de finitude des images directes de Modules cohérents par un morphisme propre de champs de Deligne-Mumford noethériens.

Au chapitre 17, nous définissons le complexe cotangent d'un morphisme de champs algébriques. La construction, assez élaborée, procède par descente à partir du cas d'un morphisme de schémas (ou d'espaces algébriques). Pour pouvoir appliquer commodément les théorèmes de descente disponibles on est amené à travailler avec des complexes bornés, de sorte que l'objet construit est un système projectif de tels complexes (correspondant, dans le cas d'un morphisme $X \rightarrow Y$ de schémas, au système projectif indexé par $n \in \mathbb{N}$ des tronqués $\tau_{\geq -n} L_{X/Y}$ du complexe cotangent $L_{X/Y}$ habituel). De façon peut-être plus gênante, chacun des «complexes» du système n'est en réalité qu'un ind-objet essentiellement constant de la catégorie dérivée, en raison de la construction par descente qui implique le choix arbitraire d'une «présentation». On voit que l'on a perdu l'un des agréments – à vrai dire un peu miraculeux – de la définition du complexe cotangent d'un morphisme de topos donnée dans [II], qui est l'existence d'un «vrai complexe». Tout monstrueux qu'il soit, l'objet obtenu, et notamment sa cohomologie, a les propriétés que l'on en attend; noter qu'il s'agit d'un complexe à degrés ≤ 1 et non à degrés ≤ 0 , son faisceau $\mathcal{M}^1$ s'interprétant en termes des groupes d'automorphismes des objets du champ considéré. On termine le chapitre 17 par la définition du champ tangent à un champ algébrique.

Le chapitre 18 est consacré aux faisceaux lisses-étales constructibles (et plus généralement cartésiens) et à leurs fonctorialités.

Enfin le chapitre 19 rassemble quelques résultats récents, en renvoyant aux articles originaux, et l'appendice, en revanche, contient des énoncés utiles sur les espaces algébriques pour lesquels, selon la formule consacrée, «il n'a pas été possible de donner une référence commode».

Nous remercions O. Gabber, L. Illusie, et M. Raynaud pour les discussions fructueuses que nous avons eues avec eux durant la préparation de ce travail, ainsi que le referee pour sa lecture attentive du manuscrit et ses remarques pertinentes. La citation de Baudelaire nous a été suggérée par L. Lafforgue. Nous remercions Mme Bonnardel, Mme Le Bronnec et Mme Brunel qui ont assuré avec compétence la frappe des premières versions du manuscrit.

Convention. Parmi les partis pris de ce livre, signalons les suivants : nous nous limitons aux champs algébriques *quasi-séparés* sur un schéma de base fixé, et supposé lui aussi quasi-séparé; d'autre part nous avons systématiquement ignoré les problèmes logiques habituellement résolus (dans [SGA 4] notamment) par des choix d'univers.

Table des matières

1. La catégorie des S -espaces et sa sous-catégorie strictement pleine des S -espaces algébriques	1
2. La 2-catégorie des S -groupoïdes	7
3. La sous 2-catégorie strictement pleine des S -champs dans (Gr/S)	15
4. La 2-catégorie des S -champs algébriques	25
5. Points d'un S -champ algébrique; topologie de Zariski	39
6. Quelques résultats de structure locale	47
7. Critères valuatifs; morphismes universellement fermés, morphismes séparés, morphismes propres	59
8. Caractérisation des espaces algébriques et des champs de Deligne-Mumford	73
9. Parenthèse sur les topologies plates	77
10. Les critères d'Artin pour qu'un S -champ soit algébrique	81
11. Points algébriques, faisceaux résiduels, gerbes résiduelles, dimension	93
12. Faisceaux sur le site lisse-étale d'un S -champ algébrique	101
13. Modules quasi-cohérents sur un S -champ algébrique	119
14. Constructions locales	133
15. Modules cohérents sur les S -champs algébriques localement noethériens	145

16. Le théorème principal de Zariski. Applications à la structure globale des champs de Deligne-Mumford	151
17. Le complexe cotangent d'un 1-morphisme de champs algébriques	157
18. Faisceaux constructibles sur un S -champ algébrique	175
19. Quelques prolongements	193
A. Appendice : compléments sur les espaces algébriques	197
Bibliographie	201
Index terminologique	205

1. La catégorie des S -espaces et sa sous-catégorie strictement pleine des S -espaces algébriques

On fixe un schéma de base S . On notera (Aff/S) la catégorie des schémas affines munis d'un morphisme de schémas dans S . Remarquer que cette catégorie n'a pas en général d'objet final (sauf si S est affine) ni de produits (sauf si S est séparé) mais qu'elle admet des produits fibrés.

On munira (Aff/S) de la *topologie étale*, i.e. de la topologie engendrée par la prétopologie suivante : pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, les familles couvrantes de U sont les familles finies $(V_i \xrightarrow{\varphi_i} U)_{i \in I}$ de flèches dans (Aff/S) telles que chaque φ_i soit un morphisme étale et que U soit réunion ensembliste des images des φ_i (lesquelles sont des ouverts de U).

On voit qu'en considérant la somme des U_i , on peut souvent se limiter aux familles couvrantes à un élément.

Un S -espace est par définition un faisceau d'ensembles sur le site (Aff/S) ainsi défini ; on note (Es/S) la catégorie de ces S -espaces.

D'après ([SGA 1] VIII, 5.1), la catégorie (Sch/S) des S -schémas s'identifie à une sous-catégorie pleine de (Es/S) : à tout S -schéma X on associe le faisceau $U \mapsto X(U) = \text{Hom}_{(\text{Sch}/S)}(U, X)$ sur (Aff/S) . Par abus de langage, on dira qu'un S -espace « est » un (S) -schéma s'il appartient à l'image essentielle de (Sch/S) .

En particulier, le S -schéma S correspond à l'objet final de (Es/S) , et le produit de deux objets X et Y de (Es/S) pourra indifféremment se noter $X \times Y$ ou $X \times_S Y$.

Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ dans (Es/S) sera dit *schématique* si pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et tout $y \in Y(U)$ (vu comme morphisme $U \rightarrow Y$ dans (Es/S)) le produit fibré $U \times_{y, Y, f} X$ est un schéma. Les propriétés de morphismes de S -schémas qui sont stables par changement de base s'étendent naturellement aux morphismes schématiques de S -espaces : on peut ainsi parler de morphismes schématiques et étales, schématiques et quasi-compacts... dans (Es/S) .

Nous définirons les S -espaces algébriques de la manière suivante :

DÉFINITION (1.1). — Un S -espace algébrique (*sous-entendu quasi-séparé*) est un S -espace X vérifiant les propriétés suivantes :

(i) le morphisme diagonal de X , $X \rightarrow X \times_S X$, est schématique et quasi-compact ;

(ii) il existe un schéma X' et un morphisme de S -espaces $X' \xrightarrow{\pi} X$ (automatiquement schématique d'après (i)) qui est étale et surjectif.

On note $(\text{Es.alg}/S)$ la sous-catégorie (strictement) pleine de (Es/S) dont les objets sont les S -espaces algébriques; (Sch/S) est contenue dans $(\text{Es.alg}/S)$.

La définition (1.1) est équivalente à la définition de Knutson ([Kn] II, 1.1) que nous rappelons ci-dessous (1.2).

Une relation d'équivalence X , dans (Es/S) est la donnée de deux S -espaces X_0 et X_1 et d'un monomorphisme de S -espaces (i.e. un monomorphisme de faisceaux)

$$X_1 \xrightarrow{\delta} X_0 \times_S X_0$$

tels que, pour tout objet U de (Aff/S) ,

$$X_1(U) \xrightarrow{\delta(U)} X_0(U) \times X_0(U)$$

soit le graphe d'une relation d'équivalence dans la catégorie des ensembles; un quotient pour la relation d'équivalence X , est par définition un faisceau conoyau du diagramme

$$X_1 \xrightleftharpoons[\text{pr}_1 \circ \delta]{\text{pr}_2 \circ \delta} X_0.$$

Un tel S -espace quotient Q existe toujours, et X_1 s'identifie canoniquement au carré fibré $X_0 \times_Q X_0$. Inversement, pour tout épimorphisme $X_0 \twoheadrightarrow Q$ dans (Es/S) , Q s'identifie au S -espace quotient de la relation d'équivalence donnée par la flèche naturelle $X_0 \times_Q X_0 \rightarrow X_0 \times_S X_0$. Tout ceci résulte d'énoncés généraux sur les faisceaux, cf. par exemple ([SGA 4] II, 4).

PROPOSITION (1.2). — Pour qu'un S -espace soit un S -espace algébrique, il faut et il suffit qu'il soit quotient pour au moins une relation d'équivalence X , dans (Es/S) où X_0, X_1 sont des S -schémas, $\text{pr}_1 \circ \delta, \text{pr}_2 \circ \delta$ des morphismes étales (de S -schémas) et δ un monomorphisme quasi-compact (de S -schémas). De façon plus précise :

(a) si X est un S -espace algébrique et si $\pi : X' \rightarrow X$ est un morphisme comme en (1.1)(ii), alors les projections $\text{pr}_1, \text{pr}_2 : X' \times_X X' \rightarrow X'$ sont étales, le morphisme $(\text{pr}_1, \text{pr}_2) : X' \times_X X' \rightarrow X' \times_S X'$ est quasi-compact et X est le quotient de la relation d'équivalence définie par ce morphisme;

(b) si X , est une relation d'équivalence dans (Sch/S) avec $\text{pr}_1 \circ \delta, \text{pr}_2 \circ \delta$ étales et δ quasi-compact, alors le S -espace quotient de X , est algébrique et le morphisme canonique de X_0 vers ce quotient est schématique, étale et surjectif.

Preuve : ([Kn] II, 1.3). $\square$

L'intérêt principal de la notion de S -espace algébrique vient du résultat suivant, qui sera renforcé au chapitre 10 par le critère d'Artin (où «étales» sera remplacé par «plats et localement de présentation finie»).

PROPOSITION (1.3). — Soit X , une relation d'équivalence dans (Es/S) où X_0, X_1 sont des S -espaces algébriques, $\text{pr}_1 \circ \delta, \text{pr}_2 \circ \delta$ des morphismes étales de S -espaces algébriques et δ un monomorphisme de type fini de S -espaces algébriques. Alors, «le» S -espace quotient pour X , est un S -espace algébrique.

Preuve : ([Kn] II, 3.14), joint à (A.2) qui montre que δ est quasi-affine. $\square$

Remarques (1.4) : (1) Le lecteur attentif aura observé que notre définition des S -espaces algébriques (même sous la forme équivalente résultant de (1.2)) diffère légèrement de celle de Knutson : pour celui-ci, les espaces algébriques sont des faisceaux sur la catégorie des schémas. La restriction aux schémas affines, adoptée ici, est clairement inoffensive, un faisceau sur (Aff/S) se prolongeant naturellement en un faisceau sur la catégorie des schémas.

(2) Nous montrerons en (A.4) que tout S -espace algébrique est en fait un faisceau pour la topologie fpqc.

(3) Bien entendu, le mot «quasi-séparé» dans la définition (1.1) renvoie à l'hypothèse de quasi-compactité du morphisme diagonal de (1.1)(i). Cette hypothèse (ainsi que son pendant, la quasi-compactité de δ dans (1.2)(b) et dans (1.3)) est utilisée dans les démonstrations de (1.2) et de (A.4). Pour des commentaires sur cette question, voir ([Kn] II, 1.9).

(4) La plupart des notions et des résultats de la théorie des S -schémas se généralisent à la théorie des S -espaces algébriques, comme cela est expliqué dans [Kn]. Nous utiliserons librement ces généralisations, même si elles ne sont pas explicitées dans la littérature.

DÉFINITION (1.5). — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme dans (Es/S) . On dit que f est représentable si pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et toute section $y \in Y(U)$, le S -espace $X \times_{f,Y,y} U$ est un S -espace algébrique.

Un S -espace est dit représentable si c'est un S -espace algébrique.

Remarque (1.5.1) : Il est clair que tout morphisme de S -espaces algébriques est représentable, et que la représentabilité est une propriété stable par changement de base (existence des produits fibrés dans $(\text{Es.alg}/S)$, cf. ([Kn] II, 1.5)). Si X est un S -espace représentable, le morphisme de X vers le faisceau final (représenté par S) est représentable; la réciproque – qui justifie la terminologie – est un cas particulier de (1.6.1) ci-dessous.

Bien entendu, on étendra aux morphismes représentables de S -espaces les propriétés des morphismes de S -espaces algébriques stables par changement de base.

La notion de morphisme représentable permet par exemple de reformuler (1.3) comme suit :

PROPOSITION (1.6). — Soit $p : X' \rightarrow X$ un morphisme dans (Es/S) . On suppose que :

(i) X' est un S -espace algébrique;

- (ii) p est représentable, étale et surjectif;
 (iii) $(pr_1, pr_2) : X' \times_X X' \rightarrow X' \times_S X'$ (qui est un morphisme d'espaces algébriques d'après (i) et (ii)) est quasi-compact.

Alors X est un S -espace algébrique.

Preuve : D'après (ii), p est un épimorphisme dans (Es/S) de sorte que X est le quotient de la relation d'équivalence naturelle $(pr_1, pr_2) : X' \times_X X' \rightarrow X' \times_S X'$. Il suffit donc d'appliquer (1.3) (remarquer que, comme p est localement de présentation finie, (pr_1, pr_2) est localement de type fini et donc de type fini d'après (iii)). $\square$

COROLLAIRE (1.6.1). — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme représentable dans (Es/S) . Si Y est un S -espace algébrique, il en est de même de X .

Preuve : Il existe un S -schéma Y' , somme de schémas affines, et un morphisme $q : Y' \rightarrow Y$ vérifiant les hypothèses de (1.6). Il suffit alors d'appliquer (1.6) au morphisme $p : X' \rightarrow X$ déduit de q par le changement de base f . $\square$

COROLLAIRE (1.6.2). — Soient $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ deux morphismes dans (Es/S) . Alors :

- (a) si f et g sont représentables, il en est de même de $g \circ f$;
 (b) si $g \circ f$ est représentable, alors f est représentable dans chacun des cas suivants :
 (i) le morphisme naturel $Y \times_Z Y \rightarrow Y \times_S Y$ est représentable;
 (ii) le morphisme diagonal $Z \rightarrow Z \times_S Z$ est représentable;
 (iii) g est un monomorphisme.

Preuve : (a) est une conséquence immédiate de (1.6.1); pour (b), donnons-nous $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et $y \in Y(U)$: pour voir que $X \times_Y U$ est représentable dans le cas (i) il suffit de considérer le diagramme cartésien naturel suivant, dont le lecteur explicitera les flèches :

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y U & \longrightarrow & X \times_Z U \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ Y \times_Z Y & \longrightarrow & Y \times_S Y \end{array}$$

et d'appliquer (1.6.1) à la flèche horizontale supérieure. Le cas (ii) (resp. (iii)) en résulte puisque $Y \times_Z Y \rightarrow Y \times_S Y$ se déduit par changement de base de $Z \rightarrow Z \times_S Z$ (resp. est un isomorphisme). $\square$

COROLLAIRE (1.6.3). — Soit

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{p} & X \\ f' \downarrow & \square & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{q} & Y \end{array}$$

un carré cartésien dans (Es/S) . On suppose que f' est représentable et que q est un épimorphisme. Alors f est représentable.

Preuve : On peut supposer que Y est un S -schéma affine; l'hypothèse sur q signifie alors qu'il existe un Y -schéma affine Y'' , étale et surjectif sur Y , et un Y -morphisme de Y'' dans Y' . Remplaçant Y' par Y'' , nous sommes ramenés au cas où Y et Y' sont des schémas et où q , et donc p , est étale et surjectif. Comme f' est représentable, X' est alors un S -espace algébrique et nous pouvons appliquer (1.6). $\square$

COROLLAIRE (1.6.4). — Soit $p : X' \rightarrow X$ un morphisme étale et surjectif de S -espaces algébriques. Alors p est un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée des S -espaces algébriques.

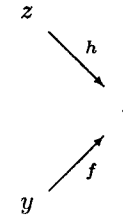
Preuve : p est un morphisme de descente effective dans (Es/S) puisque c'est un épimorphisme; par suite tout X' -espace algébrique muni d'une donnée de descente relativement à p provient par changement de base d'un unique S -espace au-dessus de X . Le fait que ce dernier soit algébrique résulte de (1.6.3). $\square$

2. La 2-catégorie des S -groupoïdes

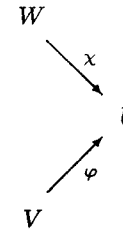
Rappelons qu'un *groupoïde* est une catégorie dont toutes les flèches sont des isomorphismes.

DÉFINITION (2.1). — *Un S -groupoïde est la donnée d'une catégorie $\mathcal{K}$ et d'un foncteur $a : \mathcal{K} \rightarrow (\text{Aff}/S)$ (appelé morphisme structural) vérifiant les axiomes suivants :*

- (i) *pour toute flèche $V \xrightarrow{\varphi} U$ dans (Aff/S) et tout objet x de $\mathcal{K}$ tel que $a(x) = U$, il existe au moins une flèche $y \xrightarrow{f} x$ dans $\mathcal{K}$ avec $a(f) = \varphi$;*
- (ii) *pour tout diagramme*



dans $\mathcal{K}$ d'image



dans (Aff/S) et toute flèche $W \xrightarrow{\psi} V$ dans (Aff/S) telle que $\chi = \varphi \circ \psi$, il existe une et une seule flèche $z \xrightarrow{g} y$ dans $\mathcal{K}$ telle que $h = f \circ g$ et que $a(g) = \psi$.

Pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, on notera $\mathcal{K}_U$ et on appellera catégorie fibre de $\mathcal{K}$ en U la sous-catégorie de $\mathcal{K}$ dont les objets sont les $x \in \text{ob } \mathcal{K}$ tels que $a(x) = U$ et dont les flèches sont les $f \in \text{fl } \mathcal{K}$ telles que $a(f) = \text{Id}_U$. La

catégorie $\mathcal{K}_U$ est un groupoïde : dans (ii), prendre $U = V = W$, $\varphi = \psi = \text{Id}_U$, $z = x$, $h = \text{Id}_x$.

Pour toute flèche $V \xrightarrow{\varphi} U$ dans (Aff/S) et tout $x \in \text{ob } \mathcal{K}$, l'axiome (ii) implique que la flèche $y \xrightarrow{f} x$ dans $\mathcal{K}$, dont (i) assure l'existence, est unique à isomorphisme unique près ; pour chaque $V \xrightarrow{g} U$ et chaque x , on choisira une fois pour toutes une telle flèche $y \xrightarrow{f} x$ que l'on notera $\varphi^*x \rightarrow x$ ou encore $x_V \rightarrow x$. De plus, pour toute flèche $x' \xrightarrow{f} x$ dans $\mathcal{K}_U$, on notera φ^*f ou f_V l'unique flèche g dans $\mathcal{K}_V$ qui fait commuter le carré

$$\begin{array}{ccc} \varphi^*x' & \longrightarrow & x' \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ \varphi^*x & \longrightarrow & x. \end{array}$$

On définit ainsi un foncteur φ^* de $\mathcal{K}_U$ dans $\mathcal{K}_V$ pour toute flèche $V \xrightarrow{\varphi} U$ dans (Aff/S) . On appelle ce foncteur «le» *foncteur de changement de base par φ* et on le note encore $(-)_V$. Pour deux flèches composables $W \xrightarrow{\psi} V$ et $V \xrightarrow{\varphi} U$ dans (Aff/S) , on a un isomorphisme canonique de foncteurs

$$\psi^* \circ \varphi^* \cong (\varphi \circ \psi)^*$$

et ces isomorphismes de foncteurs vérifient la condition de cocycle usuelle. On voit ainsi que le morphisme structural fait de tout S -groupoïde une *catégorie fibrée* sur (Aff/S) , au sens de ([SGA 1] VI, 6.1) et que l'on aurait pu, de façon essentiellement équivalente, définir un S -groupoïde comme une catégorie fibrée dont les catégories fibres sont des groupoïdes.

(2.2) Les S -groupoïdes forment une 2-catégorie (cf. [Ha]), notée (Gr/S) : les objets sont les S -groupoïdes, les 1-flèches sont les foncteurs entre catégories sous-jacentes aux S -groupoïdes qui sont strictement compatibles aux morphismes structuraux et les 2-flèches sont les isomorphismes entre les foncteurs qui définissent les 1-flèches.

Un 1-morphisme $\mathcal{K} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ dans (Gr/S) est un (1-)monomorphisme (resp. isomorphisme) si, pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, le foncteur $F_U : \mathcal{K}_U \rightarrow \mathcal{Y}_U$ est pleinement fidèle (resp. une équivalence de catégories).

La description des S -groupoïdes comme catégories fibrées rend clair le fait que les limites inductives et projectives arbitraires de S -groupoïdes sont encore des S -groupoïdes, ces limites se calculant «fibre à fibre».

(2.2.1) Explicitons par exemple la construction des sommes disjointes. Soit $(\mathcal{K}_i)_{i \in I}$ une famille de S -groupoïdes. Pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, la catégorie fibre $(\coprod_{i \in I} \mathcal{K}_i)_U$ est simplement la somme des catégories $(\mathcal{K}_i)_U$, que l'on peut définir ainsi : un objet de $(\coprod_{i \in I} \mathcal{K}_i)_U$ est un couple (i, x_i) où $i \in I$ et $x_i \in \text{ob}(\mathcal{K}_i)_U$; pour deux tels objets (i, x_i) et (j, y_j) , $\text{Hom}((i, x_i), (j, y_j))$ est par définition $\text{Hom}_{\mathcal{K}_i}(x_i, y_j)$ si $i = j$, et est vide si $i \neq j$. La composition

des flèches et les foncteurs de changement de base se définissent de manière triviale.

(2.2.2) Pour un exemple un peu moins élémentaire, et utile dans la suite, soient

$$\mathcal{K}' \xrightarrow{F'} \mathcal{Y} \xleftarrow{F''} \mathcal{K}''$$

deux 1-flèches dans (Gr/S) de même but, et construisons le produit fibré $\mathcal{K}' \times_{F', \mathcal{Y}, F''} \mathcal{K}''$. Pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, la catégorie fibre $(\mathcal{K}' \times_{F', \mathcal{Y}, F''} \mathcal{K}'')_U$ a pour objets les triplets

$$(x', x'', g)$$

où $x' \in \text{ob } \mathcal{K}'_U$, $x'' \in \text{ob } \mathcal{K}''_U$, et où g est une flèche de $F'(x')$ vers $F''(x'')$ dans $\mathcal{Y}_U$; une flèche de (x'_1, x''_1, g_1) vers (x'_2, x''_2, g_2) dans cette catégorie fibre est un couple

$$(x'_1 \xrightarrow{f'} x'_2, x''_1 \xrightarrow{f''} x''_2)$$

où $f' \in \text{fl } \mathcal{K}'_U$, $f'' \in \text{fl } \mathcal{K}''_U$, tel que

$$g_2 \circ F'(f') = F''(f'') \circ g_1.$$

Enfin, pour toute flèche $V \xrightarrow{\varphi} U$ dans (Aff/S) , on a

$$\varphi^*(x', x'', g) = (\varphi^*x', \varphi^*x'', \varphi^*g)$$

et

$$\varphi^*(f', f'') = (\varphi^*f', \varphi^*f'').$$

(2.2.3) (Gr/S) a également un objet final $\mathcal{S}$, caractérisé par la propriété que pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, la catégorie fibre $\mathcal{S}_U$ soit équivalente à la catégorie ponctuelle. En conséquence (Gr/S) a des produits finis : si $\mathcal{K}'$ et $\mathcal{Y}$ sont deux S -groupoïdes, $(\mathcal{K}' \times_S \mathcal{Y})_U$ est simplement la catégorie produit $\mathcal{K}'_U \times \mathcal{Y}_U$, où l'on a noté $\mathcal{K}' \times_S \mathcal{Y}$ le produit de $\mathcal{K}'$ et $\mathcal{Y}$.

(2.2.4) Pour tout 1-morphisme $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{Y}$ dans (Gr/S) , explicitons le morphisme diagonal $\Delta_{\mathcal{K}/\mathcal{Y}} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K} \times_{F, \mathcal{Y}, F} \mathcal{K}$: pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et tout $x \in \text{ob } \mathcal{K}_U$, on a $\Delta_{\mathcal{K}/\mathcal{Y}}(x) = (x, x, \text{Id}_{F(x)})$; pour toute flèche $f : x \rightarrow x'$ dans $\mathcal{K}_U$, $\Delta_{\mathcal{K}/\mathcal{Y}}(f)$ est la flèche $(x \xrightarrow{f} x', x \xrightarrow{f} x')$ dans $(\mathcal{K} \times_{F, \mathcal{Y}, F} \mathcal{K})_U$. Le lecteur vérifiera sans peine la proposition suivante (qui n'est qu'un énoncé général sur les produits fibrés de catégories, appliqué aux catégories fibres) :

PROPOSITION (2.3). — Soit $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{Y}$ un 1-morphisme dans (Gr/S) , et soit $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$. Considérons le foncteur $(\Delta_{\mathcal{K}/\mathcal{Y}})_U : \mathcal{K}_U \rightarrow (\mathcal{K} \times_{F, \mathcal{Y}, F} \mathcal{K})_U$. Alors :

(i) Le foncteur $(\Delta_{\mathcal{K}/\mathcal{Y}})_U$ est toujours fidèle ;

(ii) $(\Delta_{\mathcal{K}/\mathcal{Y}})_U$ est pleinement fidèle si et seulement si $F_U : \mathcal{K}_U \rightarrow \mathcal{Y}_U$ est fidèle ;

(iii) $(\Delta_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}})_U$ est une équivalence si et seulement si $F_U : \mathcal{X}_U \rightarrow \mathcal{Y}_U$ est pleinement fidèle. $\square$

Remarque (2.3.1) : En particulier un 1-morphisme dans (Gr/S) est un monomorphisme si et seulement si sa diagonale est un isomorphisme.

2.4) Exemples de S -groupoïdes.

2.4.1) Soit X un préfaisceau sur (Aff/S) (i.e. un foncteur $(\text{Aff}/S)^{\text{opp}} \rightarrow \text{Ens}$). On note encore X le S -groupoïde suivant : pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, la catégorie fibre X_U est la catégorie discrète ayant pour ensemble d'objets $X(U)$; pour toute flèche $\varphi : V \rightarrow U$ dans (Aff/S) , φ^* est donné par la restriction $X(U) \rightarrow X(V)$. On laisse au lecteur le soin de vérifier les résultats suivants :

PROPOSITION (2.4.1.1). — Soit $\mathcal{X}$ un S -groupoïde. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\mathcal{X}$ est (1-isomorphe au groupoïde) associé à un préfaisceau ;
- (ii) pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, $\mathcal{X}_U$ est équivalente à une catégorie discrète les seuls automorphismes de ses objets sont les identités ;
- (iii) $\Delta_{\mathcal{X}/S} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ est un monomorphisme. $\square$

Remarque (2.4.1.2) : Comme le lecteur attentif l'aura remarqué, seules les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) sont vraies en toute généralité. Pour déduire (i) des deux autres propriétés, il faut supposer au départ que les catégories fibres ont «petites» relativement à des choix d'univers que les auteurs n'ont pas cru bon de préciser au début de cet ouvrage. Ils justifient ce déplorable laxisme (dont ce n'est pas le dernier exemple) par l'espoir que ledit ouvrage gagne en lisibilité ce qu'il perd peut-être en rigueur.

PROPOSITION (2.4.1.3). — Soit $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un 1-morphisme dans (Gr/S) . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) pour tout préfaisceau T et tout 1-morphisme $u : T \rightarrow \mathcal{Y}$, le S -groupoïde $\mathcal{X} \times_{F, \mathcal{Y}, u} T$ est associé à un préfaisceau ;
- (ii) pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, $F_U : \mathcal{X}_U \rightarrow \mathcal{Y}_U$ est fidèle ;
- (iii) $\Delta_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_{F, \mathcal{Y}, F} \mathcal{X}$ est un monomorphisme. $\square$

LEMME (2.4.1.4). — Soient $\mathcal{Y}$ un S -groupoïde, X' et X'' deux préfaisceaux sur (Aff/S) , $u' : X' \rightarrow \mathcal{Y}$, $u'' : X'' \rightarrow \mathcal{Y}$ deux 1-morphismes dans (Gr/S) . Alors le produit fibré $X' \times_{u', \mathcal{Y}, u''} X''$ est associé à un préfaisceau.

Preuve : On a un diagramme 2-cartésien dans (Gr/S) , dont le lecteur explicitera les flèches :

$$\begin{array}{ccc} X' \times_{u', \mathcal{Y}, u''} X'' & \longrightarrow & X' \times_S X'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{Y} & \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{Y}/S}} & \mathcal{Y} \times_S \mathcal{Y} \end{array}$$

et il suffit d'appliquer l'assertion «(ii) $\Rightarrow$ (i)» de (2.4.1.3), compte tenu de (2.3)(i). $\square$

Nous utiliserons surtout la construction de (2.4.1) lorsque X est un faisceau, i.e. un S -espace (observer cependant que la définition de (Gr/S) ne fait pas intervenir de topologie). Si l'on considère la catégorie (Es/S) comme une 2-catégorie avec comme seules 2-flèches les identités, alors la construction ci-dessus identifie la 2-catégorie (Es/S) à une sous-2-catégorie pleine de (Gr/S) .

Si $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ est identifié au S -espace qu'il représente, il définit en particulier un S -groupoïde encore noté U ; pour tout S -groupoïde $\mathcal{X}$, la catégorie fibre $\mathcal{X}_U$ s'identifie alors à la catégorie des 1-flèches de U vers $\mathcal{X}$ dans (Gr/S) .

(2.4.2) Soient $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et G un U -espace en groupes. Rappelons qu'un G -torseur (à droite) est un U -espace P muni d'une action (à droite) de G vérifiant la propriété suivante : il existe une famille couvrante (à un élément) $(U' \rightarrow U)$ dans (Aff/S) telle que $P \times_U U'$ soit $G \times_U U'$ -isomorphe à $G \times_U U'$ lui-même muni de l'action de $G \times_U U'$ par translations à droite.

Soient maintenant X un S -espace, Y un X -espace (i.e. un S -espace muni d'un morphisme $Y \rightarrow X$) et G un X -espace en groupes agissant à droite sur Y . On note $[Y/G/X]$ le S -groupoïde suivant : pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, la catégorie fibre en U est la catégorie des triplets (x, P, α) où $x \in X(U)$, P est un $G \times_{X, x} U$ -torseur et $\alpha : P \rightarrow Y \times_{X, x} U$ est un morphisme de U -espaces qui est $G \times_{X, x} U$ -équivariant, les foncteurs φ^* étant définis de manière évidente.

Dans le cas particulier $Y = X$, on note encore $B(G/X)$ le S -groupoïde $[Y/X/G]$ et on dit que $B(G/X)$ est le *classifiant* de G/X . Ainsi, pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, $B(G/X)_U$ est simplement la catégorie des $G \times_S U$ -torseurs sur U .

(2.4.3) Un S -espace en groupoïdes $X_\bullet$ est la donnée de deux S -espaces X_0 et X_1 , munis de morphismes de S -espaces source $s : X_1 \rightarrow X_0$, but $b : X_1 \rightarrow X_0$, origine $\varepsilon : X_0 \rightarrow X_1$, inverse $i : X_1 \rightarrow X_1$ et composition $m : X_1 \times_{s, X_0, b} X_1 \rightarrow X_1$ vérifiant les axiomes suivants :

- (0) $s \circ \varepsilon = b \circ \varepsilon = \text{Id}_{X_0}$, $s \circ i = b$ et $b \circ i = s$, $s \circ m = s \circ \text{pr}_2$ et $b \circ m = b \circ \text{pr}_1$,
- (i) (associativité) les deux flèches composées

$$X_1 \times_{s, X_0, b} X_1 \times_{s, X_0, b} X_1 \xrightarrow[\text{Id} \times m]{m \times \text{Id}} X_1 \times_{s, X_0, b} X_1 \xrightarrow{m} X_1$$

coïncident ;

(ii) (élément neutre) les deux flèches composées

$$X_1 = X_1 \times_{s, X_0} X_0 = X_0 \times_{X_0, b} X_1 \xrightarrow[\text{Id} \times \epsilon]{\epsilon \times \text{Id}} X_1 \times_{s, X_0, b} X_1 \xrightarrow{m} X_1$$

sont égales à l'identité de X_1 ;

(iii) (inverse) les deux carrés

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{i \times \text{Id}} & X_1 \times_{s, X_0, b} X_1 \\ s \downarrow & & \downarrow m \\ X_0 & \xrightarrow{\epsilon} & X_1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\text{Id} \times i} & X_1 \times_{s, X_0, b} X_1 \\ b \downarrow & & \downarrow m \\ X_0 & \xrightarrow{\epsilon} & X_1 \end{array}$$

sont commutatifs.

À un tel S -espace en groupoïdes, on associe le S -groupoïde $[X.]'$ suivant : pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, la catégorie fibre $[X.]'_U$ a pour ensemble d'objets $X_0(U)$, pour ensemble de flèches $X_1(U)$ et la source, le but et la loi de composition des flèches sont induits par s , b et m respectivement ; pour toute flèche $\varphi : V \rightarrow U$ dans (Aff/S) , le foncteur $\varphi^* : [X.]'_U \rightarrow [X.]'_V$ est induit par la restriction. On dira que le S -groupoïde $[X.]'$ est *associé* à X . On a un 1-morphisme canonique $p : X_0 \rightarrow [X.]'$ (qui se réduit aux applications $\text{Id} : X_0(U) \rightarrow \text{ob}[X.]'_U$) et un 2-isomorphisme canonique $p \circ s \xrightarrow{\sim} p \circ b$ entre 1-flèches de X_1 vers $[X.]'$, avec une propriété universelle que nous nous dispensons d'explicitier ; remarquons que ces données déterminent un 1-morphisme $X_1 \rightarrow X_0 \times_{p, [X.]', p} X_0$ (induit par (s, b)), qui est en fait un *1-isomorphisme*.

Cet exemple contient trivialement comme cas particulier l'exemple (2.4.1) (prendre $X_1 = X_0, \dots$).

(2.4.4) Soit X un S -espace algébrique. Le S -groupoïde $\mathcal{Q}\text{coh}_{X/S}$ des $\mathcal{O}_X$ -Modules quasi-cohérents est défini comme suit. La catégorie fibre de $\mathcal{Q}\text{coh}_{X/S}$ en $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ a pour objets les $\mathcal{O}_{X \times_S U}$ -Modules quasi-cohérents qui sont plats sur $\mathcal{O}_U$ et a pour flèches les isomorphismes entre tels $\mathcal{O}_{X \times_S U}$ -Modules ; pour toute flèche $\varphi : V \rightarrow U$ dans (Aff/S) , φ^* est le foncteur image réciproque par $\text{Id}_X \times_S \varphi$ pour les $\mathcal{O}$ -modules. (Dans cette définition, la condition de platitude est imposée en vue du théorème (4.6.2.1)).

On a des variantes $\mathcal{Q}\text{cohpf}_{X/S}$, resp. $\mathcal{F}\text{ib}_{X/S, n}$, de $\mathcal{Q}\text{coh}_{X/S}$ en imposant de plus aux faisceaux considérés d'être de présentation finie, resp. localement libres de rang constant $n \in \mathbb{N}$. Si S est localement noethérien et X localement de type fini sur S , on notera encore $\mathcal{C}\text{oh}_{X/S}$ le S -groupoïde $\mathcal{Q}\text{cohpf}_{X/S}$ et on dira que $\mathcal{C}\text{oh}_{X/S}$ est le S -groupoïde des $\mathcal{O}_X$ -Modules cohérents.

(2.4.5) Le S -groupoïde $\mathcal{S}\text{ch}_S$ des S -schémas est le S -groupoïde défini comme suit. Pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, $(\mathcal{S}\text{ch}_S)_U$ est la catégorie des U -schémas ; pour toute flèche $V \xrightarrow{\varphi} U$ dans (Aff/S) , φ^* est le foncteur de changement de base par φ au sens usuel.

On a des variantes de $\mathcal{S}\text{ch}_S$ en imposant de plus aux U -schémas considérés d'être des courbes, surfaces, ... vérifiant éventuellement des propriétés du type : quasi-affine, propre, lisse, localement d'intersection complète relative, à fibres géométriquement connexes, géométriquement réduites...

(2.4.6) Le S -groupoïde $\mathcal{L}_S$ des S -schémas abéliens principalement polarisés est le S -groupoïde défini comme suit. Pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, $(\mathcal{L}_S)_U$ est la catégorie dont les objets sont les U -schémas abéliens principalement polarisés (A, λ) et dont les flèches sont les isomorphismes de tels schémas abéliens compatibles aux polarisations ; pour toute flèche $V \xrightarrow{\varphi} U$ dans (Aff/S) , φ^* est le foncteur de changement de base par φ au sens usuel.

3. La sous 2-catégorie strictement pleine des S -champs dans (Gr/S)

DÉFINITION (3.1). — Un préchamp sur S , ou S -préchamp, est un S -groupeïde $\mathcal{X}$ qui vérifie de plus la condition suivante :

(i) pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et tous $x, y \in \text{ob} \mathcal{X}_U$, le préfaisceau

$$\begin{aligned} \mathcal{I}som(x, y) : (\text{Aff}/U) &\rightarrow (\text{Ens}) \\ (V \rightarrow U) &\mapsto \text{Hom}_{\mathcal{X}_V}(x_V, y_V) \end{aligned}$$

est en fait un faisceau sur (Aff/S) .

On dit qu'un préchamp $\mathcal{X}$ sur S est un (S) -champ s'il vérifie en outre la condition suivante :

(ii) pour toute famille couvrante $(V_i \xrightarrow{\varphi_i} U)_{i \in I}$ dans (Aff/S) , toute donnée de descente (x_i, f_{ji}) relative à cette famille couvrante est effective.

Explicitons (ii) : on a $x_i \in \text{ob} \mathcal{X}_{V_i}$, $f_{ji} : (x_i|_{V_{ji}}) \xrightarrow{\sim} (x_j|_{V_{ji}})$ est une flèche dans $\mathcal{X}_{V_{ji}}$ et on a la « condition de cocycle »

$$(f_{ki}|_{V_{kji}}) = (f_{kj}|_{V_{kji}}) \circ (f_{ji}|_{V_{kji}})$$

dans $\mathcal{X}_{V_{kji}}$, où $V_{ji} = V_j \times_U V_i$ et $V_{kji} = V_k \times_U V_j \times_U V_i$, pour tous $i, j, k \in I$. Que la donnée de descente (x_i, f_{ji}) soit effective signifie qu'il existe $x \in \text{ob} \mathcal{X}_U$ et des isomorphismes

$$f_i : (x|_{V_i}) \xrightarrow{\sim} x_i$$

dans $\mathcal{X}_{V_i}$ pour i parcourant I , tels que

$$(f_j|_{V_{ji}}) = f_{ji} \circ (f_i|_{V_{ji}})$$

pour tous $i, j \in I$. La condition (i) assure que l'objet x muni de la famille (f_i) est unique à isomorphisme canonique près.

On notera (Ch/S) la sous-2-catégorie (strictement) pleine de (Gr/S) dont les objets sont les S -champs.

Un 1-morphisme dans (Ch/S) est un (1-)monomorphisme (resp. isomorphisme) si et seulement si c'en est un dans (Gr/S) . Pour les épimorphismes voir (3.6).

La construction suivante est l'analogue, pour les préchamps, de celle du faisceau associé à un préfaisceau :

LEMME (3.2). — À tout S -préchamp $\mathcal{X}$ est associé canoniquement un S -champ $\widetilde{\mathcal{X}}$ muni d'un 1-morphisme de S -groupoïdes

$$\iota : \mathcal{X} \rightarrow \widetilde{\mathcal{X}}$$

qui induit pour tout S -champ $\mathcal{Y}$ une équivalence de catégories

$$\mathrm{HOM}_S(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathcal{Y}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{HOM}_S(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

(pour tous S -groupoïdes $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$, on a noté $\mathrm{HOM}_S(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ la catégorie dont les objets sont les 1-flèches de $\mathcal{X}_1$ vers $\mathcal{X}_2$ dans (Gr/S) et dont les flèches sont les 2-flèches entre ces 1-flèches).

Preuve : Donnons simplement la construction de $\widetilde{\mathcal{X}}$. Pour tout $U \in \mathrm{ob}(\mathrm{Aff}/S)$, la catégorie $\mathcal{X}_U$ a pour objets les triplets

$$\tilde{x} = (U' \rightarrow U, x', f''),$$

où $(U' \rightarrow U)$ est une famille couvrante (à un élément) dans (Aff/S) , x' un objet de $\mathcal{X}_{U'}$, et f'' une donnée de descente pour x' relativement à $U' \rightarrow U$; pour $\tilde{x}_1$ et $\tilde{x}_2 \in \mathrm{ob} \mathcal{X}_U$, une flèche de $\tilde{x}_1$ vers $\tilde{x}_2$ dans $\mathcal{X}_U$ est une flèche (avec les notations évidentes)

$$g' : (x'_1|_{U'_1} \times_U U'_2) \xrightarrow{\sim} (x'_2|_{U'_1} \times_U U'_2)$$

dans $\mathcal{X}_{U'_1 \times_U U'_2}$ compatible aux données de descente f'_1 et f'_2 . Pour toute flèche $\varphi : \widetilde{V} \rightarrow U$ dans (Aff/S) , le foncteur de changement de base $\varphi^* : \mathcal{X}_U \rightarrow \mathcal{X}_V$ se définit de façon évidente. Enfin, pour tout $U \in \mathrm{ob}(\mathrm{Aff}/S)$ et tout $x \in \mathrm{ob} \mathcal{X}_U$, on a

$$\iota(x) = (U \xrightarrow{\mathrm{Id}} U, x, \mathrm{Id}).$$

□

Remarques (3.2.1) : (1) Pour tout $U \in \mathrm{ob}(\mathrm{Aff}/S)$, le foncteur $\iota_U : \mathcal{X}_U \rightarrow \widetilde{\mathcal{X}}_U$ induit par ι est *pleinement fidèle*, i.e. ι est un *monomorphisme* de S -groupoïdes : ceci résulte de la construction de ι .

(2) Si $\mathcal{X}$ est déjà un S -champ, $\iota : \mathcal{X} \rightarrow \widetilde{\mathcal{X}}$ est une équivalence de catégories (un isomorphisme de S -champs).

(3) Si $\mathcal{X}$ désigne un S -groupoïde quelconque, on peut définir le S -préchamp $\mathcal{X}'$ associé à $\mathcal{X}$ en définissant $\mathcal{X}'_U$, pour tout $U \in \mathrm{ob}(\mathrm{Aff}/S)$, par les conditions : $\mathrm{ob} \mathcal{X}'_U = \mathrm{ob} \mathcal{X}_U$ et, pour x et $y \in \mathrm{ob} \mathcal{X}_U$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}'_U}(x, y) = \Gamma(U, \mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ désigne le faisceau associé au préfaisceau de (3.1)(i). En combinant cette construction avec celle de (3.2), on définit le S -champ associé à un S -groupoïde quelconque; nous n'aurons pas à utiliser ces constructions.

(3.3) La sous-2-catégorie (Ch/S) de (Gr/S) est stable par limites projectives arbitraires, et en particulier par produits fibrés. Elle n'est pas stable par

limites inductives, mais elle admet elle-même des limites inductives obtenues en appliquant le foncteur «champ associé» mentionné en (3.2.1)(3) aux limites inductives dans (Gr/S) . Contentons-nous ici de décrire la somme $\coprod_{i \in I} \mathcal{X}_i$ d'une famille $(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$ de S -champs. Pour $U \in \mathrm{ob}(\mathrm{Aff}/S)$, la catégorie fibre $(\coprod_{i \in I} \mathcal{X}_i)_U$ a pour objets les couples

$$(U = \coprod_{i \in I} U_i, (x_i)_{i \in I})$$

où $U = \coprod_{i \in I} U_i$ est une décomposition de U en somme disjointe indexée par I d'objets U_i de (Aff/S) et où $x_i \in \mathrm{ob} \mathcal{X}_{i,U_i}$ pour chaque $i \in I$; une flèche dans cette catégorie fibre est un couple

$$(U = \coprod_{i \in I} U_i, (x'_i \xrightarrow{f_i} x''_i))$$

où $U = \coprod_{i \in I} U_i$ est une décomposition de U comme ci-dessus et où $x'_i \xrightarrow{f_i} x''_i$ est une flèche dans $\mathcal{X}_{i,U_i}$ pour chaque $i \in I$. Enfin, pour toute flèche $V \xrightarrow{\varphi} U$ dans (Aff/S) , on a

$$\varphi^*(U = \coprod_{i \in I} U_i, (x_i)_{i \in I}) = (V = \coprod_{i \in I} \varphi^{-1}(U_i), (\varphi^* x_i)_{i \in I})$$

et $\varphi^* : \mathrm{fl} \mathcal{X}_U \rightarrow \mathrm{fl} \mathcal{X}_V$ est défini de manière évidente.

(3.4) *Exemples de S -champs* :

(3.4.1) Le S -groupoïde associé à un préfaisceau X sur (Aff/S) est un S -préchamp si et seulement si X est un préfaisceau séparé; c'est un S -champ si et seulement si X est un faisceau, i.e. un S -espace. Ainsi, (Es/S) est une sous-2-catégorie pleine de (Ch/S) . Il résulte donc de (2.4.1.1) que pour qu'un S -champ $\mathcal{X}$ soit 1-isomorphe à un S -espace, il faut et il suffit que le 1-morphisme diagonal $\Delta : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ soit un monomorphisme, ou encore que, pour tout $U \in \mathrm{ob}(\mathrm{Aff}/S)$, la catégorie $\mathcal{X}_U$ soit équivalente à une catégorie discrète.

(3.4.2) Le S -groupoïde $[Y/G/X]$ de (2.4.2) est un S -champ; en particulier $B(G/X)$ est un S -champ.

(3.4.3) Le S -groupoïde $[X.]'$ associé à un S -espace en groupoïdes (cf. (2.4.3)) n'est pas en général un S -champ. Cependant, c'est un S -préchamp (essentiellement parce que X_1 est un faisceau par hypothèse) et on notera $[X.]$ le S -champ associé à ce S -préchamp. On dira encore que $[X.]$ est le S -champ associé à X . De manière tout analogue à (2.4.3), on a un 1-morphisme canonique $\bar{p} : X_0 \rightarrow [X.]$ et un 2-isomorphisme canonique $\bar{p} \circ s \xrightarrow{\sim} \bar{p} \circ b$ entre 1-flèches de X_1 vers $[X.]$, avec une propriété universelle. Observer que l'assertion de pleine fidélité de (3.2.1)(1) entraîne que $X_0 \times_{\bar{p}, [X.], \bar{p}} X_0$ s'identifie à $X_0 \times_{p, [X.], p} X_0$ donc encore à X_1 d'après (2.4.3).

Par exemple, dans la situation de (2.4.2), prenons pour X . le S -espace en groupoïdes défini de la façon suivante : $X_0 = Y$, $X_1 = Y \times_X G$, $s = \mu$ où μ est l'action à droite de G sur Y , $b = \text{pr}_1$, ε , i et m étant induits par l'élément neutre, l'inverse et la loi de composition de G respectivement. Alors on a $[X.] = [Y/G/X]$.

(3.4.4) Les S -groupoïdes $\mathcal{Q}\text{coh}_{X/S}$, $\mathcal{Q}\text{cohp}_f_{X/S}$ et $\mathcal{F}\text{ib}_{X/S,n}$ de (2.4.4) sont des S -champs ([SGA 1] VIII, 1.1 et 1.2).

(3.4.5) Le S -groupoïde $\mathcal{C}_S$ de (2.4.6) est un S -champ ([SGA 1] VIII, 7.8).

(3.4.6) *Le champ des espaces algébriques.* Pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ soit $\mathcal{X}_U$ la catégorie des U -espaces algébriques avec comme morphismes les U -isomorphismes. Ceci définit de façon naturelle un S -groupoïde $\mathcal{X}$; il résulte alors de (1.6.4) que c'est un S -champ.

DÉFINITION (3.5). — Soit $\mathcal{X}$ un S -champ. Un sous- S -champ de $\mathcal{X}$ est un sous- S -groupoïde de $\mathcal{X}$ qui est encore un S -champ.

Remarque (3.5.1) : En d'autres termes, un sous- S -champ de $\mathcal{X}$ est une sous-catégorie strictement pleine $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{X}$ telle que :

- (i) pour toute flèche $V \xrightarrow{\varphi} U$ dans (Aff/S) , $\varphi^*(\text{ob } \mathcal{Y}_U) \subset \text{ob } \mathcal{Y}_V$;
- (ii) pour toute famille couvrante $(U_i \xrightarrow{\varphi_i} U)_{i \in I}$ dans (Aff/S) et tout $x \in \text{ob } \mathcal{X}_U$, on a $x \in \text{ob } \mathcal{Y}_U$ si (et seulement si) $\varphi_i^* x \in \text{ob } \mathcal{Y}_{U_i}$ pour tout $i \in I$.

DÉFINITION (3.6). — Soit $\mathcal{Z} \xrightarrow{F} \mathcal{X}$ un morphisme de S -champs. On dit que F est un épimorphisme si, pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et tout $x \in \text{ob } \mathcal{X}_U$, il existe une famille couvrante à un élément $(U' \rightarrow U)$ dans (Aff/S) et un isomorphisme de $F_{U'}(z')$ sur $x_{U'}$ dans $\mathcal{X}_{U'}$. Alors $\mathcal{Y}$ est un sous- S -champ de $\mathcal{X}$ et F se factorise en

$$\mathcal{Z} \xrightarrow{F} \mathcal{Y} \xrightarrow{I} \mathcal{X}$$

où $\bar{F}$ est un épimorphisme et où l'inclusion I est un monomorphisme. De plus, F est un monomorphisme si et seulement si $\bar{F}$ est un 1-isomorphisme et F est un épimorphisme si et seulement si $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$. Enfin, si l'on a une factorisation arbitraire de F en un épimorphisme $\bar{F}' : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}'$ suivi

d'un monomorphisme $I' : \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{X}$, on a le diagramme 2-commutatif dans (Ch/S)

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{Z}' & \xrightarrow{\bar{F}'} & \mathcal{Y}' & \xrightarrow{I'} & \mathcal{X}' \\ & \searrow & \downarrow \bar{I}' & \nearrow & \\ & & \mathcal{Y} & & \end{array}$$

(le sous- S -champ $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{X}$ associé à F est le même que celui associé à I' et $\bar{I}'$ est un 1-isomorphisme). $\square$

COROLLAIRE (3.7.1). — Un 1-morphisme dans (Ch/S) est un isomorphisme si et seulement si c'est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme. $\square$

PROPOSITION (3.8). — Soient $\mathcal{X}$ un S -champ, X_0 un S -espace et $F : X_0 \rightarrow \mathcal{X}$ un 1-morphisme. Considérons le S -espace en groupoïdes

$$X_1 := X_0 \times_{F, \mathcal{X}, F} X_0 \xrightarrow[\text{pr}_2]{\text{pr}_1} X_0$$

déduit canoniquement de F , son S -champ associé $[X.]$ (cf. (3.4.3)) et le 1-morphisme de S -champs $\Phi : [X.] \rightarrow \mathcal{X}$ déduit de F et de la propriété universelle de $[X.]$. Alors Φ est un monomorphisme, et c'est un épimorphisme (donc un isomorphisme, cf. (3.7.1)) si et seulement si F est un épimorphisme.

Preuve : Que Φ soit un monomorphisme résulte formellement du fait, signalé en (3.4.3), que $X_0 \times_{[X.]} X_0$ s'identifie à X_1 donc à $X_0 \times_{F, \mathcal{X}, F} X_0$. La dernière assertion est claire puisque, par construction, le morphisme canonique de X_0 vers $[X.]$ est un épimorphisme. $\square$

PROPOSITION (3.8.1). — Considérons un carré 2-cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}' & \xrightarrow{P} & \mathcal{X} \\ F' \downarrow & & \downarrow F \\ \mathcal{Y}' & \xrightarrow{Q} & \mathcal{Y} \end{array}$$

de S -champs. Alors si F est un épimorphisme (resp. un monomorphisme, resp. un isomorphisme) il en est de même de F' , et la réciproque est vraie si Q est un épimorphisme.

Preuve : Les trois premières assertions sont immédiates, ainsi que l'implication « F' et Q épimorphismes $\Rightarrow F$ épimorphisme ». Supposons désormais que Q soit un épimorphisme. Compte tenu de (3.7.1) et de ce qui précède, il revient au même, pour un diagramme donné, de montrer que l'implication « F'

monomorphisme $\Rightarrow F$ monomorphisme» ou l'implication « F' isomorphisme $\Rightarrow F$ isomorphisme». En particulier :

Cas 1 : F est un monomorphisme. Alors tout est démontré d'après ce qui précède.

Cas 2 : le 1-morphisme diagonal $\Delta_F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_{F, \mathcal{Y}, F} \mathcal{X}$ est un monomorphisme. Comme ce morphisme commute au changement de base, en un sens évident, on déduit du cas 1 appliqué à Δ_F que si $\Delta_{F'}$ est un isomorphisme, il en est de même de Δ_F . Autrement dit, en vertu de (2.3)(iii) : si F' est un monomorphisme il en est de même de F .

Cas général : en vertu de (2.3), (i) et (ii) on peut appliquer le cas 2 au morphisme diagonal $G := \Delta_F$ (en effet d'après loc. cit. Δ_G est un monomorphisme) et en déduire que si $\Delta_{F'}$ est un monomorphisme il en est de même de Δ_F . Même chose donc en remplaçant «monomorphisme» par «isomorphisme», ce qui se traduit derechef par : si F' est un monomorphisme il en est de même de F . $\square$

DÉFINITION (3.9). — Un S -champ $\mathcal{X}$ est dit représentable s'il existe un S -espace algébrique X et un 1-isomorphisme $X \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}$ de S -champs. (On dira alors que X représente $\mathcal{X}$).

Un 1-morphisme de S -champs $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ est dit représentable (resp. schématique) si, pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, et tout $y \in \text{ob} \mathcal{Y}_U$, vu comme 1-morphisme de S -champs de U dans $\mathcal{Y}$, le produit fibré $U \times_{y, \mathcal{Y}, F} \mathcal{X}$ est représentable (resp. représentable par un S -schéma).

En termes plus concrets, un S -champ $\mathcal{X}$ est représentable si, pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, la catégorie $\mathcal{X}_U$ est équivalente à une catégorie discrète X_U et si le foncteur

$$\begin{aligned} (\text{Aff}/S) &\rightarrow (\text{Ens}) \\ U &\mapsto \text{ob } X_U \end{aligned}$$

est représentable par un S -espace algébrique X .

(3.10) Soit maintenant $P(f)$ une propriété de morphismes $f : X \rightarrow Y$ entre S -espaces algébriques, stable par changement de base $Y' \rightarrow Y$ et de nature locale pour la topologie étale sur Y , par exemple la propriété d'être :

- surjectif, radiciel, universellement bijectif ([EGA] I, 3.6.1, 3.6.4 et 3.7.6);
- universellement ouvert, universellement fermé, séparé, quasi-compact, localement de type fini, localement de présentation finie, de type fini, de présentation finie, une immersion, une immersion ouverte, une immersion fermée, une immersion ouverte d'image dense, affine, quasi-affine, entier, fini, quasi-fini, propre ([EGA] IV, 2.5.1 et IV, 17.7.5);
- à fibres géométriquement connexes, géométriquement réduites, géométriquement irréductibles ([EGA] IV, 4.5.6 et IV, 4.6.10);
- localement de type fini et de dimension relative $\leq d$, localement de type fini et de dimension relative pure d ([EGA] IV, 5.5.2 et IV, 4.1.4);

– plat, non ramifié, lisse, étale ([EGA] IV, 2.2.13 et IV, 17.7.4).

DÉFINITION (3.10.1). — On dira qu'un 1-morphisme représentable $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ de S -champs possède la propriété P si, pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et tout $y \in \text{ob} \mathcal{Y}_U$, vu comme 1-morphisme de S -champs de U dans $\mathcal{Y}$, la projection canonique

$$U \times_{y, \mathcal{Y}, F} \mathcal{X} \rightarrow U$$

(qui est un morphisme de S -espaces algébriques) la possède.

LEMME (3.11). — Soient $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ un 1-morphisme représentable de S -champs et $\mathcal{Y}' \xrightarrow{B} \mathcal{Y}$ un 1-morphisme arbitraire de S -champs. Alors, le 1-morphisme de S -champs $\mathcal{X}' \xrightarrow{F'} \mathcal{Y}'$ déduit de F par le changement de base B est représentable. De plus, si F possède une propriété P comme en (3.10), F' la possède aussi.

Preuve : C'est une conséquence immédiate des définitions. $\square$

LEMME (3.12). — (a) Si Y est un S -espace algébrique, $\mathcal{X}$ un S -champ et $\mathcal{X} \xrightarrow{F} Y$ un 1-morphisme représentable de S -champs, alors $\mathcal{X}$ est représentable.

(b) Si $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ et $\mathcal{Y} \xrightarrow{G} \mathcal{Z}$ sont deux 1-morphismes représentables de S -champs, alors le 1-morphisme composé $\mathcal{X} \xrightarrow{G \circ F} \mathcal{Z}$ est aussi représentable. De plus, si P est une propriété de morphismes de S -espaces algébriques comme en (3.10), stable par composition, et si F et G possèdent la propriété P, il en est de même de $G \circ F$.

(c) Soient $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ et $\mathcal{Y} \xrightarrow{G} \mathcal{Z}$ deux 1-morphismes de S -champs. On suppose que $G \circ F$ est représentable. Alors F est représentable dans chacun des cas suivants :

- (i) le morphisme naturel $\mathcal{Y} \times_{G, \mathcal{Z}, G} \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y} \times_S \mathcal{Y}$ est représentable;
- (ii) le morphisme diagonal $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z} \times_S \mathcal{Z}$ est représentable;
- (iii) G est un monomorphisme.

Preuve : Compte tenu de (3.11), la partie (b) de (3.12) résulte de la partie (a).

Pour prouver (a), on déduit d'abord de (2.4.1.1) et (2.4.1.2) que $\mathcal{X}$ est un S -espace, et il suffit ensuite d'appliquer (1.6.1).

L'assertion (c) se démontre comme (1.6.2)(b) qu'elle généralise. $\square$

COROLLAIRE (3.13). — Soit $\mathcal{X}$ un S -champ. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) le 1-morphisme de S -champs diagonal $\mathcal{X} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ est représentable;
- (ii) pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et tous $x, y \in \text{ob} \mathcal{X}_U$, le faisceau $\mathcal{I}\text{som}(x, y)$ sur (Aff/U) est représentable par un U -espace algébrique;

- (iii) pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et tout $x \in \text{ob} \mathcal{X}_U$, le 1-morphisme de S -champs $x : U \rightarrow \mathcal{X}'$ est représentable :
- (iv) pour tout S -espace algébrique X , tout 1-morphisme de S -champs $P : X \rightarrow \mathcal{X}'$ est représentable.

Preuve : Les équivalences (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) et l'implication (iv) $\Rightarrow$ (iii) résultent aussitôt des définitions. Réciproquement, si (iii) est satisfaite, pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et tout $x \in \text{ob} \mathcal{X}_U$, le 1-morphisme de S -champs canonique

$$X \times_{P, \mathcal{X}', x} U \rightarrow X$$

est représentable d'après (3.11) et donc sa source aussi d'après (3.12)(a). D'où la conclusion. $\square$

DÉFINITION (3.14). — *Un sous- S -champ ouvert (resp. fermé, resp. localement fermé) $\mathcal{Y}$ d'un S -champ $\mathcal{X}'$ est un sous- S -champ $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{X}'$ tel que le 1-morphisme d'inclusion $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}'$ soit représentable par une immersion ouverte (resp. une immersion fermée, resp. une immersion).*

Soient $\mathcal{X}'$ un S -champ et $(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$ une famille de sous- S -champs localement fermés de $\mathcal{X}'$. On dira que $\mathcal{X}'$ est *réunion* (resp. *réunion disjointe*) des $(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$ si le 1-morphisme (représentable) de S -champs

$$\coprod_{i \in I} \mathcal{X}_i \rightarrow \mathcal{X}'$$

induit par les foncteurs d'inclusion des $\mathcal{X}_i$ dans $\mathcal{X}'$ est surjectif (resp. universellement bijectif).

Terminons ce chapitre par la définition et quelques propriétés des gerbes.

DÉFINITION (3.15). — *Soit X un S -espace. Une gerbe sur X est un S -champ $\mathcal{S}$ muni d'un 1-morphisme de S -champs $\mathcal{S} \xrightarrow{A} X$ (dit *structural*) tel que le 1-morphisme diagonal $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} \times_{A, X, A} \mathcal{S}$ et le 1-morphisme A soient des épimorphismes (cf. (3.6)).*

Remarques (3.16) : (1) Que A soit un épimorphisme signifie que $\mathcal{S}$ a des objets partout localement sur X ; que Δ soit un épimorphisme signifie que deux objets quelconques de $\mathcal{S}$ (au-dessus d'un même X -espace) sont localement isomorphes. En d'autres termes, $\mathcal{S} \xrightarrow{A} X$ est une gerbe sur X si et seulement si :

- (i) pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et tous les $g_1, g_2 \in \text{ob} \mathcal{S}_U$ tels que $A(g_1) = A(g_2)$ dans $X(U)$, il existe une famille couvrante (à un élément) $(U' \rightarrow U)$ dans (Aff/S) et un isomorphisme $g_{1, U'} \cong g_{2, U'}$ dans $\mathcal{S}_{U'}$;
- (ii) pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et tout $x \in X(U)$, il existe une famille couvrante à un élément $(U' \rightarrow U)$ dans (Aff/S) et un objet g' de $\mathcal{S}_{U'}$ tels que $A(g') = x_{U'}$ dans $X(U')$.

(2) Comme le lecteur le vérifiera sans peine, la condition (i) (Δ épimorphique) peut se reformuler en disant que, pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, tout objet g de $\mathcal{S}_U$, vu comme 1-morphisme $U \rightarrow \mathcal{S} \times_S U$, est un épimorphisme. Plus généralement :

LEMME (3.17). — *Soit $\mathcal{S}$ une gerbe sur un S -espace X et soit $\mathcal{Y}$ un S -champ muni d'un 1-morphisme de S -champs $\mathcal{Y} \xrightarrow{F} \mathcal{S}$. On suppose que le 1-morphisme composé*

$$\mathcal{Y} \xrightarrow{F} \mathcal{S} \xrightarrow{A} X$$

est un épimorphisme. Alors il en est de même de $\mathcal{Y} \xrightarrow{F} \mathcal{S}$.

Preuve : F est le composé des deux morphismes suivants :

$(F, \text{Id}_{\mathcal{Y}}) : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{S} \times_X \mathcal{Y}$, qui est une section de $\text{pr}_2 : \mathcal{S} \times_X \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ donc un épimorphisme puisque $\mathcal{S} \times_X \mathcal{Y}$ est une gerbe sur $\mathcal{Y}$ (3.16)(2);

$\text{pr}_1 : \mathcal{S} \times_X \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{S}$ qui est un épimorphisme puisque $\mathcal{Y} \rightarrow X$ en est un. $\square$

(En particulier, tout morphisme de gerbes sur X est un épimorphisme).

LEMME (3.18). — *Soit $\mathcal{S}$ une gerbe sur un S -espace X . Alors le 1-morphisme structural de S -champs $\mathcal{S} \xrightarrow{A} X$ est 2-universel pour les 1-morphismes de $\mathcal{S}$ dans un S -espace.*

Preuve : Compte tenu de (3.7), on est ramené à montrer que pour toute factorisation de A en

$$\mathcal{S} \xrightarrow{B} Y \xrightarrow{C} X$$

où B est un épimorphisme de S -champs de $\mathcal{S}$ sur un S -espace Y et C un épimorphisme de S -espaces, C est automatiquement un isomorphisme de S -espaces. Or, on a le diagramme 2-commutatif à carré 2-cartésien

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{S} \times_Y \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{S} \times_X \mathcal{S} \\ & \searrow B & \downarrow & \square & \downarrow B \times_X B \\ & & Y & \longrightarrow & Y \times_X Y \end{array}$$

Comme $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} \times_X \mathcal{S}$ et $B \times_X B$ sont des épimorphismes de S -champs, le morphisme diagonal $Y \rightarrow Y \times_X Y$ est un épimorphisme de S -espaces et donc un isomorphisme, d'où la conclusion. $\square$

Remarque (3.19) : Soit $\mathcal{X}'$ un S -champ arbitraire. On appelle *S -espace grossier* attaché à $\mathcal{X}'$ le faisceau X sur (Aff/S) associé au préfaisceau

$$U \rightarrow \{\text{classes d'isomorphie d'objets de } \mathcal{X}_U\}.$$

On a un 1-morphisme de S -champs canonique $\mathcal{X} \xrightarrow{A} X$ qui est 2-universel pour les 1-morphismes de $\mathcal{X}$ dans un S -espace et fait de $\mathcal{X}$ une gerbe sur X .

DÉFINITION (3.20). — Une gerbe $\mathcal{G}$ sur un S -espace X est dite neutre si le 1-morphisme structural $\mathcal{G} \xrightarrow{A} X$ admet une section $X \xrightarrow{s} \mathcal{G}$.

Soient X un S -espace et G un S -espace en groupes. Alors le S -champ classifiant $B(G/X)$ (cf. (3.4.2)) est une gerbe neutre sur le S -espace X . Réciproquement on a :

LEMME (3.21). — Soit $\mathcal{G}$ une gerbe neutre sur le S -espace X , munie d'une section $s : X \rightarrow \mathcal{G}$. Alors, si G est le X -espace en groupes défini par

$$G \times_{X,x} U = \mathcal{I}som(s(x), s(x))$$

pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et tout $x \in X(U)$, la gerbe $\mathcal{G}$ sur X est canoniquement 1-isomorphe à la gerbe $B(G/X)$ sur X .

Preuve : Pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, on a un foncteur $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow B(G/X)$ de gerbes sur X (donc un épimorphisme) défini par

$$g \rightarrow (A(g), P)$$

où P est le $G \times_{X,A(g)} U$ -torseur $\mathcal{I}som(s(A(g)), g)$. Pour montrer que φ est un monomorphisme, on peut supposer que $X = S$, et il s'agit de voir que φ induit une bijection de $\text{Isom}(g, h)$ sur $\text{Isom}(\varphi(g), \varphi(h))$ pour $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et $g, h \in \text{ob} \mathcal{G}_U$. Comme g et h sont localement isomorphes à $s(x)$, on peut supposer de plus que $U = S$ et $g = h = s$ (vu comme objet de $\mathcal{G}_S$). Le lecteur vérifiera alors que $\text{Isom}(g, h)$ et $\text{Isom}(\varphi(g), \varphi(h))$ s'identifient canoniquement à $G(S)$ et que φ induit l'identité. $\square$

4. La 2-catégorie des S -champs algébriques

DÉFINITION (4.1). — Un S -champ algébrique (sous-entendu quasi-séparé) est un S -champ $\mathcal{X}$ qui satisfait aux deux axiomes suivants :

(i) le 1-morphisme de S -champs diagonal

$$\mathcal{X} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$$

est représentable, séparé et quasi-compact,

(ii) il existe un S -espace algébrique X et un 1-morphisme de S -champs

$$X \xrightarrow{P} \mathcal{X}$$

(automatiquement représentable d'après (i), cf. (3.13)), qui est surjectif et lisse.

Un 1-morphisme P comme dans (ii) sera appelé présentation de $\mathcal{X}$.

On notera $(\text{Ch.alg}/S)$ la sous-2-catégorie strictement pleine de (Ch/S) formée des S -champs algébriques.

Un S -champ de Deligne-Mumford est un S -champ algébrique admettant une présentation étale (i.e. telle que P soit un 1-morphisme étale).

Remarque (4.1.1) : Le S -champ associé à un S -espace algébrique est évidemment un champ de Deligne-Mumford. Par suite $(\text{Es.alg}/S)$ est une sous-2-catégorie pleine de $(\text{Ch.alg}/S)$ et tout S -champ représentable (3.9) est algébrique.

Remarque (4.1.2) : Les conditions de la définition peuvent s'explicitier ainsi :

- (i) signifie que pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et tous $x, y \in \text{ob} \mathcal{X}_U$, le préfaisceau $\mathcal{I}som(x, y)$ des isomorphismes de x sur y (qui est un faisceau puisque $\mathcal{X}$ est un S -champ, et donc a fortiori un S -préchamp, cf. (3.1)(i)) est en fait un U -espace algébrique quasi-compact et séparé sur U (il est même de type fini sur U , d'après (4.2) ci-dessous);
- la condition sur P dans (ii) signifie ceci, dans un langage plus proche de celui des problèmes de modules : pour $V \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et $y \in \text{ob} \mathcal{X}_V$, appelons « P -structure » sur y la donnée d'un relèvement de y à X , c'est-à-dire d'un S -morphisme $\tilde{y} : V \rightarrow X$ et d'un V -isomorphisme $P \circ \tilde{y} \xrightarrow{\sim} y$ dans $\mathcal{X}_V$. Alors, pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et tout $x \in \text{ob} \mathcal{X}_U$, le foncteur

sur (Aff/U) qui à tout $\varphi : V \rightarrow U$ associe l'ensemble des P -structures sur $x \circ \varphi$ (foncteur qui est un U -espace algébrique d'après (i)) est en fait lisse et surjectif sur U .

$$X \times_{\mathcal{X}'} X \rightarrow X \times_S X \xrightarrow{\text{pr}_1} X$$

$$X_1 := X \times_{P, \mathcal{X}', P} X \xrightarrow[\text{pr}_2]{\text{pr}_1} X =: X_0$$

$$X_1 \xrightarrow[p_2]{p_1} X_0$$

— $(p_1, p_2) : X_1 \rightarrow X_0 \times_S X_0$ est séparé et quasi-compact.

Alors (p_1, p_2) est de type fini, le S -champ quotient

$$\mathcal{X} = [X_1 \xrightarrow[p_2]{p_1} X_0]$$

est algébrique (resp. de Deligne-Mumford), et le 1-morphisme canonique $P : X_0 \rightarrow \mathcal{X}$ en est une présentation (resp. une présentation étale).

Preuve : Le fait que (p_1, p_2) soit de type fini se démontre comme la première assertion de (4.2). Pour voir que $\mathcal{X}$ est algébrique, il suffit de montrer que le 1-morphisme diagonal $\Delta : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ est représentable (ceci entraînera en effet que P est représentable, donc évidemment lisse et surjectif vu nos hypothèses).

Soient donc $V \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et x, y des objets de $\mathcal{X}(V)$. Il s'agit de montrer que le V -espace $\mathcal{I}om_{\mathcal{X}}(x, y)$ est représentable. C'est certainement le cas si x et y se relèvent en $\tilde{x}, \tilde{y} \in X_0(V)$ car alors $\mathcal{I}om_{\mathcal{X}}(x, y)$ n'est autre que le produit fibré

$$X \times_{(p_1, p_2), X_0 \times_S X_0, (\tilde{x}, \tilde{y})} V.$$

Dans le cas général, d'après la définition du champ quotient, il existe une famille couvrante à un élément $V' \rightarrow V$ telle que $x|_{V'}$ et $y|_{V'}$ se relèvent à X_0 . Par suite $\mathcal{I}om_{\mathcal{X}}(x, y) \times_V V'$ est représentable, et la conclusion résulte de (1.6.4). $\square$

PROPOSITION (4.3.2). — Soit $P : X \rightarrow \mathcal{X}$ un 1-morphisme de S -champs. On suppose que :

(1) X est un S -espace algébrique;

(2) P est représentable, surjectif et lisse;

(3) $(\text{pr}_1, \text{pr}_2) : X \times_{P, \mathcal{X}, P} X \rightarrow X \times_S X$ (qui est un morphisme de S -espaces algébriques en vertu de (i) et (ii)) est quasi-compact et séparé.

Alors $\mathcal{X}$ est un S -champ algébrique et P en est une présentation.

Preuve : Il suffit de vérifier que la diagonale $\Delta : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ est représentable, quasi-compacte et séparée. Comme on a un carré 2-cartésien

$$\begin{array}{ccc} X \times_{P, \mathcal{X}, P} X & \xrightarrow{(\text{pr}_1, \text{pr}_2)} & X \times_S X \\ \downarrow & & \downarrow P \times_S P \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{X} \times_S \mathcal{X} \end{array}$$

où les flèches verticales sont représentables, surjectives et lisses, il suffit même de montrer que Δ est représentable, le reste en découlant par descente fidèlement plate. Or, compte tenu du même diagramme, ceci résulte des hypothèses et du lemme suivant, qui généralise (1.6.3) :

LEMME (4.3.3). — *Considérons un carré 2-cartésien*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}' & \xrightarrow{P} & \mathcal{X} \\ F' \downarrow & & \downarrow F \\ \mathcal{Y}' & \xrightarrow{Q} & \mathcal{Y} \end{array}$$

de S -champs. On suppose que F' est représentable et que Q (et donc P) est un épimorphisme. Alors F est représentable.

Preuve : On peut supposer, et on suppose, que $\mathcal{Y}$ est un S -espace algébrique (par exemple un S -schéma affine) et il s'agit de montrer que $\mathcal{X}$ est aussi un S -espace algébrique. Vu l'hypothèse sur Q on peut aussi supposer que $\mathcal{Y}'$ est un S -espace algébrique et que Q (et donc P) est étale et surjectif. Il suffit alors de voir que $\mathcal{X}$ est un S -espace (ensuite on applique (1.6) ou (1.6.3)). Or il résulte de (3.8.1) que le morphisme diagonal $\Delta_F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_{F, \mathcal{Y}, F} \mathcal{X}$ est un monomorphisme (puisque c'est le cas pour $\Delta_{F'}$) donc $\mathcal{X}$ est bien un S -espace par (2.4.1.1). $\square$

PROPOSITION (4.4). — *Pour qu'un S -champ algébrique $\mathcal{X}$ soit représentable, il faut et il suffit qu'il vérifie les deux conditions suivantes :*

- (i) $\mathcal{X}$ est un champ de Deligne-Mumford;
- (ii) le 1-morphisme diagonal $\Delta : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ est un monomorphisme (cf. remarque (4.4.2)).

Preuve : Il est clair que les conditions sont nécessaires; réciproquement, par (3.4.1), la condition (ii) entraîne que $\mathcal{X}$ est (associé à) un S -espace. Si $P : X_0 \rightarrow \mathcal{X}$ est une présentation étale de $\mathcal{X}$, alors $\mathcal{X}$ est le S -espace quotient de la relation d'équivalence $X_1 := X_0 \times_{P, \mathcal{X}, P} X_0 \xrightarrow{\delta} X_0 \times_S X_0$. Il résulte de (4.2) que cette relation vérifie les conditions de (1.3) parce que $\text{pr}_1 \circ \delta$ et $\text{pr}_2 \circ \delta : X_1 \rightarrow X_0$ (resp. δ) se déduisent de P (resp. de Δ) par changement de base. D'après (1.3) le quotient est donc bien un espace algébrique. $\square$

Remarque (4.4.1) : Nous verrons en fait plus loin (8.1.1) que la condition (ii) est en fait suffisante.

PROPOSITION (4.5). — (i) *La sous-2-catégorie strictement pleine (Ch.alg/ S) de (Ch/ S) est stable par sommes disjointes arbitraires et produits fibrés finis.*

(ii) *Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ un 1-morphisme représentable de S -champs. Alors, si $\mathcal{Y}$ est algébrique, il en est de même de $\mathcal{X}$. En particulier, tout sous- S -champ localement fermé d'un S -champ algébrique est aussi algébrique.*

(iii) *Soient S' un S -schéma et $\mathcal{X}$ un S' -champ. Pour que $\mathcal{X}$ soit un S' -champ algébrique, il faut et il suffit que $\mathcal{X}$ soit un S -champ algébrique.*

De plus on peut, dans les assertions ci-dessus, remplacer partout « algébrique » par « de Deligne-Mumford ».

Preuve : Les détails sont laissés au lecteur; (ii) est une conséquence facile des lemmes (3.11) et (3.12); pour le « il suffit » de (iii), la représentabilité de la diagonale de $\mathcal{X}$ sur S' se démontre par (3.12)(c) en remarquant que $\mathcal{X} \times_{S'} \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ est un monomorphisme, puisqu'il se déduit par le changement de base $\mathcal{X} \times_S \mathcal{X} \rightarrow S' \times_S S'$ de l'immersion diagonale $S' \rightarrow S' \times_S S'$. $\square$

Exemples (4.6) :

(4.6.1) Soient X un S -espace algébrique, G un S -schéma en groupes lisse (resp. étale), séparé et de présentation finie opérant à droite sur X et $\mathcal{X} = [X/G/S]$ le champ quotient de (3.4.2). Alors $\mathcal{X}$ est un S -champ algébrique (resp. de Deligne-Mumford) : c'est en effet un cas particulier de (3.4.2). De plus la projection canonique $P : X \rightarrow \mathcal{X}$ est une présentation (resp. une présentation étale) de $\mathcal{X}$, et $X \times_{P, \mathcal{X}, P} X$ est représenté par $X \times_S G$, les deux projections sur X étant données par la première projection évidente et par l'action de G .

(4.6.2) Supposons S noethérien et soit X un S -schéma projectif. On note $f : X \rightarrow S$ le morphisme structural et on suppose qu'après tout changement de base $S' \rightarrow S$, $f'_* \mathcal{O}_{X'}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{S'}$.

THÉOREME (4.6.2.1). — *Le S -champ $\text{Coh}_{X/S}$ ainsi que ses sous- S -champs ouverts $\mathcal{F}ib_{X/S, n}$ ((2.4.4), (3.4.4)) sont des S -champs algébriques de type fini.*

Preuve : Montrons tout d'abord que pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et tous les $\mathcal{C}_{X \times_S U}$ -Modules de présentation finie $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$, plats sur $\mathcal{C}_U$, le U -espace $\mathcal{I}som(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ (de valeur

$$\mathcal{I}som_{\mathcal{C}_{X_V}}(\mathcal{M}_V, \mathcal{N}_V)$$

pour tout $V \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, où l'on a noté $(-)_V$ le changement de base par le morphisme structural $V \rightarrow U$) est un U -schéma séparé et de type fini.

Par un passage à la limite standard ([EGA] IV, 8.9), on se ramène aussitôt au cas où U est de type fini sur S et donc noethérien. D'après ([EGA] III, 7.7.8 et III, 7.7.9), le U -espace $\mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ est en fait un U -schéma affine de type fini de la forme $\mathbb{V}(\mathcal{F})$ pour un $\mathcal{C}_U$ -Module cohérent $\mathcal{F}$. Bien entendu, il en est de même des U -espaces $\mathcal{H}om(\mathcal{N}, \mathcal{M})$, $\mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ et $\mathcal{H}om(\mathcal{N}, \mathcal{N})$ et par conséquent aussi du U -espace de valeur en $V \in \text{ob}(\text{Aff}/U)$ l'ensemble

$$\{(\alpha, \beta) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_{X_V}}(\mathcal{M}_V, \mathcal{N}_V) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}_{X_V}}(\mathcal{N}_V, \mathcal{M}_V) \mid \beta \circ \alpha = \text{Id}_{\mathcal{M}_V} \text{ et } \alpha \circ \beta = \text{Id}_{\mathcal{N}_V}\}.$$

Maintenant $\mathcal{I}som(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ est le sous- U -espace de $\mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ image de ce dernier U -espace par le morphisme

$$\pi : (\alpha, \beta) \mapsto \alpha.$$

Or, il est clair que π est un monomorphisme de type fini et formellement étale, donc une immersion ouverte ([EGA] IV, 17.9.1). D'où l'assertion.

Il reste à construire une présentation de $\mathcal{C}oh_{X/S}$. Pour cela, considérons, pour tout entier $N \geq 0$, le S -schéma de Hilbert généralisé

$$\mathrm{Quot}_{\mathcal{C}_X^N/X/S}$$

([Gr 1] IV, 3.2). C'est une somme disjointe de S -schémas projectifs. Notons

$$\mathrm{Quot}_{\mathcal{C}_X^N/X/S}^\circ$$

le sous- S -schéma ouvert de $\mathrm{Quot}_{\mathcal{C}_X^N/X/S}$ défini par la condition suivante : $(\alpha : \mathcal{C}_{X_U}^N \rightarrow \mathcal{M})$ appartient à $\mathrm{Quot}_{\mathcal{C}_X^N/X/S}^\circ(U)$ si et seulement si $R^p(f_U)_* \mathcal{M} = (0)$ pour tout $p > 0$, et $(f_U)_* \alpha : \mathcal{C}_U^N \rightarrow (f_U)_* \mathcal{M}$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}_U$ -Modules. Fixons d'autre part un $\mathcal{C}_X$ -Module inversible $\mathcal{O}_X(1)$, très ample relativement à S . On a alors, pour tous les entiers $N, n \geq 0$, un 1-morphisme de S -champs

$$P_{N,n} : \mathrm{Quot}_{\mathcal{C}_X^N/X/S}^\circ \rightarrow \mathcal{C}oh_{X/S}$$

défini par

$$P_{N,n}(\mathcal{C}_{X_U}^N \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M}) = \mathcal{M}(-n)$$

d'où un 1-morphisme de S -champs

$$P = (P_{N,n})_{N,n \geq 0} : \prod_{N,n \geq 0} \mathrm{Quot}_{\mathcal{C}_X^N/X/S}^\circ \rightarrow \mathcal{C}oh_{X/S}$$

Il ne reste plus qu'à démontrer que P est surjectif et lisse. Or, soient $U \in \mathrm{ob}(\mathrm{Aff}/S)$ de type fini sur S et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{C}_{X_U}$ -Module cohérent, plat sur $\mathcal{C}_U$. Si N et n sont des entiers ≥ 0 , il existe un plus grand ouvert $U_{N,n}$ de U au-dessus duquel $R^p(f_U)_*(\mathcal{M}(n))$ s'annule pour tout $p > 0$, la flèche d'adjonction $f_U^* f_{U*} \mathcal{M}(n) \rightarrow \mathcal{M}(n)$ est un épimorphisme et le $\mathcal{C}_U$ -Module $f_{U*} \mathcal{M}(n)$ est localement libre de rang constant N ([EGA] III, 7.9.4 et III, 7.9.10). De plus, la projection canonique

$$U \times_{\mathcal{M}, \mathcal{C}oh_{X/S}, P_{N,n}} \mathrm{Quot}_{\mathcal{C}_X^N/X/S}^\circ \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} U$$

se factorise par l'immersion ouverte $U_{N,n} \rightarrow U$ et sa source est un $\mathrm{GL}_{N, U_{N,n}}$ -torseur, à savoir

$$\mathcal{I}som(\mathcal{C}_{U_{N,n}}^N, (f_{U_{N,n}})_*(\mathcal{M}_{U_{N,n}}(n))).$$

Ceci montre la lissité de P ainsi que sa surjectivité, compte tenu du théorème de Serre ([EGA] III, 2.2.1) (pour $n \gg 0$, $U = \coprod_{N \geq 0} U_{N,n}$). $\square$

(4.6.3) Le S -champ $\mathcal{C}_S$ de (3.4.5) est algébrique. Plus précisément, on a $\mathcal{C}_S = S \times \mathcal{C}$, où $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}$, et $\mathcal{C}$ est algébrique.

D'après Mumford (cf. [Mu-Fo]), on peut le voir comme suit. Partant d'un schéma abélien principalement polarisé (A, λ) de dimension g , on lui

associe grâce à 4λ un plongement projectif $A \hookrightarrow P(A, \lambda)$, où $P(A, \lambda)$ est un fibré projectif de dimension relative $N := 4^g - 1$. Les triplets (A, λ, ι) , où $\iota : P(A, \lambda) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^N$ est une trivialisatation de ce fibré projectif, sont paramétrés par les points d'un sous-schéma H_g d'un schéma de Hilbert convenable. Le schéma en groupes $G_g = \mathrm{PGL}_{N+1}$ agit sur H_g et le champ $\mathcal{C}$ n'est autre que la somme (pour $g \in \mathbb{N}$) des champs quotients $\mathcal{C}_g = [H_g/G_g]$.

En fait le S -champ $\mathcal{C}_S$ est de Deligne-Mumford. Pour le voir, on peut soit remarquer que le schéma des automorphismes d'un schéma abélien principalement polarisé est fini et non ramifié, et invoquer le théorème (8.1) plus bas, soit vérifier que, pour tout entier $n \geq 3$, le champ algébrique $A_{g,1,n}$ des schémas abéliens principalement polarisés munis d'une structure principale de niveau n est un schéma quasi-projectif ([Mu-Fo] Thm. (10.9)), et aussi ([MB] VII, 3.2 et VII, 4.3)) et fournit une présentation étale de $\mathcal{C}_g[1/n]$.

(4.7) Soit $P(X)$ une propriété de S -espaces algébriques de nature locale pour la topologie lisse sur X (i.e. telle que, pour tout morphisme surjectif et lisse $X' \rightarrow X$ de S -espaces algébriques, X possède la propriété P si et seulement si X' la possède), par exemple :

- X est localement noethérien, réduit, normal ou géométriquement uni-branche ([EGA] IV, 2.2.14 et 17.5.7),
- X est localement noethérien et de Cohen-Macaulay, régulier, (R_n) ou (S_n) ([EGA] IV, 2.2.14 et 17.5.8),
- X est de caractéristique donnée p .

DÉFINITION (4.7.1). — On dira qu'un S -champ algébrique $\mathcal{X}$ possède la propriété P si, pour une (et donc pour toute) présentation $X \xrightarrow{P} \mathcal{X}$, le S -espace algébrique X la possède.

(Si l'on se restreint aux champs de Deligne-Mumford, on peut naturellement étendre cette définition aux propriétés locales pour la topologie étale, comme par exemple « X est localement noethérien de dimension n »).

DÉFINITION (4.7.2). — On dira qu'un S -champ algébrique $\mathcal{X}$ est quasi-compact s'il existe une présentation $X \xrightarrow{P} \mathcal{X}$ de $\mathcal{X}$ avec X quasi-compact ; on dira que $\mathcal{X}$ est noethérien s'il est localement noethérien et quasi-compact.

On a aussi pour les S -champs algébriques des notions de connexité et d'irréductibilité. Commençons par la connexité. On dira qu'un S -champ algébrique est vide s'il est 1-isomorphe au S -schéma vide.

DÉFINITION (4.8). — Un S -champ algébrique $\mathcal{X}$ est dit connexe s'il est non vide et s'il n'est pas 1-isomorphe à la somme disjointe de deux S -champs (nécessairement algébriques) non vides.

PROPOSITION (4.9). — *Un S -champ algébrique localement noethérien est d'une façon et d'une seule somme disjointe d'une famille de S -champs algébriques connexes, appelés ses composantes connexes.* $\square$

LEMME (4.10). — *Pour tout sous- S -champ algébrique ouvert $\mathcal{X}^\circ$ (cf. (3.14)) d'un S -champ algébrique $\mathcal{X}$, il existe un et un seul sous- S -champ algébrique fermé $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{X}$ tel que, pour une (et donc pour toute) présentation $X \xrightarrow{P} \mathcal{X}$, $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}, P} X$ soit le sous- S -espace algébrique fermé réduit complémentaire de $\mathcal{X}^\circ \times_{\mathcal{X}, P} X$ de X .*

On dira simplement que $\mathcal{Y}$ est le *fermé complémentaire* de l'ouvert $\mathcal{X}^\circ$ de $\mathcal{X}$. Pour $\mathcal{X}^\circ = \emptyset$, on notera $\mathcal{X}_{\text{red}}$ le fermé complémentaire de $\mathcal{X}^\circ$ dans $\mathcal{X}$ et on appellera encore $\mathcal{X}_{\text{red}}$ le S -champ algébrique réduit sous-jacent à $\mathcal{X}$ (voir aussi (14.1.7)).

Preuve de (4.10) : Fixons une présentation $X \xrightarrow{P} \mathcal{X}$ de $\mathcal{X}$ et notons X° l'ouvert $\mathcal{X}^\circ \times_{\mathcal{X}, P} X$ de X et Y le fermé (réduit) complémentaire de X° dans X . Alors, pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, la catégorie fibre $\mathcal{Y}_U$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{X}_U$ dont les objets sont les $U \xrightarrow{x} \mathcal{X}$ tels qu'il existe une famille couvrante à un élément $(U' \rightarrow U)$ dans (Aff/S) , $y \in Y(U') \subset X(U')$ et un isomorphisme dans $\mathcal{X}_{U'}$ entre $x_{U'}$ et $P \circ y$. Le point est que les sous- S -espaces algébriques fermés réduits $Y \times_{P, \mathcal{X}, P} X$ et $X \times_{P, \mathcal{X}, P} Y$ coïncident en tant que fermés complémentaires d'un même ouvert, à savoir

$$\mathcal{X}^\circ \times_{\mathcal{X}, P} X \times_{P, \mathcal{X}, P} X = X \times_{P, \mathcal{X}, P} X \times_{P, \mathcal{X}} X^\circ.$$

$\square$

DÉFINITION (4.11). — *Un S -champ algébrique $\mathcal{X}$ sera dit irréductible s'il est non vide et si pour tout couple $(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2)$ de sous- S -champs ouverts non vides de $\mathcal{X}$, on a $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2 \neq \emptyset$.*

PROPOSITION (4.12). — *Soit $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique localement noethérien. Alors il existe une et une seule famille $(\mathcal{Y}_i)_{i \in I}$ de sous- S -champs fermés réduits de $\mathcal{X}$ ayant les propriétés suivantes :*

- (i) chaque $\mathcal{Y}_i$ est irréductible,
- (ii) si $i \neq j$, $\mathcal{Y}_i \not\subset \mathcal{Y}_j$ et $\mathcal{Y}_j \not\subset \mathcal{Y}_i$,
- (iii) pour tout ouvert quasi-compact (et donc noethérien) $\mathcal{U}$ de $\mathcal{X}$, $\mathcal{U} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{Y}_i$ est vide sauf pour au plus un nombre fini de $i \in I$,
- (iv) $\mathcal{X}_{\text{red}} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{Y}_i$. $\square$

Les $\mathcal{Y}_i$ ($i \in I$) ci-dessus sont appelés les composantes irréductibles de $\mathcal{X}$. Si $\mathcal{X}^\circ$ est un ouvert de $\mathcal{X}$, les composantes irréductibles de $\mathcal{X}^\circ$ sont les $\mathcal{Y}_i^\circ = \mathcal{X}^\circ \times_{\mathcal{X}} \mathcal{Y}_i$ qui sont non vides. Chaque composante irréductible de $\mathcal{X}$ est contenue dans une et une seule composante connexe de $\mathcal{X}$.

PROPOSITION (4.13). — *Les composantes connexes d'un S -champ algébrique localement noethérien et normal sont irréductibles et coïncident donc avec ses composantes irréductibles.* $\square$

Soit $P(f)$ une propriété des morphismes de S -espaces algébriques $X \xrightarrow{f} Y$ de nature locale pour la topologie lisse sur X et sur Y (i.e. telle que, pour tout diagramme commutatif dans $(\text{Es.alg}/S)$ à carré cartésien

$$\begin{array}{ccccc} X'' & \xrightarrow{p'} & X' & \longrightarrow & X \\ & \searrow f'' & \downarrow & \square & \downarrow f \\ & & Y' & \xrightarrow{q} & Y \end{array}$$

où p' et q sont surjectifs et lisses, f possède la propriété P si et seulement si f'' la possède), par exemple

- f est surjectif ou universellement ouvert ([EGA] IV, 2.4.3, 2.4.6, 2.6.1 et 2.6.4),
- f est localement de présentation finie ou localement de type fini ([EGA] IV, 2.7.1 et 17.7.5),
- f est plat ou lisse ([EGA] IV, 2.2.11, 2.5.1, 17.7.1 et 17.7.7),
- f est universellement générissant (vérification laissée au lecteur). (Rappelons ([EGA] I, 3.9.2) qu'un morphisme de schémas $f : X \rightarrow Y$ est générissant si, pour tout $x \in X$, le morphisme induit $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,f(x)})$ est surjectif; il revient au même de dire que toute générisation de $f(x)$ se relève en une générisation de x).

DÉFINITION (4.14). — *On dira qu'un 1-morphisme $\mathcal{X}' \xrightarrow{F} \mathcal{X}$ de S -champs algébriques possède la propriété P si, pour une (et donc pour toute) présentation de F , i.e. diagramme 2-commutatif de 1-morphismes de S -champs algébriques à carré 2-cartésien*

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{P'} & \mathcal{X}' & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ & \searrow f & \downarrow & \square & \downarrow F \\ & & Y & \xrightarrow{Q} & \mathcal{Y} \end{array}$$

où P' et Q sont des présentations de $\mathcal{X}' = Y \times_{Q, \mathcal{Y}, F} \mathcal{X}$ et de $\mathcal{Y}$ respectivement, le morphisme de S -espaces algébriques $X' \xrightarrow{f} Y$ possède cette propriété P .

On rappelle que les produits fibrés (finis) sont représentables dans $(\text{Ch.alg}/S)$ (cf. (4.5)(i)).

Remarque (4.14.1) : Bien entendu, si l'on suppose de plus $P(f)$ stable par tout changement de S -espace algébrique de base $Y' \rightarrow Y$ (ce qui est le cas des exemples donnés ci-dessus), alors pour tout carré 2-cartésien dans $(\text{Ch.alg}/S)$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}' & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ F' \downarrow & \square & \downarrow F \\ \mathcal{Y}' & \longrightarrow & \mathcal{Y} \end{array}$$

tel que F possède la propriété P , F' possède aussi cette propriété P .

PROPOSITION (4.15). — *Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ un 1-morphisme de S -champs algébriques.*

(i) *Pour que F soit localement de présentation finie, il faut et il suffit que, pour tout système projectif filtrant $(U_i)_{i \in I}$ dans (Aff/S) , le carré de foncteurs*

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_i \mathcal{X}_{U_i} & \longrightarrow & \mathcal{X}_{\varinjlim_i U_i} \\ F' \downarrow & & \downarrow F \\ \varinjlim_i \mathcal{Y}_{U_i} & \longrightarrow & \mathcal{Y}_{\varinjlim_i U_i} \end{array}$$

où les foncteurs horizontaux sont les foncteurs canoniques et les foncteurs verticaux sont induits par F , soit 2-cartésien.

(ii) *Si F est localement de présentation finie, pour que F soit lisse, il faut et il suffit que F soit formellement lisse, i.e. que, pour tout $U = \text{Spec}(A)$ dans (Aff/S) , où A est un anneau local strictement hensélien, tout idéal de carré nul I de A et tout diagramme 2-commutatif dans $(\text{Ch.alg}/S)$*

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \xrightarrow{x_0} & \mathcal{X} \\ i \downarrow & + & \downarrow F \\ U & \xrightarrow{y} & \mathcal{Y} \end{array}$$

où $U_0 \xrightarrow{f} U$ est l'immersion fermée définie par l'idéal I , il existe au moins un objet x de $\mathcal{X}_U$ faisant 2-commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \xrightarrow{x_0} & \mathcal{X} \\ i \downarrow & \nearrow x & \downarrow F \\ U & \xrightarrow{y} & \mathcal{Y} \end{array}$$

dans $(\text{Ch.alg}/S)$.

Preuve : Remarquons tout d'abord que les propriétés de F considérées en (i) et (ii) sont préservées par composition et changement de base.

Remarquons ensuite que la proposition est bien vérifiée quand F est un morphisme de schémas. Pour la partie (i), ce n'est autre que ([EGA] IV, 8.14.2). Pour la partie (ii), c'est une variante de ([EGA] IV, 17.14.1) : on reprend la preuve de ([EGA] IV, 17.14.1) en remarquant que $X \xrightarrow{f} Y$, localement de présentation finie, est lisse en $x \in X$ si et seulement si $\mathcal{C}_{X,x}^{\text{sh}}$ est une $\mathcal{C}_{Y,y}^{\text{sh}}$ -algèbre formellement lisse ($y = f(x)$), on a choisi des points géométriques $\bar{x}$ et $\bar{y}$ au-dessus de x et y respectivement tels que $f(\bar{x}) = \bar{y}$ et on a noté $\mathcal{C}_{X,x}^{\text{sh}}$ et $\mathcal{C}_{Y,y}^{\text{sh}}$ les hensélisés stricts de $\mathcal{C}_{X,x}$ et $\mathcal{C}_{Y,y}$ respectivement correspondant à ces choix ; ce dernier point est une variante de ([EGA] IV, 17.5.1), fondée sur ([EGA] 0, 22.6.4) et laissée au lecteur.

L'assertion «il suffit» de la proposition découle alors des deux remarques précédentes et de la définition (4.14).

Pour l'assertion «il faut», on peut clairement supposer $\mathcal{Y} = S$. On fixe alors une présentation $X \xrightarrow{P} \mathcal{X}$ de $\mathcal{X}$ et on suppose F (et donc $F \circ P : X \rightarrow S$) localement de présentation finie pour la partie (i) et lisse pour la partie (ii).

Pour la partie (i), on doit montrer que le foncteur

$$\varinjlim_i \mathcal{X}_{U_i} \rightarrow \mathcal{X}_{\varinjlim_i U_i}$$

est une équivalence de catégories. La pleine fidélité résulte du fait que le 1-morphisme représentable diagonal $\mathcal{X} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ est lui aussi localement de présentation finie ([EGA] I, 6.2.6). Montrons maintenant que ce foncteur est essentiellement surjectif. Soit donc $x \in \text{ob } \mathcal{X}_{\varinjlim_i U_i}$, alors il existe $i \in I$, une famille couvrante à un élément $(U'_i \rightarrow U_i)$ et $x'_i \in X(U'_i)$ tels que

$$x'_i|U' = x|U'$$

où $U = \varinjlim_i U_i$ et $U' = U \times_{U_i} U'_i$ ([EGA] IV, 8.8.2) conjugué à l'hypothèse que X est localement de présentation finie sur S). Il reste à voir qu'il existe $j \geq i$ dans I tel que $x'_i|U'_j$, où $U'_j = U_j \times_{U_i} U'_i$, se descende en un $x \in \text{ob } \mathcal{X}_{U_j}$, ce qui résulte de la pleine fidélité déjà démontrée puisque $x|U'$ se descend en $x \in \text{ob } \mathcal{X}_U$ tautologiquement.

Pour la partie (ii), la conclusion résulte immédiatement du fait que tout 1-morphisme $U_0 \xrightarrow{x_0} \mathcal{X}$ avec $U_0 = \text{Spec}(A_0)$, A_0 un anneau local strictement hensélien, se relève en un $\tilde{x}_0 \in X(U_0)$, d'après ([EGA] IV, 17.16.3 (ii) et IV, 18.8.1). $\square$

DÉFINITION (4.16). — *On dira qu'un 1-morphisme $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ de S -champs algébriques est quasi-compact si, pour tout $V \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et tout $y \in \text{ob } \mathcal{Y}_V$, vu comme 1-morphisme de S -champs $V \xrightarrow{y} \mathcal{Y}$, le produit fibré $V \times_{y, \mathcal{Y}, F} \mathcal{X}$ est un V -champ (algébrique) quasi-compact ; on dira que F est*

de présentation finie (resp. de type fini) s'il est localement de présentation finie (resp. localement de type fini) et quasi-compact.

Remarques (4.17) : (1) On rappelle que tous les S -espaces algébriques considérés sont quasi-séparés, de sorte qu'il en est automatiquement de même des morphismes de S -espaces algébriques et de tous les 1-morphismes $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ de S -champs algébriques (en ce sens que le 1-morphisme diagonal $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_{F, \mathcal{Y}, F} \mathcal{X}$ est quasi-compact). On en déduit formellement que si un composé $G \circ F$ de 1-morphismes est quasi-compact, alors F est quasi-compact. En particulier, si $\mathcal{X}$ est un S -champ algébrique quasi-compact, tout 1-morphisme de $\mathcal{X}$ vers un S -champ algébrique est quasi-compact. Cette propriété sera particulièrement utile lorsque $\mathcal{X}$ est un schéma affine.

(2) La remarque (4.14.1) sur les propriétés stables par changement de base vaut aussi pour les propriétés des 1-morphismes de S -champs algébriques définies en (4.16).

(3) Bien entendu, pour un 1-morphisme *représentable*, la notion de morphisme quasi-compact définie ci-dessus coïncide avec celle résultant de (3.10). Nous donnerons au chapitre 5 d'autres propriétés et caractérisations des 1-morphismes quasi-compacts.

PROPOSITION (4.18). — *On suppose que $S = \text{Spec}(A)$ est affine et que A est limite inductive d'un système inductif filtrant $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ d'anneaux; pour tout $\lambda \in L$ on pose $S_\lambda = \text{Spec}(A_\lambda)$.*

(i) *Soient $\lambda_0 \in L$, $\mathcal{X}_{\lambda_0}$ et $\mathcal{Y}_{\lambda_0}$ deux S_{λ_0} -champs algébriques. On suppose que $\mathcal{X}_{\lambda_0}$ est quasi-compact et que $\mathcal{Y}_{\lambda_0}$ est localement de présentation finie. Alors le foncteur naturel*

$$\varinjlim_{\lambda \geq \lambda_0} \text{Hom}_{S_\lambda}(\mathcal{X}_\lambda, \mathcal{Y}_\lambda) \longrightarrow \text{Hom}_S(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

est une équivalence de catégories, où l'on a posé

$$\mathcal{X}_\lambda = S_\lambda \times_{S_{\lambda_0}} \mathcal{X}_{\lambda_0}, \quad \mathcal{Y}_\lambda = S_\lambda \times_{S_{\lambda_0}} \mathcal{Y}_{\lambda_0}, \quad \mathcal{X} = S \times_{S_{\lambda_0}} \mathcal{X}_{\lambda_0}, \quad \mathcal{Y} = S \times_{S_{\lambda_0}} \mathcal{Y}_{\lambda_0}.$$

(ii) *Soit $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique de présentation finie. Alors il existe un $\lambda_0 \in L$, un S_{λ_0} -champ algébrique $\mathcal{X}_{\lambda_0}$ de présentation finie, et un 1-isomorphisme $S \times_{S_{\lambda_0}} \mathcal{X}_{\lambda_0} \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}$.*

Preuve : (i) Commençons par une remarque générale. S désignant provisoirement un schéma quelconque, soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux S -champs, U un S -espace et $\Pi : U \rightarrow \mathcal{U}$ un 1-épimorphisme. Alors la catégorie des 1-morphismes de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$ est équivalente à la catégorie dont les objets et les flèches sont définis comme suit :

– un objet est la donnée d'un 1-morphisme $v : U \rightarrow \mathcal{V}$ et d'un isomorphisme $\varphi : v \circ \text{pr}_1 \xrightarrow{\sim} v \circ \text{pr}_2$ dans la catégorie $\text{Hom}_S(U \times_{\mathcal{U}} U, \mathcal{V})$ vérifiant une condition de cocycle évidente sur $U \times_{\mathcal{U}} U \times_{\mathcal{U}} U$;

– une flèche de (v, φ) vers (v', φ') est la donnée d'un isomorphisme α de v sur v' dans $\text{Hom}_S(U, \mathcal{V})$, faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} v \circ \text{pr}_1 & \xrightarrow{\varphi} & v \circ \text{pr}_2 \\ \text{pr}_1^* \alpha \downarrow & & \downarrow \text{pr}_2^* \alpha \\ v' \circ \text{pr}_1 & \xrightarrow{\varphi'} & v' \circ \text{pr}_2. \end{array}$$

En d'autres termes, la catégorie $\text{Hom}_S(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ se calcule formellement en termes du diagramme cosimplicial naturel de catégories

$$\text{Hom}_S(U, \mathcal{V}) \rightleftarrows \text{Hom}_S(U \times_{\mathcal{U}} U, \mathcal{V}) \rightleftarrows \text{Hom}_S(U \times_{\mathcal{U}} U \times_{\mathcal{U}} U, \mathcal{V})$$

par une construction canonique qui, de plus, commute aux limites inductives filtrantes de catégories.

Cette description va nous permettre par étapes successives de ramener l'assertion (i) à la proposition (4.15) :

(a) Supposons tout d'abord que $\mathcal{X}_{\lambda_0}$ soit un S_{λ_0} -schéma affine. Quitte à faire le changement de base $\mathcal{X}_{\lambda_0} \rightarrow S_{\lambda_0}$, on peut supposer que $\mathcal{X}_{\lambda_0} = S_{\lambda_0}$. L'assertion (i) se réduit alors à la proposition (4.15).

(b) Supposons ensuite que $\mathcal{X}_{\lambda_0}$ soit un S_{λ_0} -schéma (quasi-compact) séparé. Alors on peut trouver un épimorphisme $X_{\lambda_0} \rightarrow \mathcal{X}_{\lambda_0}$ de S_{λ_0} -schémas avec X_{λ_0} , $X_{\lambda_0} \times_{\mathcal{X}_{\lambda_0}} X_{\lambda_0}$ et $X_{\lambda_0} \times_{\mathcal{X}_{\lambda_0}} X_{\lambda_0} \times_{\mathcal{X}_{\lambda_0}} X_{\lambda_0}$ affines (prendre pour X_{λ_0} la somme des ouverts d'un recouvrement affine fini de $\mathcal{X}_{\lambda_0}$). L'assertion résulte donc du cas affine compte tenu de la remarque qui précède.

(c) Si maintenant $\mathcal{X}_{\lambda_0}$ est un S_{λ_0} -espace algébrique (quasi-compact), choisissons un morphisme étale surjectif $X_{\lambda_0} \rightarrow \mathcal{X}_{\lambda_0}$ où X_{λ_0} est un S_{λ_0} -schéma affine : alors $X_{\lambda_0} \times_{\mathcal{X}_{\lambda_0}} X_{\lambda_0}$ et $X_{\lambda_0} \times_{\mathcal{X}_{\lambda_0}} X_{\lambda_0} \times_{\mathcal{X}_{\lambda_0}} X_{\lambda_0}$ sont automatiquement des S_{λ_0} -schémas quasi-compacts et séparés (on rappelle que la diagonale d'un espace algébrique est un morphisme quasi-affine) de sorte que l'assertion résulte du cas (b).

(d) Enfin, dans le cas général, on prend une présentation $P : X_{\lambda_0} \rightarrow \mathcal{X}_{\lambda_0}$ de $\mathcal{X}_{\lambda_0}$ où X_{λ_0} est un S_{λ_0} -espace algébrique quasi-compact : alors $X_{\lambda_0} \times_{\mathcal{X}_{\lambda_0}} X_{\lambda_0}$ et $X_{\lambda_0} \times_{\mathcal{X}_{\lambda_0}} X_{\lambda_0} \times_{\mathcal{X}_{\lambda_0}} X_{\lambda_0}$ sont automatiquement des S_{λ_0} -espaces algébriques quasi-compacts puisque la diagonale de $\mathcal{X}_{\lambda_0}$ est représentable et quasi-compacte. Il suffit donc d'appliquer le cas (c).

(ii) D'après (4.3), on peut supposer que $\mathcal{X}$ est de la forme

$$\mathcal{X} = [X_1 \xrightleftharpoons[p_2]{p_1} X_0]$$

pour un S -espace en groupoïdes satisfaisant les hypothèses de la proposition (4.3.1), et où X_0 est un S -espace algébrique, et même un S -schéma affine, de présentation finie. Alors $X_1 = X_0 \times_{\mathcal{X}} X_0$ est un S -espace algébrique de présentation finie (il est quasi-compact car il se déduit par changement

le base du morphisme diagonal de $\mathcal{X}$, et d'autre part il est localement de présentation finie sur X_0).

(a) Si de plus X_1 est un *schéma*, on conclut en appliquant successivement [EGA] IV, 8.8.2) (qui montre que le diagramme provient d'un diagramme imilaire sur un S_λ) puis ([EGA] IV, 8.10.5) et ([EGA] IV, 17.7.8) (pour un assez grand ce diagramme vérifie les conditions de (4.3.1)), et enfin la proposition (4.3.1) qui montre que le champ quotient est algébrique.

(b) Remarquons ensuite que X_1 est automatiquement un schéma lorsque $\mathcal{X}$ est *représentable*, de sorte que l'assertion (ii) est démontrée dans ce cas.

(c) Dans le cas général, le cas (b) montre que X_1 provient d'un espace algébrique sur un S_λ , et l'assertion (i) de la proposition montre que, par suite, le diagramme $X_1 \xrightarrow[p_1]{p_2} X_0$ provient aussi d'un S_λ . Il suffit alors de raisonner comme dans le cas (a). $\square$

Remarque (4.18.1) : Dans le cas particulier des champs algébriques *de présentation finie*, on peut résumer (4.15) et (4.18) en disant que (avec les notations de (4.18)) la 2-catégorie des S -champs algébriques de présentation finie est limite inductive du système, indexé par $\lambda \in L$, des 2-catégories des S_λ -champs algébriques de présentation finie.

5. Points d'un S -champ algébrique ; topologie de Zariski

Soit $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique. Considérons l'ensemble

$$(5.1) \quad \coprod_K \text{ob } \mathcal{X}_{\text{Spec}(K)}$$

où K parcourt les S -corps, i.e. les corps munis d'un morphisme de schémas $\text{Spec}(K) \rightarrow S$. On munit cet ensemble de la relation d'équivalence suivante : $(x', K') \sim (x'', K'')$ si et seulement si il existe un S -corps K , extension commune des S -corps K' et K'' , et un isomorphisme de $x'_{\text{Spec}(K)}$ sur $x''_{\text{Spec}(K)}$ dans $\mathcal{X}_{\text{Spec}(K)}$.

DÉFINITION (5.2). — *Un point de $\mathcal{X}$ est une classe d'équivalence dans l'ensemble (5.1) pour la relation d'équivalence ci-dessus. On notera $|\mathcal{X}|$ l'ensemble des points de $\mathcal{X}$.*

On définit de manière évidente la notion d'image d'un point par un 1-morphisme $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ de S -champs algébriques : on obtient ainsi une application $|F| : |\mathcal{X}| \rightarrow |\mathcal{Y}|$, parfois notée F si aucune confusion n'en résulte. Lorsque $\mathcal{X}$ est un schéma, $|\mathcal{X}|$ s'identifie canoniquement à l'ensemble sous-jacent à $\mathcal{X}$.

Remarque (5.3) : Si $X \xrightarrow{P} \mathcal{X}$ est une présentation de $\mathcal{X}$, tout point ξ de $\mathcal{X}$ admet au moins un représentant $(P \circ y, L)$ où $y : \text{Spec}(L) \rightarrow X$ est un point de X (i.e. un monomorphisme du spectre d'un corps dans X). En effet, si (x, K) est un représentant arbitraire de ξ , on peut prendre pour (y, L) l'image dans X d'un point du S -espace algébrique représentant $\text{Spec}(L) \times_{x, \mathcal{X}, P} X$. En particulier, on peut dans (5.1) se limiter aux S -corps K qui sont corps résiduels de X . Utilisant ces remarques, on démontre facilement la proposition suivante :

PROPOSITION (5.4). — (i) *Un S -champ algébrique $\mathcal{X}$ est vide si et seulement si $|\mathcal{X}| = \emptyset$.*

(ii) *Un 1-morphisme $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ de S -champs algébriques est surjectif si et seulement si l'application $|F| : |\mathcal{X}| \rightarrow |\mathcal{Y}|$ induite par F est surjective.*

(iii) *Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux sous-champs localement fermés d'un S -champ algébrique $\mathcal{Z}$. On suppose que $\mathcal{X}$ est réduit ou que $\mathcal{Y}$ est un sous-champ ouvert de $\mathcal{Z}$. Alors on a $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ si et seulement si $|\mathcal{X}| \subset |\mathcal{Y}|$.*

(iv) Pour tout diagramme 2-cartésien de S -champs algébriques

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}' & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \mathcal{Y}' & \longrightarrow & \mathcal{Y} \end{array}$$

l'application naturelle $|\mathcal{X}'| \rightarrow |\mathcal{X}| \times_{|\mathcal{Y}|} |\mathcal{Y}'|$ est surjective. $\square$

(5.5) *Topologie de Zariski.* Pour tout S -champ algébrique $\mathcal{X}$, les ensembles $|\mathcal{U}|$, où $\mathcal{U}$ parcourt les sous-champs ouverts de $\mathcal{X}$, sont les ouverts d'une topologie, dite *de Zariski*, sur $|\mathcal{X}|$; pour tout 1-morphisme $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ de S -champs algébriques, l'application $|F| : |\mathcal{X}| \rightarrow |\mathcal{Y}|$ est continue. Ceci permet d'étendre aux champs algébriques (et morphismes) de nombreuses notions topologiques :

- $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est *ouvert* (resp. *fermé*, resp. *dominant*) si l'application $|F|$ est ouverte (resp. fermée, resp. d'image dense);
- un point x de $|\mathcal{X}|$ est une *générisation* d'un point y (et y est une *spécialisation* de x) si y est adhérent à $\{x\}$ dans $|\mathcal{X}|$;
- $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est *générisant en un point x de $|\mathcal{X}|$* si toute générisation de $F(x)$ dans $|\mathcal{Y}|$ est image par $|F|$ d'une générisation de x dans $|\mathcal{X}|$; F est *générisant* s'il est générisant en tout point de $|\mathcal{X}|$.

Certaines de ces notions topologiques ont déjà été introduites par réduction au cas des schémas; il convient à chaque fois de vérifier l'équivalence des deux points de vue. Par exemple il est immédiat qu'un S -champ algébrique $\mathcal{X}$ est quasi-compact si et seulement si $|\mathcal{X}|$ est quasi-compact. Un cas moins élémentaire est le suivant :

- $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est *universellement fermé* si pour tout 1-morphisme $\mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Y}$ de S -champs algébriques, le 1-morphisme $F' : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{Y}'$ déduit de F par changement de base est fermé.

Dans le cas des morphismes *représentables*, on dispose déjà (3.10) d'une notion de morphisme universellement fermé; la compatibilité sera vérifiée en (5.6.4) ci-dessous. De même, sans hypothèse de représentabilité, une notion de 1-morphisme *universellement ouvert* (resp. *universellement générisant*) a été définie en (4.14), et il convient de vérifier qu'elle coïncide avec la notion de morphisme «ouvert (resp. générisant) après tout changement de base» : ce sera fait en (5.6) (resp. (5.8)).

PROPOSITION (5.6). — Soit $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un 1-morphisme de S -champs algébriques. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) F est universellement ouvert au sens de (4.14);
- (b) pour tout 1-morphisme $\mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Y}$ de S -champs algébriques, le 1-morphisme $F' : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{Y}'$ déduit de F par changement de base est ouvert.

En particulier, tout 1-morphisme plat et localement de présentation finie (et notamment toute présentation d'un S -champ algébrique) est un morphisme ouvert.

Preuve : Montrons que (a) implique (b). Comme les deux propriétés sont stables par changement de base et sont satisfaites par les immersions ouvertes, il suffit de montrer que si F est universellement ouvert alors $F(|\mathcal{X}'|)$ est ouvert dans $|\mathcal{Y}'|$. De plus si $P : X \rightarrow \mathcal{X}$ est une présentation de $\mathcal{X}$, alors $|P|$ est surjective et $F \circ P$ est universellement ouvert de sorte que l'on peut supposer que $\mathcal{X} = X$ est un schéma. Pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et tout objet $y : U \rightarrow \mathcal{Y}$ de $\mathcal{Y}_U$, la première projection $p : X \times_{F, \mathcal{Y}, y} U \rightarrow U$ est ouverte (cf. (4.14.1)) et on a donc un ouvert $W(U, y)$ de U , image de cette projection. Il est alors immédiat de vérifier que si l'on note $\mathcal{Z}_U$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{Y}_U$ formée des y tels que $W(U, y) = U$, (i.e. tels que p soit surjective), alors $\mathcal{Z}$ est un sous-champ ouvert de $\mathcal{Y}$ et $|\mathcal{Z}| = F(|\mathcal{X}'|)$.

Montrons que (b) implique (a). Supposant (b) vérifiée, et considérant comme en (4.14) une présentation de F :

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{P'} & \mathcal{X}' & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ & \searrow f & \downarrow F' & \square & \downarrow F \\ & & Y & \longrightarrow & \mathcal{Y} \end{array}$$

il s'agit de voir que f est ouvert. Or comme P' est lisse donc universellement ouvert, il résulte de l'implication (a) $\Rightarrow$ (b) déjà démontrée que P' est ouvert, et F' l'est aussi par hypothèse, d'où la conclusion. $\square$

COROLLAIRE (5.6.1). — Soient $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique et $P : X \rightarrow \mathcal{X}$ une présentation de $\mathcal{X}$.

- (i) Une partie Z de $|\mathcal{X}|$ est ouverte (resp. fermée) si et seulement si $P^{-1}(Z)$ est un ouvert (resp. un fermé) de $|X|$.
- (ii) Une partie Z de $|\mathcal{X}|$ est fermée si et seulement si elle est de la forme $|\mathcal{Z}|$, où $\mathcal{Z}$ est un sous-champ fermé de $\mathcal{X}$ (que l'on peut supposer réduit).
- (iii) L'espace $|\mathcal{X}|$ admet une base d'ouverts quasi-compact.

Preuve : Pour (i), la partie «seulement si» résulte de la continuité de $|F|$. Pour la réciproque il suffit de traiter le cas «ouvert» (le cas d'un fermé s'en déduit par passage au complémentaire); comme $|P|$ est surjective d'après (5.4)(ii), on a $Z = P(P^{-1}(Z))$ et l'assertion résulte donc de (5.6) (P est ouvert).

- (ii) résulte de (4.10).
- (iii) résulte de la même propriété pour $|X|$ jointe au fait que P est ouvert. $\square$

COROLLAIRE (5.6.2). — Soit $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un 1-morphisme de S -champs algébriques. On suppose que F est surjectif et ouvert (conditions vérifiées notamment si F est une présentation de $\mathcal{Y}$). Alors tout ouvert quasi-compact de $\mathcal{Y}$ est image par F d'un ouvert quasi-compact de $\mathcal{X}$.

Preuve : Ceci résulte immédiatement de (5.6.1)(iii). $\square$

COROLLAIRE (5.6.3). — Soit $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un 1-morphisme de S -champs algébriques, et soit $Q : Y \rightarrow \mathcal{Y}$ une présentation de $\mathcal{Y}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) F est quasi-compact (4.16) ;
- (ii) le 1-morphisme $F' : \mathcal{X} \times_{F, \mathcal{Y}, Q} Y \rightarrow Y$ déduit de F par changement de base est quasi-compact ;
- (iii) pour tout ouvert quasi-compact U de $|\mathcal{Y}|$, l'ouvert $F^{-1}(U)$ de $|\mathcal{X}|$ est quasi-compact.

De plus il suffit de vérifier (iii) pour une famille donnée d'ouverts quasi-compacts recouvrant $|\mathcal{Y}|$.

Preuve : L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte facilement des définitions.

Supposons (ii) vérifiée et soit U un ouvert quasi-compact de $|\mathcal{Y}|$: alors (5.6.2) U est image d'un ouvert quasi-compact V de Y , et $F'^{-1}(V)$ est quasi-compact d'après l'hypothèse de sorte que $F^{-1}(U)$, image du précédent par une application continue, est quasi-compact et (iii) est vérifiée.

Montrons enfin que (iii) implique (i). Soient donc $V \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, $y \in \text{ob } \mathcal{Y}_V$, et montrons que $\mathcal{X}_y := \mathcal{X} \times_{F, \mathcal{Y}, y} V$ est quasi-compact. Comme V est affine donc quasi-compact, il résulte de (5.6.1)(iii) que y se factorise par un ouvert quasi-compact $\mathcal{U}$ de $\mathcal{Y}$, de sorte que $\text{pr}_2 : \mathcal{X}_y \rightarrow V$ est déduit par changement de base du morphisme $F_{\mathcal{U}} : F^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U}$ induit par F . Or par hypothèse $F^{-1}(\mathcal{U})$ est quasi-compact donc $F_{\mathcal{U}}$ est un morphisme quasi-compact et il en est de même de $\text{pr}_2 : \mathcal{X}_y \rightarrow V$, d'où la conclusion.

Enfin la dernière assertion est immédiate, la propriété (iii) pour les ouverts d'un recouvrement quasi-compact impliquant immédiatement (iii) pour tout ouvert quasi-compact. $\square$

COROLLAIRE (5.6.4). — Soit $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un 1-morphisme de S -champs algébriques, et soit $Q : Y \rightarrow \mathcal{Y}$ une présentation de $\mathcal{Y}$. Pour que F soit universellement fermé (au sens de (5.5)), il faut et il suffit qu'il en soit de même du 1-morphisme $F' : \mathcal{X} \times_{F, \mathcal{Y}, Q} Y \rightarrow Y$ déduit de F par changement de base.

En conséquence, pour un morphisme représentable, la notion de morphisme universellement fermé définie en (5.5) coïncide avec celle de (3.10).

Preuve : Le «il faut» est trivial. Pour la réciproque il suffit de voir que si F' est fermé alors $F(|\mathcal{X}|)$ est fermé dans $|\mathcal{Y}|$. Ceci équivaut d'après (5.6.1)(i)

à dire que $Q^{-1}(F(|\mathcal{X}|))$ est fermé dans $|Y|$; or il résulte de (5.4)(iv) que $Q^{-1}(F(|\mathcal{X}|)) = F'(|\mathcal{X} \times_{F, \mathcal{Y}, Q} Y|)$, d'où l'assertion. $\square$

PROPOSITION (5.7). — Soit $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un 1-morphisme quasi-compact de S -champs algébriques, et soit y un point $|\mathcal{Y}|$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) y est adhérent à $F(|\mathcal{X}|)$ dans $|\mathcal{Y}|$;
- (ii) y est une spécialisation d'un point de $F(|\mathcal{X}|)$.

Preuve : Il est immédiat que (ii) implique (i). Supposons (i) vérifiée, et montrons (ii). La question est locale sur $\mathcal{Y}$ donc on peut supposer $\mathcal{Y}$ (et donc $\mathcal{X}$) quasi-compact. Soit $Q : Y \rightarrow \mathcal{Y}$ une présentation de $\mathcal{Y}$, et soit $F' : \mathcal{X}' \rightarrow Y$ déduit de F par changement de base. Comme Q est ouvert (5.6) on a $\overline{Q^{-1}(Z)} = Q^{-1}(\overline{Z})$ pour toute partie Z de $|\mathcal{Y}|$. Comme d'autre part y se relève dans Y , et que $Q^{-1}(F(|\mathcal{X}|)) = F'(|\mathcal{X}'|)$, on est ramené au cas où $\mathcal{Y} = Y$ est représentable. Enfin si $P : X \rightarrow \mathcal{X}$ est une présentation de $\mathcal{X}$, avec X quasi-compact, on a $F(|\mathcal{X}|) = (F \circ P)(|X|)$ universellement, de sorte que nous sommes ramenés au cas d'un morphisme de schémas, que l'on peut supposer affines (vu l'hypothèse quasi-compacte). On peut de plus supposer que $\mathcal{X} = \text{Spec}(B)$ et $\mathcal{Y} = \text{Spec}(A)$ sont réduits, et que F est dominant. Si $\mathfrak{p}$ désigne l'idéal premier de A correspondant à y , il suffit de voir que $B_{\mathfrak{p}} \neq (0)$ (les points de $\text{Spec}(B_{\mathfrak{p}})$ correspondant canoniquement aux points de $\mathcal{X}$ dont l'image est une généralisation de y). Or ceci résulte du fait que, puisque F est dominant et A réduit, le morphisme naturel $A \rightarrow B$ est injectif de sorte que son localisé $A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_{\mathfrak{p}}$ l'est également. $\square$

COROLLAIRE (5.7.1). — Soit $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un 1-morphisme ouvert de S -champs algébriques. Alors F est générissant.

Preuve : Grâce à (5.6.1)(iii) on se ramène au cas où $\mathcal{X}$ est quasi-compact, de sorte que F est un 1-morphisme quasi-compact. Soient alors x un point de $\mathcal{X}$, et $y' \in |\mathcal{Y}|$ une généralisation de $y = F(x)$. Comme F est ouvert on a $\overline{F^{-1}(Z)} = F^{-1}(\overline{Z})$ pour toute partie Z de $|\mathcal{Y}|$. Prenant $Z = \{y'\}$ on voit que x est adhérent à $F^{-1}(y')$, qui est l'image d'un 1-morphisme quasi-compact $u : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$, où l'on a posé $\mathcal{X}' = \text{Spec}(K) \times_{i, \mathcal{Y}, F} \mathcal{X}$ et où $i : \text{Spec}(K) \rightarrow \mathcal{Y}$ représente le point y' . Il résulte alors de (5.7) que x est une spécialisation d'un point de $u(\mathcal{X}')$, d'où la conclusion. $\square$

COROLLAIRE (5.7.2). — Soit $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique. Alors l'espace topologique $|\mathcal{X}|$ est sobre (i.e. tout fermé irréductible admet un unique point générique).

Preuve : Il suffit de voir que si $\mathcal{X}$ est irréductible, il admet un unique point générique. Il existe un schéma affine non vide X et un 1-morphisme lisse $F : X \rightarrow \mathcal{X}$, dont l'image est un ouvert non vide de $\mathcal{X}$; on peut remplacer

$\mathcal{X}$ par cet ouvert et supposer F surjectif. Soit x un point maximal de X , et soit $\eta = F(x)$. Comme F est générissant (5.7.1), η est un point maximal de $\mathcal{X}'$, i.e. n'admet dans $\mathcal{X}'$ aucune générisation non triviale; en particulier tout point générique de $\mathcal{X}'$ est égal à η , d'où l'unicité. Montrons que η est bien générique : si $\mathcal{U}$ est un ouvert non vide quelconque de $\mathcal{X}'$, il faut voir que $\eta \in |\mathcal{U}|$. On peut pour cela supposer $\mathcal{U}$ quasi-compact, par (5.6.1)(iii); comme $\mathcal{X}'$ est quasi-séparé, l'inclusion de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{X}'$ est alors un 1-morphisme quasi-compact, d'image dense puisque $\mathcal{X}'$ est irréductible. Il résulte donc de (5.7) que η est adhérent à un point de $|\mathcal{U}|$, donc appartient à $|\mathcal{U}|$ puisqu'il est maximal. $\square$

COROLLAIRE (5.7.3) (cf. [EGA] II, 7.2.1). — Soit $F : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{Y}$ un 1-morphisme quasi-compact de S -champs algébriques. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) F est fermé;
- (ii) pour tout point x de $|\mathcal{X}'|$ et toute spécialisation y' de $y = F(x)$, il existe une spécialisation x' de x telle que $F(x') = y'$.

Preuve : Compte tenu de (5.7), (ii) signifie que $|F|(\overline{\{x\}}) = \overline{\{|F|(x)\}}$ et est donc conséquence de (i). Réciproquement, supposons (ii) vérifiée; soit Z un fermé de $|\mathcal{X}'|$, et montrons que $F(Z)$ est un fermé de $|\mathcal{Y}|$. D'après (5.6.1)(ii), Z de la forme $|\mathcal{Z}|$ pour un sous-champ fermé réduit $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{X}'$. On peut remplacer $\mathcal{X}'$ par $\mathcal{Z}$ (il est immédiat que F induit un morphisme quasi-compact de $\mathcal{Z}$ dans $\mathcal{Y}$ qui vérifie encore (ii)) et l'on est ramené à montrer que $F(|\mathcal{X}'|)$ est fermé. Or il résulte de (5.7) que $\overline{F(|\mathcal{X}'|)}$ est l'ensemble des spécialisations des points de $F(|\mathcal{X}'|)$, et (ii) implique que cet ensemble est égal à $F(|\mathcal{X}'|)$, cqfd. $\square$

PROPOSITION (5.8). — Soit $F : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{Y}$ un 1-morphisme de S -champs algébriques. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) F est universellement générissant (au sens de (4.14));
- (b) pour tout 1-morphisme $\mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Y}$ de S -champs algébriques, le 1-morphisme $F' : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{Y}'$ déduit de F par changement de base est générissant.

En particulier, tout 1-morphisme universellement générissant (par exemple tout 1-morphisme plat) est générissant.

Preuve : (a) $\Rightarrow$ (b) : comme (a) est stable par changement de base, il suffit de voir que si F est universellement générissant, il est générissant. Fixons une présentation de F :

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{P'} & \mathcal{X}' & \xrightarrow{Q'} & \mathcal{X} \\ & \searrow f & \downarrow F' & \square & \downarrow F \\ & & Y & \xrightarrow{Q} & \mathcal{Y} \end{array}$$

Par hypothèse, f est générissant; comme Q est ouvert (5.6) il est également générissant (5.7.1) de sorte que $Q \circ f = F \circ Q' \circ P'$ est générissant. Comme $Q' \circ P'$ est surjectif, l'assertion en résulte.

(b) $\Rightarrow$ (a) : supposons (b) et fixons une présentation de F comme ci-dessus : il s'agit de voir que f est universellement générissant, et il suffit pour cela de montrer qu'il vérifie (b), puisque X' et Y sont des schémas. Or il est clair que la propriété (b) est stable par changement de base donc est vérifiée par F' ; elle l'est également (5.7.1) par tout 1-morphisme universellement ouvert, donc par P' ; comme elle est aussi stable par composition, la preuve est achevée. $\square$

(5.9) *Ensembles constructibles, théorème de Chevalley*. Nous renvoyons à ([EGA] 0_I, §§2 et 7) pour les notions de partie *rétrocompacte*, *constructible*, *globalement constructible* d'un espace topologique.

PROPOSITION (5.9.1). — Soit $\mathcal{U}$ un ouvert d'un S -champ algébrique $\mathcal{X}'$: alors $|\mathcal{U}|$ est *rétrocompact* si et seulement si le 1-morphisme d'inclusion de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{X}'$ est quasi-compact.

Preuve : Ceci résulte de (5.6.3). $\square$

COROLLAIRE (5.9.2). — Soit $F : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{Y}$ un 1-morphisme de S -champs algébriques et soit Z une partie de $|\mathcal{Y}|$.

- (a) Si Z est *constructible* (resp. *globalement constructible*, resp. *ouvert et rétrocompact*) dans $|\mathcal{Y}|$, $F^{-1}(Z)$ a la même propriété dans $|\mathcal{X}'|$.
- (b) Si F est surjectif et ouvert (par exemple si F est une présentation de $\mathcal{Y}$) et si $F^{-1}(Z)$ est *constructible* (resp. resp. *ouvert et rétrocompact*) dans $|\mathcal{X}'|$, alors Z a la même propriété dans $|\mathcal{Y}|$.

Preuve : (a) Le cas d'un ouvert rétrocompact résulte de (5.9.1); les autres s'en déduisent comme dans le cas des schémas, cf. ([EGA] 0_I, 7.1.2).

(b) Dans les deux cas on se ramène immédiatement au cas où $\mathcal{Y}$ est quasi-compact, puis grâce à (5.6.2) au cas où $\mathcal{X}'$ l'est aussi.

Cas «ouvert rétrocompact» : alors $F^{-1}(Z)$ est un ouvert quasi-compact, donc $Z = F(F^{-1}(Z))$ également.

Cas «constructible» : alors $F^{-1}(Z)$ est de la forme $|\mathcal{U}| \setminus |\mathcal{Z}'|$, où $\mathcal{U}$ et $\mathcal{Z}'$ sont deux ouverts quasi-compacts de $\mathcal{X}'$ avec $\mathcal{Z}' \subset \mathcal{U}$. On peut alors remplacer $\mathcal{Y}$ par l'ouvert quasi-compact $F(\mathcal{U})$, qui contient Z , ce qui nous

ramène au cas où $F^{-1}(Z)$ est fermé, à complémentaire $|\mathcal{Z}'|$ quasi-compact; alors le complémentaire de Z est l'ouvert quasi-compact $F(\mathcal{Z}')$, cqfd. $\square$

COROLLAIRE (5.9.3). — Soient $\mathcal{X}'$ un S -champ algébrique quasi-compact et Z une partie constructible de $|\mathcal{X}'|$. Il existe un schéma affine X et un 1-morphisme de présentation finie $F : X \rightarrow \mathcal{X}'$ tels que $F(X) = Z$.

Preuve : Soit $P : X \rightarrow \mathcal{X}'$ une présentation de $\mathcal{X}'$: alors $Z = P(P^{-1}(Z))$ et $P^{-1}(Z)$ est constructible dans X par (5.9.2)(a), de sorte que l'assertion résulte du cas des schémas, c'est-à-dire de ([EGA] I, 7.1.3). $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de généraliser le «théorème de Chevalley» de ([EGA] I, 7.1.4) :

THÉOREME (5.9.4). — Soit $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un 1-morphisme de présentation finie de S -champs algébriques, et soit Z une partie constructible de $|\mathcal{X}|$. Alors $F(Z)$ est constructible dans $|\mathcal{Y}|$.

Preuve : La question étant locale sur $\mathcal{Y}$, nous pouvons supposer $\mathcal{Y}$ quasi-compact. Il existe alors un diagramme 2-commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{P} & \mathcal{X}' \\ F' \downarrow & & \downarrow F \\ Y & \xrightarrow{Q} & \mathcal{Y} \end{array}$$

où X et Y sont des schémas quasi-compacts, P et Q sont lisses (donc ouverts) et surjectifs, et F' est encore de présentation finie. D'après (5.9.2)(b) il suffit de voir que $Q^{-1}(F(Z))$ est constructible dans Y ; or c'est l'image par F' de $P^{-1}(Z)$ qui est constructible dans X d'après (5.9.2)(a). On peut donc conclure d'après ([EGA], loc. cit.). $\square$

6. Quelques résultats de structure locale

THÉOREME (6.1). — Soit $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique. Les conditions (i) et (ii) ci-dessous sont équivalentes :

- (i) il existe un entier $d \geq 1$, un espace algébrique (resp. un schéma, resp. un schéma affine) X et un 1-morphisme $\pi : X \rightarrow \mathcal{X}$, fini étale de degré d ;
- (ii) $\mathcal{X}$ est 1-isomorphe à un S -champ de la forme $[X'/G/S]$, où X' est un espace algébrique (resp. un schéma, resp. un schéma affine) et G un groupe fini opérant sur X' .

De plus ces conditions impliquent la suivante :

- (iii) il existe un espace algébrique (resp. un schéma, resp. un schéma affine) X'' et un 1-morphisme lisse, surjectif, de type fini et séparé $P : X'' \rightarrow \mathcal{X}$, à fibres géométriquement connexes, et tel que tout 1-morphisme d'un schéma semi-local dans $\mathcal{X}$ se relève à X'' .

COROLLAIRE (6.1.1). — Soit $\mathcal{Y}$ un S -champ de Deligne-Mumford non vide. Il existe un ouvert non vide $\mathcal{X}'$ de $\mathcal{Y}$ possédant les propriétés (i), (ii), (iii) de (6.1), où de plus X , X' et X'' sont des schémas affines.

Preuve du corollaire : Il est clair que la condition (i) est vérifiée au-dessus d'un ouvert non vide (X étant de plus un schéma), et il en est donc de même de (ii); que l'on puisse (quitte à rétrécir l'ouvert) supposer X' affine résulte du lemme élémentaire (6.1.2) ci-dessous. $\square$

LEMME (6.1.2). — Soit G un groupe fini opérant sur un espace algébrique non vide Y . Alors il existe un ouvert affine de Y , non vide et G -invariant.

Preuve : Commençons par supposer Y séparé. Soit U un ouvert affine non vide de Y (il en existe d'après ([Kn] II, 6.7)). Considérons l'ensemble fini $\mathcal{F}$ des intersections d'ouverts de la forme gU , pour $g \in G$. Comme Y est séparé, les éléments de $\mathcal{F}$ sont encore des ouverts affines de Y . Soit V minimal parmi les éléments non vides de $\mathcal{F}$: alors, pour tout $g \in G$, $V \cap gV$ appartient à $\mathcal{F}$ donc est vide ou égal à V . Par suite, l'ouvert $\bigcup_{g \in G} gV$ est réunion disjointe d'éléments de $\mathcal{F}$: c'est donc un ouvert affine, évidemment G -invariant.

Sans hypothèse de séparation sur Y , l'argument qui précède fournit un ouvert non vide G -invariant, non nécessairement affine mais néanmoins

séparé : remplaçant Y par cet ouvert, nous sommes ramenés au cas précédent. $\square$

(6.1.3) *Preuve de (6.1)* : Il est trivial que (ii) implique (i) : le morphisme structural de X' dans $[X'/G/S]$ est en effet fini étale de degré $\text{Card}(G)$.

Montrons que (i) implique (ii). Si Y est un schéma, on a une équivalence entre la catégorie des revêtements étales de Y de degré d , et celle des toreseurs sur Y sous le groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$: au revêtement étale $Z \rightarrow Y$ on associe le toseur Z' de ses trivialisations (isomorphismes avec le revêtement trivial $Y \times \{1, \dots, d\}$). Ce dernier s'identifie à un ouvert fermé de $Z \times_Y Z \times_Y \dots \times_Y Z$ (d facteurs), et l'on a un revêtement étale $Z' \rightarrow Z$ de degré $(d-1)!$, induit par la première projection. Cette construction s'étend immédiatement à un 1-morphisme $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$ représentable, fini étale de degré d , de S -champs algébriques (voir plus loin pour une généralisation). De plus, le champ $\mathcal{Z}'$ obtenu est un espace algébrique (resp. un schéma, resp. un schéma affine) si $\mathcal{Z}$ a la même propriété, en raison de l'existence du revêtement étale $\mathcal{Z}' \rightarrow \mathcal{Z}$ mentionné ci-dessus ; que $\mathcal{Z}'$ soit un $\mathfrak{S}_d$ -torseur au-dessus de $\mathcal{Z}$ signifie alors que $\mathfrak{S}_d$ opère naturellement sur l'espace algébrique $\mathcal{Z}'$, et que $\mathcal{Z}$ s'identifie au champ quotient $[\mathcal{Z}'/\mathfrak{S}_d]$. Ceci achève de montrer que (i) implique (ii) (avec en fait $G = \mathfrak{S}_d$).

Montrons que (ii) implique (iii). Supposons donc que $\mathcal{X}' = [X'/G/S]$ comme en (ii). Le groupe G se plonge dans un S -schéma en groupes lisse de la forme $L = \mathbf{GL}_{n,S}$: considérons le produit contracté $X'' = X' \times^G L$ (quotient de $X' \times_S L$ par l'action de G donnée par $(x, \ell)g = (xg, g^{-1}\ell)$ si G opère à droite sur X'). On vérifie facilement que X'' est un espace algébrique (resp. un schéma, resp. un schéma affine) muni d'une action (à droite) de L , et que $[X''/L/S]$ s'identifie canoniquement à $\mathcal{X}'$. Les fibres géométriques de la projection naturelle $P : X'' \rightarrow \mathcal{X}'$ sont des schémas isomorphes à L , donc géométriquement connexes. Enfin, si U est un S -schéma semi-local et $x : U \rightarrow \mathcal{X}'$ un 1-morphisme, alors $U \times_{x, \mathcal{X}', P} X''$ est un $\mathbf{GL}_n$ -torseur sur U donc a une section, ce qui achève la démonstration. $\square$

Les théorèmes (6.2), (6.3) et (6.5) ci-dessous relèvent de techniques très similaires aux constructions de (6.1.3) ; faute de référence, ces techniques seront exposées au cours des sections suivantes.

THÉORÈME (6.2) (structure locale des champs de Deligne-Mumford). — Soient $\mathcal{X}'$ un S -champ de Deligne-Mumford, K un S -corps et $x : \text{Spec}(K) \rightarrow \mathcal{X}'$ un 1-morphisme. Alors il existe un diagramme 2-cartésien

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(K) & \longrightarrow & [X/G/S] \\ \text{Id}_{\text{Spec}(K)} \downarrow & \square & \downarrow \varphi \\ \text{Spec}(K) & \xrightarrow{x} & \mathcal{X}' \end{array}$$

où $X \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, G est un groupe fini opérant sur X et φ un 1-morphisme représentable, étale et séparé.

Pour la démonstration, voir (6.7).

Remarque (6.2.1) : (cf. [De-Ra]). Sous les hypothèses de (6.2), supposons en outre que K soit *séparablement clos*. On peut alors définir l'hensélisé strict de $\mathcal{X}'$ au point géométrique x comme l'hensélisé strict de n'importe quelle présentation étale $P : X \rightarrow \mathcal{X}'$ de $\mathcal{X}'$ munie d'un relèvement $\tilde{x}$ de x . On obtient ainsi un schéma strictement local $\mathcal{X}'_{(x)}$, dont le corps résiduel est la clôture séparable, dans K , du corps résiduel du point de X image de $\tilde{x}$ (on peut toujours supposer que X est un schéma). Le schéma $\mathcal{X}'_{(x)}$ est muni d'un 1-morphisme essentiellement étale vers $\mathcal{X}'$, et on laisse le lecteur vérifier que le tout est indépendant des choix, à isomorphisme canonique près. De plus, si x_1 et $x_2 \in \text{ob}(\mathcal{X}'_K)$, tout isomorphisme $\varphi : x_1 \xrightarrow{\sim} x_2$ dans $\mathcal{X}'_K$ induit un isomorphisme entre les deux flèches naturelles $\mathcal{X}'_{(x_1)} \rightarrow \mathcal{X}'$ et $\mathcal{X}'_{(x_2)} \rightarrow \mathcal{X}'$.

En particulier, le groupe fini $\text{Aut}(x)$ des automorphismes de x dans $\mathcal{X}'_K$ opère sur $\mathcal{X}'_{(x)}$ et le 1-morphisme canonique $\mathcal{X}'_{(x)} \rightarrow \mathcal{X}'$ se factorise par un 1-morphisme $[\mathcal{X}'_{(x)}/\text{Aut}(x)/S] \rightarrow \mathcal{X}'$ dont on vérifie aisément qu'il est représentable et séparé. $\square$

THÉORÈME (6.3) (existence de « voisinages lisses »). — Soient $\mathcal{X}'$ un S -champ algébrique, K un S -corps et $x : \text{Spec}(K) \rightarrow \mathcal{X}'$ un 1-morphisme. Alors il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow x_1 & \downarrow \varphi \\ \text{Spec}(K) & \xrightarrow{x} & \mathcal{X}' \end{array}$$

où X est un schéma affine et φ un 1-morphisme lisse.

Pour la démonstration, voir (6.7).

Remarque (6.3.1) : Le 1-morphisme φ de l'énoncé est automatiquement représentable et séparé : ceci résulte formellement du fait que X est un S -schéma séparé et que la diagonale $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}' \times_S \mathcal{X}'$ est représentable et séparée.

Remarque (6.3.2) : Même si $\mathcal{X}'$ est un champ de Deligne-Mumford, on ne peut pas en général, dans (6.3), choisir φ étale. Par exemple, soit Y le spectre d'un S -corps Ω algébriquement clos, muni de l'action triviale d'un groupe fini G , et soit $\mathcal{X}' = [Y/G/S]$. Alors les seuls 1-morphismes étales d'un S -schéma affine X vers $\mathcal{X}'$ sont sommes de 1-morphismes qui sont 2-isomorphes au

1-morphisme canonique de Y vers $\mathcal{X}'$ (remarquer que l'on a par composition un 1-morphisme étale $X \rightarrow \mathcal{X}' \rightarrow Y$). Le 1-morphisme x de l'énoncé ne peut se factoriser par un tel X que si le G -torseur sur $\text{Spec}(K)$ correspondant est trivial : on aura donc un contre-exemple en prenant pour K une extension non séparablement close de Ω et pour G le groupe de Galois d'une extension galoisienne non triviale de K .

Nous allons maintenant étendre en partie (6.1) et (6.1.1) aux champs algébriques généraux. Nous aurons besoin pour cela d'une définition :

DÉFINITION (6.4). — Soit $\pi : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{Y}$ un 1-morphisme représentable et lisse de S -champs algébriques, et soit d un entier ≥ 0 . On dit que π est équiconnexe (resp. d -équiconnexe) s'il peut se factoriser en $\mathcal{X}' \xrightarrow{f} \mathcal{Y}' \xrightarrow{g} \mathcal{Y}$ où f est représentable à fibres géométriquement connexes et où g est représentable, fini et étale (resp. fini étale de degré d).

Si de plus $\mathcal{Y}$ est un schéma et si y est un point de $\mathcal{Y}$, on dit que π est équiconnexe (resp. d -équiconnexe) au point y s'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de y dans $\mathcal{Y}$ tel que $\pi_{\mathcal{U}} : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U}$ soit équiconnexe (resp. d -équiconnexe).

(Ces notions seront étudiées plus en détail plus bas, cf (6.8) et (6.9)).

THÉORÈME (6.5) (existence générique d'une présentation à fibres géométriquement connexes). — Soit $\mathcal{X}'$ un S -champ algébrique. Il existe un ouvert dense $\mathcal{U}$ de $\mathcal{X}'$ et une famille dénombrable $(p_n : X_n \rightarrow \mathcal{U})_{n \geq 1}$ de 1-morphismes ayant les propriétés suivantes :

- (i) pour tout $n \geq 1$,
- (a) X_n est un espace algébrique,
- (b) p_n est lisse, surjectif, séparé, de type fini, à fibres géométriquement connexes ;
- (ii) pour tout anneau artimien K , tout 1-morphisme $\text{Spec}(K) \rightarrow \mathcal{U}$ se relève à l'un des X_n .

Si de plus il existe une présentation $P : X \rightarrow \mathcal{X}'$ de $\mathcal{X}'$ où P est équiconnexe, alors on peut ci-dessus prendre $\mathcal{U} = \mathcal{X}'$.

Pour la démonstration, voir (6.12). Noter cependant que lorsque $\mathcal{X}'$ est un champ de Deligne-Mumford, ce théorème résulte de (6.1.1).

Remarque (6.5.1) : Il n'est pas possible en général d'obtenir la propriété (6.5)(ii) avec un seul 1-morphisme $X \rightarrow \mathcal{U}$, plutôt qu'une famille dénombrable, même si l'on se limite à un corps K fixé. Par exemple, soient k un corps et A une variété abélienne sur k ; posons $S = \text{Spec}(k)$, et prenons pour $\mathcal{X}'$ le champ classifiant $B(A/k)$ (cf. (2.4.2)). Rappelons que si Y est un A -torseur sur un corps K , alors Y admet un point à valeurs dans une extension finie L de K , et qu'alors la classe de Y dans $H^1(K, A)$ est annulée

par $[L : K]$. Il est facile d'en déduire que si X est un k -espace algébrique noethérien (par exemple de type fini) et $p : X \rightarrow \mathcal{X}'$ un 1-morphisme, il existe $d \in \mathbb{N}^\times$ tel que, pour tout corps K et tout $x \in X(K)$, le toseur correspondant à $p(x)$ soit annulé par d dans $H^1(K, A)$. On conclut en observant qu'il arrive (par exemple si k est un corps de nombres) que $H^1(k, A)$ ait des éléments d'ordre arbitrairement grand.

Construction (6.6) (multisections d'un 1-morphisme) : Soient $\mathcal{X}'$ et $\mathcal{Y}$ deux S -champs, et $\pi : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{Y}$ un 1-morphisme représentable et séparé. Pour tout entier $d \geq 0$, notons $(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})^d$ le produit fibré $\mathcal{X}' \times_{\pi, \mathcal{Y}, \pi} \mathcal{X}' \times_{\pi, \mathcal{Y}, \pi} \cdots \times_{\pi, \mathcal{Y}, \pi} \mathcal{X}'$ (d facteurs).

Pour $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, la donnée d'un objet de $(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})^d_U$ équivaut à celles d'un $y \in \text{ob} \mathcal{Y}_U$, et de d sections $x_1, \dots, x_d$ du U -espace algébrique $X = \mathcal{X}' \times_{\pi, \mathcal{Y}, y} U$. On définit alors de façon évidente le sous-champ ouvert $\text{SEC}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$ de $(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})^d$, «complémentaire des diagonales» par la condition que $U \times_{x_i, X, x_j} U$ soit vide pour $i \neq j$. Bien entendu, que l'on obtienne un sous-champ ouvert résulte de l'hypothèse de séparation.

Le S -champ $(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})^d$ est muni d'une action naturelle du groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$, compatible avec la projection sur $\mathcal{Y}$. Il est prudent, et suffisant pour nos besoins, de définir cette notion comme la donnée, pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et tout $y : U \rightarrow \mathcal{Y}$, d'une action de $\mathfrak{S}_d$ sur le U -espace algébrique $X = (\mathcal{X}'/\mathcal{Y})^d \times_{\pi, \mathcal{Y}, y} U$, compatible à l'action triviale sur U , le tout étant compatible à tout changement de base $U' \rightarrow U$. Cette action respecte l'ouvert $\text{SEC}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$, et elle est libre, avec les notations ci-dessus, sur $\text{SEC}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y}) \times_{\pi, \mathcal{Y}, y} U$ (ceci aurait pu servir de définition pour $\text{SEC}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$).

On considère alors le champ quotient

$$\text{ET}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y}) = [\text{SEC}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})/\mathfrak{S}_d/S]$$

que l'on peut définir comme suit : pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, un objet de $\text{ET}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})_U$ est la donnée d'un 1-morphisme $y : U \rightarrow \mathcal{Y}$ et d'une section au-dessus de U de l'espace algébrique quotient de $\text{SEC}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y}) \times_{\pi, \mathcal{Y}, y} U$ par l'action libre de $\mathfrak{S}_d$ donnée ci-dessus : ainsi le 1-morphisme structural de $\text{SEC}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$ vers $\text{ET}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$ fait du premier champ un $\mathfrak{S}_d$ -torseur au-dessus du second. En particulier ce morphisme est représentable, fini et étale.

La formation des champs $\text{SEC}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$ et $\text{ET}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$ commute (à équivalence canonique près) à tout changement de base par un 1-morphisme $\mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Y}$.

Pour étudier commodément les champs $\text{SEC}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$, on peut procéder par récurrence sur $d : \text{SEC}_0(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$ (resp. $\text{SEC}_1(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$) s'identifie canoniquement à $\mathcal{Y}$ (resp. $\mathcal{X}'$), et, pour $d > 0$, on a un diagramme commutatif

$$(6.6.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{SEC}_d(\mathcal{X}/\mathcal{Y}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{SEC}_{d-1}(\mathcal{X}'/\mathcal{X}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{Y} & \xleftarrow{\pi} & \mathcal{X} \end{array}$$

où l'on a posé $\mathcal{X}' = \mathrm{SEC}_2(\mathcal{X}/\mathcal{Y})$ muni de la première projection sur $\mathcal{X}$ (laquelle est représentable et séparée) et où l'isomorphisme du haut envoie $(x_1, \dots, x_d)$ sur $((x_1, x_2), \dots, (x_1, x_d))$, en un sens que le lecteur précisera.

PROPOSITION (6.6.2). — *Les hypothèses et notations sont celles de (6.6) ci-dessus.*

(i) *Le morphisme naturel $\mathrm{SEC}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{Y}$ est représentable et séparé. Il est de plus localement de présentation finie (resp. de présentation finie, resp. universellement ouvert, resp. étale, resp. quasi-affine de type fini) si π l'est.*

(ii) *Si $\mathcal{X}$ est un espace algébrique (resp. un espace algébrique séparé), il en est de même de $\mathrm{SEC}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$ pour $d > 0$.*

(ii bis) *Si π est schématique et si $\mathcal{X}$ est un schéma (resp. un schéma séparé), il en est de même de $\mathrm{SEC}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$ pour $d > 0$.*

(iii) *On suppose que π est de type fini, et que la diagonale $\Delta_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y} \times \mathcal{Y}$ est représentable et quasi-affine (condition vérifiée en particulier lorsque $\mathcal{Y}$ est un champ de Deligne-Mumford). Alors, si $\mathcal{X}$ est un schéma quasi-affine, il en est de même de $\mathrm{SEC}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$ pour $d > 0$.*

Supposons de plus π universellement ouvert, et notons $U_d(\mathcal{X}/\mathcal{Y})$ le sous-champ de $\mathcal{Y}$ image de $\mathrm{SEC}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$, au sens de (3.7). Alors :

(iv) *Les $U_d(\mathcal{X}/\mathcal{Y})$ forment une suite décroissante d'ouverts de $\mathcal{Y}$.*

(v) *On suppose que $\mathcal{Y}$ est un champ algébrique quasi-compact, et que π est étale de présentation finie. Alors il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $U_d(\mathcal{X}/\mathcal{Y}) = \emptyset$. Si $\mathcal{X}$ n'est pas vide et si $n+1$ est le plus petit d ayant cette propriété, alors π est fini étale de degré n au-dessus de $U_n(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$.*

Preuve : On laisse (i) au lecteur (qui trouvera sans peine d'autres « resp... »). La condition « de type fini » jointe à « quasi-affine » sert à assurer que $\mathrm{SEC}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$ est quasi-compact sur $\mathcal{Y}$, condition nécessaire (par définition) pour qu'il soit quasi-affine sur $\mathcal{Y}$.

Pour (ii), on considère le diagramme (6.6.1) : si $\mathcal{X}$ est un espace algébrique (resp. un espace algébrique séparé), il en est de même de $\mathrm{SEC}_{d-1}(\mathcal{X}'/\mathcal{X})$ d'après la première assertion de (i) ; or celui-ci s'identifie à $\mathrm{SEC}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$. La preuve de (ii bis) est analogue.

Prouvons (iii). Supposant que $\mathcal{X}$ soit un schéma quasi-affine, montrons d'abord que π , sous les hypothèses envisagées, est un morphisme quasi-affine : il s'agit de voir que, pour tout $U \in \mathrm{ob}(\mathrm{Aff}/S)$ et $y \in \mathcal{Y}(U)$, l'espace algébrique $\mathcal{X} \times_{\pi, \mathcal{Y}, y} U$ est un schéma quasi-affine. Or ceci résulte du diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} \times_{\pi, \mathcal{Y}, y} U & \xrightarrow{j} & \mathcal{X}' \times_S U \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \mathcal{Y} & \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{Y}}} & \mathcal{Y} \times_S \mathcal{Y} \end{array}$$

qui montre que j est quasi-affine donc que $\mathcal{X}' \times_{\pi, \mathcal{Y}, y} U$ est un schéma quasi-affine puisque $\mathcal{X} \times_S U$ l'est. En particulier, $\mathcal{X}' \times_{\pi, \mathcal{Y}, \pi} \mathcal{X}$ est quasi-affine donc il en est de même de $\mathcal{X}' = \mathrm{SEC}_2(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$ qui en est un ouvert quasi-compact (parce que π est de type fini). On conclut alors comme dans (ii), en utilisant le diagramme (6.6.1) et le cas « quasi-affine de type fini » de (i).

(iv) est immédiat : le morphisme naturel $\mathrm{SEC}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{Y}$ est universellement ouvert puisque π l'est, et $\mathrm{SEC}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$ s'envoie dans $\mathrm{SEC}_{d-1}(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$.

On montre (v) en remarquant que si $Y \rightarrow \mathcal{Y}$ est lisse et surjectif, alors $U_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$ est l'image dans $\mathcal{Y}$ de $U_d(\mathcal{X}' \times_{\mathcal{Y}} Y/Y)$. On se ramène ainsi au cas où $\mathcal{Y}$ est un schéma quasi-compact, puis un schéma affine, puis un schéma noethérien (grâce au fait que π est de présentation finie). L'argument est alors standard, utilisant la décroissance des $U_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$. $\square$

PROPOSITION (6.6.3). — *Les hypothèses et notations sont celles de (6.6).*

(i) *Pour tout schéma T , la donnée d'un 1-morphisme $T \rightarrow \mathrm{ET}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$ équivaut à celle d'un 1-morphisme $T \rightarrow \mathcal{Y}$ et d'un sous-schéma Z de l'espace algébrique $T \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}'$, fini étale de degré d sur T . La donnée d'un relèvement d'un tel morphisme à $\mathrm{SEC}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$ équivaut à celle d'une trivialisation du revêtement étale $Z \rightarrow T$ correspondant (i.e. d'un T -isomorphisme de Y avec le revêtement trivial de T de fibre $\{1, \dots, d\}$).*

(ii) *Le morphisme structural $\mathrm{ET}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{Y}$ est représentable et séparé. Il est lisse (resp. étale) si π l'est. Si $\mathcal{X}$ est un espace algébrique et si $d > 0$, alors $\mathrm{ET}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$ est un champ de Deligne-Mumford.*

(iii) *Si π est fini étale de degré constant d , alors $\mathrm{ET}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Y}$.*

La preuve est laissée au lecteur. Pour l'assertion de représentabilité on remarque que si $\mathcal{Y}$ est un espace algébrique, $\mathcal{S}_d$ opère librement sur l'espace algébrique $\mathrm{SEC}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$, de sorte que $\mathrm{ET}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$ s'identifie à l'espace algébrique quotient $\mathrm{SEC}_d(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})/\mathcal{S}_d$. Pour la dernière assertion de (ii), cf. (6.6.2)(ii). $\square$

(6.7) Preuve de (6.2) et (6.3). Comme les énoncés eux-mêmes, cette preuve s'inspire de ([Kn] II, 6.4). Donnons-nous un S -champ algébrique $\mathcal{X}$, un S -corps K et un 1-morphisme $x : T = \mathrm{Spec}(K) \rightarrow \mathcal{X}$. Soit $P : X_1 \rightarrow \mathcal{X}$ une présentation de $\mathcal{X}$, telle que X_1 soit séparé sur S (par exemple somme de schémas affines). Posons $T_1 = X_1 \times_{P, \mathcal{X}, x} T$. Alors T_1 est non vide et il existe donc un ouvert affine X_2 de X_1 qui rencontre l'image de T_1 , d'où un diagramme 2-cartésien

$$\begin{array}{ccc}
T_2 & \longrightarrow & X_2 \\
\pi' \downarrow & \square & \downarrow \pi \\
T = \text{Spec}(K) & \xrightarrow{x} & \mathcal{X}
\end{array}$$

où T_2 est non vide et π lisse. Le morphisme représentable π est séparé (cf. remarque (6.3.1)). Comme K est un corps et T_2 un K -espace algébrique lisse, séparé et non vide, il existe une immersion fermée $\text{Spec}(L) \hookrightarrow T_2$, où L est une K -algèbre finie étale non nulle. Posons $d = [L : K]$: on a ainsi un point K -rationnel y de $\text{ET}_d(T_2/T)$ d'après (6.6.3)(i), ou, ce qui revient au même, un diagramme commutatif

$$(6.7.1) \quad \begin{array}{ccc}
& & \text{ET}_d(T_2/T) \\
& \nearrow x_1 & \downarrow \varphi \\
T & \xrightarrow{x} & \mathcal{X}
\end{array}$$

où φ est représentable, lisse et séparé.

(6.7.2) Prouvons maintenant (6.2). Si $\mathcal{X}$ est un champ de Deligne-Mumford, nous pouvons prendre P étale dans la construction ci-dessus : alors les flèches π , π' et φ sont aussi étales, on a $\text{ET}_d(X_2/\mathcal{X}) = [\text{SEC}_d(X_2/\mathcal{X})/\mathfrak{S}_d/S]$, et il résulte de (6.6.2)(iii) que $\text{SEC}_d(X_2/\mathcal{X})$ est un schéma quasi-affine. De plus comme T_2 est même un K -espace algébrique étale, séparé et non vide, il est affine et on peut prendre $L = \Gamma(T_2, \mathcal{O}_{T_2})$ de sorte que $\text{ET}_d(T_2/T)$ s'identifie à T . Enfin x_1 correspond à un ensemble fini $\mathfrak{S}_d$ -invariant de points de $\text{SEC}_d(X_2/\mathcal{X})$, qui est donc contenu dans un ouvert affine $\mathfrak{S}_d$ -invariant, d'où le résultat en prenant pour X ledit ouvert et pour G le groupe $\mathfrak{S}_d$. $\square$

(6.7.3) Prouvons (6.3) : revenant au diagramme (6.7.1), on observe que $\text{ET}_d(X_2/\mathcal{X})$ est un champ de Deligne-Mumford d'après (6.6.3)(ii), ce qui nous ramène (remplaçant $\mathcal{X}$ par $\text{ET}_d(X_2/\mathcal{X})$) au cas où $\mathcal{X}$ est un champ de Deligne-Mumford, et même, en vertu de (6.2) déjà démontré, au cas où $\mathcal{X}$ est de la forme $[X_1/G/S]$ où G est un groupe fini opérant sur un S -schéma affine X_1 . La conclusion résulte alors de (6.1)(iii). $\square$

Construction (6.8) (composantes des fibres d'un morphisme lisse). : Soient X et Y deux schémas, et $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme lisse de type fini. Étant donnés deux points x et y de X à valeurs dans un Y -schéma T , disons que x et y sont équivalents si, pour tout point ξ de T à valeurs dans un corps k algébriquement clos, les points $x \circ \xi$ et $y \circ \xi$ de $X(k)$ sont dans la même composante connexe du k -schéma lisse X_ξ . Il s'agit évidemment d'une relation d'équivalence sur X , qui est représentable par un sous-schéma ouvert

R de $X \times_Y X$: ceci résulte en effet de ([EGA] IV, 15.6.5) appliqué à l'une quelconque des projections canoniques de $X \times_Y X$ sur X , l'ouvert en question étant formé des composantes des fibres de cette projection le long de la section diagonale.

Nous noterons $\pi_0(X/Y)$ le faisceau quotient de X par R . Il a les propriétés suivantes, dont nous laissons la preuve au lecteur :

(6.8.1) (i) $\pi_0(X/Y)$ est un espace algébrique étale et localement séparé sur Y ;

(ii) pour tout point géométrique ξ de Y , $\pi_0(X/Y)(\xi)$ s'identifie à l'ensemble des composantes connexes de X_ξ ;

(iii) le Y -morphisme canonique $X \rightarrow \pi_0(X/Y)$ est lisse à fibres géométriquement irréductibles ; c'est un isomorphisme si (et seulement si) X est étale sur Y ;

(iv) la formation de $\pi_0(X/Y)$ commute à tout changement de base $Y' \rightarrow Y$;

(v) si $\pi_0(X/Y)$ est séparé sur Y , c'est un schéma ;

(vi) pour que π soit équiconnexe (resp. d -équiconnexe) (cf. (6.4)) il faut et il suffit que $\pi_0(X/Y)$ soit un Y -schéma fini (resp. fini de rang d).

(Pour (i), considérer un sous-schéma de X , étale sur Y et rencontrant toutes les composantes des fibres ; pour (v), invoquer (A.2)).

À propos de (v), on notera que la condition « $\pi_0(X/Y)$ est séparé sur Y » équivaut à « l'ouvert R de $X \times_Y X$ est un fermé ». Le lecteur méditera l'exemple suivant :

$$Y = \text{Spec}(\mathbb{R}[T]),$$

X = l'ouvert de Y -lissité de $X' = \text{Spec}(\mathbb{R}[T, U, V])/(U^2 + V^2 - T)$, complémentaire du point correspondant à l'idéal (T, U, V) .

Le critère (vi) éclaire la notion d'équiconnexité :

PROPOSITION (6.9). — *Les hypothèses et notations sont celles de (6.8).*

(i) Pour que π soit équiconnexe (resp. d -équiconnexe) au point $y \in Y$, il faut et il suffit que $\pi_{Y'} : X \times_Y Y' \rightarrow Y'$ soit équiconnexe (resp. d -équiconnexe), où l'on a posé $Y' = \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$.

(ii) Pour que π soit équiconnexe (resp. d -équiconnexe), il faut et il suffit qu'il le soit en tout point $y \in Y$.

(iii) Soit $q : T \rightarrow Y$ un morphisme plat. Pour que $\pi_T : X \times_Y T \rightarrow T$ soit (d -)équiconnexe en $t \in T$, il faut et il suffit que π soit (d -)équiconnexe en $q(t)$.

(iv) Il existe un plus grand ouvert de Y , noté $\text{Eqc}(\pi)$, ou $\text{Eqc}(X/Y)$, (resp. $\text{Eqc}_d(\pi)$, ou $\text{Eqc}_d(X/Y)$) au-dessus duquel π est équiconnexe (resp. d -équiconnexe). La formation de ces ouverts commute à tout changement de base plat ; de plus, $\text{Eqc}(\pi)$ est dense dans Y , et est réunion disjointe des $\text{Eqc}_d(\pi)$ ($d \geq 0$).

Preuve : (i) Le «il faut» est trivial. Pour montrer la réciproque, on se ramène au cas où Y est affine et l'on applique le théorème de passage à la limite ([EGA] IV, 8.10.5) à l'immersion $R \rightarrow X \times_Y X$: on en déduit que $\pi_0(X/Y)$ est séparé au-dessus d'un voisinage de y . On est ainsi ramené (à cause de (6.8.1)(v)) au cas bien connu où $\pi_0(X/Y)$ est un Y -schéma séparé.

(ii) est conséquence immédiate de (6.8.1)(vi), et (iii) résulte de (i).

(iv) Il suffit de définir $\text{Eqc}(\pi)$ (resp. $\text{Eqc}_d(\pi)$) comme l'ensemble des $y \in Y$ tels que π soit équiconnexe (resp. d -équiconnexe) en y . C'est par définition un ouvert de Y ; il résulte de (ii) que c'est le plus grand au-dessus duquel π est équiconnexe (resp. d -équiconnexe). L'assertion sur le changement de base résulte de (iii). Enfin, on voit facilement que lorsque Y est réduit à un point, π est équiconnexe ; dans le cas général il en résulte d'après (i) que $\text{Eqc}(\pi)$ contient les points maximaux de Y , d'où la densité. $\square$

DÉFINITION (6.10). — Soient $\pi : X \rightarrow Y$ comme en (6.8), Z un sous-schéma de présentation finie de X , et r un entier. On dit que Z est r -équiréparti (dans X , relativement à Y) si le morphisme composé $Z \rightarrow X \rightarrow \pi_0(X/Y)$ est fini localement libre de rang r .

(6.10.1) (démonstrations laissées au lecteur). Si Z est r -équiréparti, il est automatiquement plat et quasi-fini sur Y ; en fait nous supposons dans ce qui suit que Z est *étale et séparé* sur Y (donc aussi sur $\pi_0(X/Y)$). Dans ce cas, Z est r -équiréparti si et seulement si, pour tout point géométrique ξ de Y et toute composante C de X_ξ , on a $\text{Card}(Z_\xi \cap C) = r$. D'autre part il existe un plus grand ouvert de Y , noté $\text{Eqrep}_r(Z/X/Y)$, au-dessus duquel Z est r -équiréparti. La formation de ces ouverts commute au changement de base plat. Si l'on suppose de plus que X est d -équiconnexe sur Y , alors $\text{Eqrep}_r(Z/X/Y)$ est simplement l'ensemble des $y \in Y$ tels que, pour tout $p \in \pi_0(X/Y)$ au-dessus de y , la fibre de Z en p soit de degré r sur $\kappa(p)$. Par suite la formation de $\text{Eqrep}_r(Z/X/Y)$, dans ce cas, commute à tout changement de base (et, bien entendu, Z est fini étale de degré rd au-dessus de $\text{Eqrep}_r(Z/X/Y)$).

(6.11) Soit maintenant $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme lisse, séparé, de type fini et d -équiconnexe, avec $d \geq 1$. En particulier π est surjectif, et nous supposons de plus que ses fibres sont partout de dimension ≥ 1 . Soit r un entier > 0 , et posons $E_r = E\Gamma_{rd}(X/Y)$ (cf. (6.6)). On dispose d'un sous-espace algébrique universel Z_r de $X \times_Y E_r$, fini étale de degré rd sur E_r . Désignons alors par $V_r(X/Y) \subset E_r$ l'ouvert $\text{Eqrep}_r(Z_r/X \times_Y E_r/E_r)$ de E_r . Vu la propriété de changement de base énoncée dans (6.10.1) ci-dessus, pour tout Y -schéma T , $V_r(X/Y)(T)$ s'identifie à l'ensemble des sous-schémas de $X \times_Y T$, finis étales sur T et r -équirépartis dans $X \times_Y T$.

PROPOSITION (6.11.1). — Les hypothèses et notations sont celles de (6.11).

(i) Le morphisme naturel $V_r(X/Y) \rightarrow Y$ est surjectif, lisse, séparé et à fibres géométriquement connexes.

(ii) On suppose que Y est le spectre d'un anneau artinien. Il existe un entier $r_0 \geq 1$ tel que, pour tout r multiple de r_0 , $V_r(X/Y)$ ait une section au-dessus de Y .

Preuve : (i) Le morphisme en question est lisse et séparé en vertu de (6.6.3)(ii). La surjectivité résulte aisément de l'hypothèse sur la dimension des fibres de π . Pour la connexité, on peut supposer que Y est le spectre d'un corps algébriquement clos k . Notons $\Sigma = \pi_0(X)$ l'ensemble des composantes connexes de X . Alors $\pi_0(\text{SEC}_{rd}(X/Y))$ s'identifie à l'ensemble des applications de $\{1, \dots, rd\}$ dans Σ , et $V_r(X/Y)$ est l'image dans $E\Gamma_{rd}(X/Y)$ de la réunion des composantes connexes de $\text{SEC}_{rd}(X/Y)$ correspondant aux applications dont toutes les fibres ont r éléments. Notre assertion résulte alors du fait que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_{rd}$ opère transitivement sur ces applications.

(ii) La lissité établie ci-dessus montre que l'on peut supposer Y réduit. Dans ce cas, Y est somme d'un nombre fini de schémas $\text{Spec}(k_i)$, où les k_i sont des corps, et il suffit donc de prouver (ii) lorsque Y est le spectre d'un corps k , ce que nous supposons désormais.

Supposons d'abord, en outre, que $d = 1$, i.e. que X est géométriquement connexe sur k . Il s'agit de voir que X admet, pour r multiple de r_0 convenable, un sous-schéma étale sur k de degré r . Remplaçant X par un ouvert non vide, on peut supposer qu'il existe un k -morphisme fini étale $p : X \rightarrow U$ où U est un ouvert de $\mathbb{A}_k^n$ (avec $n = \dim X \geq 1$). Si k est infini, $U(k)$ est infini et on peut prendre $r_0 = \deg p$. Sinon, il existe r_1 tel que U ait au moins un point en chaque degré multiple de r_1 (pour le voir, choisir une droite D de $\mathbb{A}_k^n$ rencontrant U et prendre r_1 supérieur au degré de tous les points de $D - U$). Il suffit alors de prendre $r_0 = r_1 \deg p$.

Sans hypothèse sur d , il suffit d'appliquer le cas $d = 1$ au morphisme naturel de X vers $E := \pi_0(X/Y)$: pour chacun des points s_j ($j = 1, \dots, e$) de E le cas précédent fournit un entier r_j , et il suffit de prendre pour r_0 le ppcm des r_j . $\square$

(6.12) *Preuve de (6.5) :* Les notions introduites ci-dessus (π_0 , équirépartition, etc.) s'étendent sans difficulté au cas d'un morphisme *représentable et lisse* de S -champs algébriques : on utilisera librement ces généralisations. Avec les hypothèses de (6.5), nous pouvons notamment appliquer (6.9)(iv) à une présentation de $\mathcal{X}$: ceci nous ramène à montrer le théorème, avec $\mathcal{U} = \mathcal{X}$, dans le cas où $\mathcal{X}$ admet une présentation $P : X \rightarrow \mathcal{X}$ d -équiconnexe, avec $d \geq 1$ convenable. On supposera de plus, quitte à remplacer X par $X \times_S \mathbb{A}_S^1$ par exemple, que les fibres de P sont de dimension ≥ 1 .

Pour $n \geq 1$, considérons $V_n(X/\mathcal{X})$ (cf. (6.11)) et notons $q_n : V_n(X/\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{X}$ le 1-morphisme naturel. La famille $(q_n)_{n \geq 1}$ possède les propriétés (i)(b) et (ii) du théorème, comme il résulte de (6.11.1). Par contre, $V_n(X/\mathcal{X})$ n'est pas en général représentable ; toutefois, c'est un ouvert du

champ quotient $\mathrm{ET}_{rd}(X/\mathcal{K}) = [\mathrm{SEC}_{rd}(X/\mathcal{K})/\mathfrak{S}_{nd}/S]$, et $\mathrm{SEC}_{rd}(X/\mathcal{K})$ est un espace algébrique par (6.6.2)(ii). Ainsi, $V_n(X/\mathcal{K})$ vérifie la propriété (ii) du théorème (6.1). La propriété (iii) de loc. cit. nous donne alors un espace algébrique X_n et un 1-morphisme $r_n : X_n \rightarrow V_n(X/\mathcal{K})$, et il est immédiat que la famille des $p_n = q_n \circ r_n : X_n \rightarrow \mathcal{K}$ convient. $\square$

7. Critères valuatifs ; morphismes universellement fermés, morphismes séparés, morphismes propres

PROPOSITION (7.1) (critère de spécialisation). — Soient $\mathcal{K}$ un S -champ algébrique, x et y deux points de $\mathcal{K}$. On suppose que y est une spécialisation de x dans $|\mathcal{K}|$, et l'on fixe des représentants $j : \mathrm{Spec}(K) \rightarrow \mathcal{K}$ de x et $i : \mathrm{Spec}(k) \rightarrow \mathcal{K}$ de y . Alors il existe un diagramme 2-commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Spec}(K') & \xrightarrow{j'} & X & & \\ \downarrow & \square & \downarrow \pi & \nearrow i' & \\ \mathrm{Spec}(K) & \xrightarrow{j} & \mathcal{K} & \xleftarrow{i} & \mathrm{Spec}(k) \end{array}$$

avec les propriétés suivantes :

- (i) X est un schéma affine, et π est lisse ;
- (ii) K' est un corps, extension de type fini et séparable de K ;
- (iii) l'image de i' est une spécialisation de l'image de j' dans $|X|$.

Preuve : On construit X , π et i' en appliquant à i le théorème (6.3) (existence de voisinages lisses). La condition (i) est satisfaite. Comme π est générissant d'après (5.7.1) (ou (5.8)), x se relève dans X en une générisation x' du point y' de $|X|$ défini par i' . Considérons le 1-morphisme naturel

$$p : Z := \mathrm{Spec}(K) \times_{j, \mathcal{K}, \pi} X \rightarrow X.$$

Alors, d'après (5.4)(iv), x' se relève en un point x'' de Z , qui est un K -espace algébrique lisse de type fini. Soit Z' un schéma étale et surjectif sur Z ; il existe un point maximal η de Z' dont l'image dans Z est une générisation de x'' . Il suffit alors de prendre pour K' le corps résiduel de η et pour j' le morphisme évident : les conditions (iii) et (iv) résultent du choix de η et du fait que Z' est un K -schéma lisse. $\square$

PROPOSITION (7.1.1) (critère de spécialisation, cas des champs de Deligne-Mumford). — Soient $\mathcal{K}$ un S -champ de Deligne-Mumford, x et y deux points de $\mathcal{K}$. On suppose que y est une spécialisation de x dans $|\mathcal{K}|$, et l'on fixe des représentants $j : \mathrm{Spec}(K) \rightarrow \mathcal{K}$ de x et $i : \mathrm{Spec}(k) \rightarrow \mathcal{K}$ de y . Alors il existe un diagramme 2-commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Spec}(K') & \xrightarrow{j'} & X & \xleftarrow{i'} & \mathrm{Spec}(k') \\
\downarrow & \square & \downarrow \pi & & \downarrow \\
\mathrm{Spec}(K) & \xrightarrow{j} & \mathcal{X} & \xleftarrow{i} & \mathrm{Spec}(k)
\end{array}$$

avec les propriétés suivantes :

- (i) X est un schéma affine, et π est étale ;
- (ii) K' (resp. k') est un corps, extension finie et séparable de K (resp. k) ;
- (iii) l'image de i' est une spécialisation de l'image de j' dans $|X|$.

Preuve : On part d'un morphisme étale π d'un schéma affine X vers $\mathcal{X}$, tel que y se relève dans $|X|$; le reste est laissé au lecteur, qui exploitera comme ci-dessus le fait que π est générissant. $\square$

(7.2) La proposition (7.2.1) ci-dessous et sa variante noethérienne (7.2.2) sont le point de départ des « critères valuatifs » qui vont suivre ; elles généralisent respectivement ([EGA] I, 5.5.2) et (I, 5.5.3).

PROPOSITION (7.2.1). — Soit $F : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{Y}$ un 1-morphisme de S -champs algébriques (resp. de S -champs de Deligne-Mumford) ; soient x un point de $|\mathcal{X}'|$, y son image dans $|\mathcal{Y}|$, y' une spécialisation de y dans $|\mathcal{Y}|$. Fixons de plus un représentant $j : \mathrm{Spec}(K) \rightarrow \mathcal{X}'$ de x . Alors il existe une extension K' de K et un diagramme 2-commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Spec}(K') & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(K) & \xrightarrow{j} & \mathcal{X}' \\
\downarrow & & & & \downarrow F \\
\mathrm{Spec}(R) & \xrightarrow{\quad h \quad} & & & \mathcal{Y}
\end{array}$$

avec les propriétés suivantes :

- (i) R est un anneau de valuation de corps des fractions K' ;
 - (ii) l'image par h du point fermé de $\mathrm{Spec}(R)$ est y' ;
- et en outre l'une des propriétés suivantes :
- (iii) K' est une extension de type fini (resp. finie) et séparable de K ;
 - (iii bis) R est complet à corps résiduel algébriquement clos.

Preuve : (Bien entendu, les flèches non nommées du diagramme sont censées être les flèches évidentes). Appliquons (7.1) (resp. (7.1.1)) aux deux points y et y' de $\mathcal{Y}$ (avec $F \circ j : \mathrm{Spec}(K) \rightarrow \mathcal{Y}$ comme représentant de y). On obtient un 1-morphisme lisse (resp. étale) d'un schéma affine Y vers $\mathcal{Y}$ et des relèvements de y et y' à Y , celui de y étant donné par un morphisme $\mathrm{Spec}(K') \rightarrow Y$ où K' vérifie (iii). On voit donc que l'on peut remplacer $\mathcal{Y}$ par

Y , $\mathcal{X}'$ par le produit fibré $Y \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}'$, y et y' par leurs relèvements dans Y , K par K' et x par le point image du morphisme canonique $\mathrm{Spec}(K') \rightarrow Y \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}'$ pour se ramener au cas où $\mathcal{Y}$ est un schéma. Mais il est clair que l'on peut aussi remplacer $\mathcal{X}'$ par un schéma lisse sur $\mathcal{X}'$ dont l'image contient le point x (quitte, si l'on veut, à remplacer K par une extension finie séparable, mais ce n'est même pas nécessaire, cf (6.3)). Nous sommes donc ramenés au cas d'un morphisme de schémas. Dans le cas particulier où K est le corps résiduel de x , la proposition (avec $K' = K$ pour (iii)) n'est autre que ([EGA] I, 5.5.2) ; le cas général s'en déduit aisément en remarquant, pour (iii), que tout anneau local contenu dans K est dominé par un anneau de valuation de corps des fractions K , et, pour (iii bis), que tout anneau de valuation est dominé par un anneau de valuation complet à corps résiduel algébriquement clos. $\square$

PROPOSITION (7.2.2). — Sous les hypothèses de (7.2.1), on suppose de plus que $\mathcal{Y}$ est localement noethérien et que F est localement de type fini. Alors il existe une extension K' de K et un diagramme 2-commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Spec}(K') & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(K) & \xrightarrow{j} & \mathcal{X}' \\
\downarrow & & & & \downarrow F \\
\mathrm{Spec}(R) & \xrightarrow{\quad h \quad} & & & \mathcal{Y}
\end{array}$$

avec les propriétés suivantes :

- (i) R est un anneau de valuation discrète contenu dans K' ;
 - (ii) l'image par h du point fermé de $\mathrm{Spec}(R)$ est y' ;
- et en outre l'une des propriétés suivantes :
- (iii) K' est une extension de type fini (resp. finie) et séparable de K ;
 - (iii bis) R est complet à corps résiduel algébriquement clos.

Preuve : C'est essentiellement la même que précédemment ; on invoque à la fin ([EGA] I, 5.5.3) au lieu de (I, 5.5.2) (noter aussi que l'on n'exige plus que le corps des fractions de R soit K' : c'est le prix à payer pour obtenir un anneau de valuation discrète). $\square$

Remarque (7.2.3) : Dans le cas particulier où $\mathcal{X}' = \mathcal{Y}$ et où $F = \mathrm{Id}_{\mathcal{X}'}$, on obtient un « critère valuatif de spécialisation » que nous laissons au lecteur le soin d'explicitier. Même dans ce cas, si $\mathcal{X}'$ n'est pas un champ de Deligne-Mumford, il n'est pas toujours possible dans (iii) d'exiger que K' soit une extension finie de K , comme le montre l'exemple suivant. Soit $S = \mathrm{Spec}(k)$, où k est un corps, et soit $\mathcal{X}' = [X/G/S]$ avec $X = \mathbb{A}_k^n$ ($n > 0$) et $G = \mathbf{GL}_{n,k}$ opérant de façon naturelle sur X (cf. (2.4.2), (3.4.2)). Le 1-morphisme naturel $X \rightarrow \mathcal{X}'$ est une présentation de $\mathcal{X}'$, et $\mathcal{X}'$ a deux points distincts ; l'image y de l'origine, et l'image x de tous les autres points de X . Bien entendu, y est une spécialisation de x , mais x admet des représentants « k -rationnels », i.e. de la forme $\mathrm{Spec}(k) \rightarrow \mathcal{X}'$, alors que le corps des fractions d'un anneau de valuation non trivial contenant k n'est jamais une extension finie de k .

THÉOREME (7.3) (critère valuatif pour les morphismes universellement fermés). — Soit $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un 1-morphisme quasi-compact de S -champs algébriques. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) F est universellement fermé (5.5) ;
- (ii) pour tout anneau de valuation R , tout diagramme 2-commutatif

$$(7.3.1) \quad \begin{array}{ccc} U = \operatorname{Spec}(K) & \xrightarrow{u} & \mathcal{X} \\ i \downarrow & & \downarrow F \\ V = \operatorname{Spec}(R) & \xrightarrow{v} & \mathcal{Y} \end{array}$$

où K est le corps des fractions de R et i le monomorphisme canonique, se prolonge en un diagramme 2-commutatif

$$(7.3.2) \quad \begin{array}{ccccc} U' = \operatorname{Spec}(K') & \longrightarrow & U & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow i' & \nearrow & \downarrow & & \downarrow F \\ V' = \operatorname{Spec}(R') & \longrightarrow & V & \longrightarrow & \mathcal{Y} \end{array}$$

où K' est une extension de K , et R' un anneau de valuation de corps des fractions K' et dominant R ;

- (iii) comme (ii), où l'on suppose que R est complet à corps résiduel algébriquement clos ;
- (iv) comme (ii), où l'on exige de plus que K' soit une extension de type fini et séparable de K .

Si de plus $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont des champs de Deligne-Mumford, ces conditions sont encore équivalentes à :

- (iv bis) comme (ii), où l'on exige de plus que K' soit une extension finie séparable de K .

Preuve : Les implications (iv bis) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) sont triviales.

Montrons que (iii) implique (i) : il est immédiat que la condition (iii) est préservée par tout changement de base, de sorte qu'il suffit, supposant (iii), de montrer que F est fermé. Nous allons utiliser pour cela le critère (5.7.3)(ii) ; soit donc x un point de $|\mathcal{X}|$, et soit $y' \in |\mathcal{Y}|$ une spécialisation de $y = F(x)$. D'après (7.2.1), il existe alors un diagramme du type (7.3.1), où u représente x , et où l'image par $|v|$ du point fermé de V est y' (l'image du point générique étant automatiquement y), et où, en outre, R est complet à corps résiduel algébriquement clos. L'hypothèse (iii) implique alors l'existence d'un diagramme (7.3.2) où x (resp. y') est encore l'image de $|U'|$ dans $|\mathcal{X}|$ (resp. du point fermé de V' dans $|\mathcal{Y}|$). L'image du point fermé de V' dans $|\mathcal{X}|$

par le relèvement (flèche oblique) est donc une spécialisation de x d'image y' , d'où la conclusion par (5.7.3).

Montrons maintenant que (i) implique (iv), et même (iv bis) si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont des champs de Deligne-Mumford : supposons F universellement fermé, et considérons le diagramme (7.3.1). On peut, par changement de base, supposer que $\mathcal{Y} = V$; il existe alors, d'après (5.7.3), une spécialisation $x' \in |\mathcal{X}|$ de l'image de x de $|u|$, au dessus du point fermé de $\mathcal{Y}$. La conclusion résulte alors de (7.2.1). $\square$

Remarque (7.3.3) : Plus généralement, la condition (iv bis) est équivalente aux autres chaque fois que le morphisme F est «relativement de Deligne-Mumford» au sens suivant : pour tout $U \in \operatorname{ob}(\operatorname{Aff}/S)$ et tout $y \in \operatorname{ob} \mathcal{Y}_U$, le S -champ algébrique $U \times_{y, \mathcal{X}, F} \mathcal{X}$ est un champ de Deligne-Mumford.

Remarques (7.4) : Nous allons dans la suite préciser de diverses manières le critère ci-dessus :

(1) On sait qu'il n'est pas en général possible (contrairement au cas des morphismes de schémas, cf. ([EGA] I, 5.5.8) de prendre $R' = R$ dans l'assertion (ii) de (7.3) ; un exemple célèbre est celui du «théorème de réduction semi-stable» qui peut s'interpréter en disant que le champ $\mathcal{M}_g$ des courbes stables de genre donné g est propre sur $\mathbb{Z}$ ([De-Mu], 5.2), bien qu'une courbe stable sur le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète R ne se prolonge pas toujours en une R -courbe stable. On verra ci-dessous (7.4)(3)(i) un exemple plus élémentaire.

(2) Un exemple important où l'on peut prendre $R' = R$ est celui des morphismes *représentables et séparés*, ou, ce qui revient au même, celui des morphismes séparés d'espaces algébriques : cf. (7.5).

(3) Donnons maintenant quelques exemples, où nous utiliserons épisodiquement les notions de propreté et de séparation qui seront vues plus bas. On prend $S = \operatorname{Spec}(R)$, où R est un anneau de valuation discrète, de corps des fractions K et de corps résiduel k ; nos exemples seront des S -champs algébriques de type fini et universellement fermés $\mathcal{X}$, le morphisme structural étant de plus fidèlement plat et induisant un *isomorphisme* $\mathcal{X}_K \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec}(K)$.

(i) Soit $\pi' : S' = \operatorname{Spec}(R') \rightarrow S = \operatorname{Spec}(R)$ un morphisme fini de degré 2, où R' est un anneau de valuation discrète de corps des fractions K' séparable sur K . Le groupe de Galois $G = \{1, \sigma\}$ de K' sur K opère sur S' . Soit alors $\mathcal{X} = [S'/G/S]$ le champ quotient au sens de (2.4.2) ; on verra en (10.13.1) que c'est bien un S -champ algébrique mais il est facile de vérifier ici que $\mathcal{X}$ est même un champ de Deligne-Mumford, le 1-morphisme naturel $P : S' \rightarrow \mathcal{X}$ étant une présentation étale de $\mathcal{X}$. On en déduit que $F : \mathcal{X} \rightarrow S$ est bien de type fini, universellement fermé (car π l'est) et séparé (cf. (7.6) plus bas) car l'action de G sur S' est propre. De plus comme π fait de $\operatorname{Spec}(K')$ un G -torseur sur $\operatorname{Spec}(K)$, $\mathcal{X}_K$ s'identifie à $\operatorname{Spec}(K)$.

Si π est étale (c'est-à-dire si R' est non ramifié sur R), on a simplement $\mathcal{X} \cong S$. Inversement, supposons que F a une *section* s : alors le produit fibré

$S' \times_{P, \mathcal{X}, s} S$ est un S -schéma fini étale (parce que P est représentable, fini et étale) admettant un S -morphisme vers S' , ce qui n'est possible que si π est étale. En conclusion, si R' est ramifié sur R , F est un 1-morphisme propre avec une section sur $\text{Spec}(K)$ qui ne se prolonge pas à S . (Bien entendu, F admet une section sur S' , déduite de P).

(ii) Reprenons $\pi : S' \rightarrow S$ comme ci-dessus, en supposant cette fois que π est étale et que $k \otimes_R R'$ est un corps k' , extension quadratique de k . Le S -schéma $S' \times_S S' = \text{Spec}(R' \otimes_R R')$ est alors somme de deux sous-schémas ouverts et fermés dont l'un est la diagonale, canoniquement isomorphe à S' , et l'autre, disons Γ , est le graphe de la S -involution σ de S' . Soit $Z \subset S' \times_S S'$ l'ouvert complémentaire (dans $S' \times_S S'$) du point fermé de Γ . Alors Z est une S -relation d'équivalence étale sur S' . On peut donc former l'espace algébrique quotient Y : il est de type fini et universellement fermé sur S (parce que S' l'est) et sa fibre générique Y_K s'identifie à $\text{Spec}(K)$, mais l'unique S -section de Y au dessus de $\text{Spec}(K)$ ne se prolonge pas en une section sur S puisque la fibre fermée Y_k est S -isomorphe à $\text{Spec}(k')$. (Noter que dans cet exemple, Y est localement séparé sur S puisque la relation d'équivalence Z est ouverte; en prenant R' ramifié sur R , le lecteur pourra s'amuser à fabriquer un exemple similaire mais non localement séparé).

Cet exemple montre que, contrairement au cas des schémas, l'hypothèse de séparation mentionnée en (2) est essentielle même pour les espaces algébriques.

(4) En ce qui concerne la partie «(ii)⇒(i)» de (7.3), on aimerait se limiter dans (ii) aux anneaux R et R' qui sont des anneaux de valuation discrète, pourvu que $\mathcal{Y}$ soit supposé localement noethérien et F de type fini (comme pour le cas des schémas, cf. ([EGA] II, 7.3.8); cette possibilité pour les champs de «courbes stables» est par exemple utilisée dans [De-Mu]). Supposant que $\mathcal{Y} = Y$ est un schéma noethérien – cas auquel on peut facilement se ramener – il suffirait pour cela (c'est la méthode des EGA) de montrer que f est universellement fermé dès que le morphisme déduit de f par tout changement de base $Y' \rightarrow Y$, avec Y' noethérien, est fermé. Voir (7.10) pour un énoncé précis, ainsi que la remarque (7.11.2) et la proposition (7.12). $\square$

Passons au problème de la «réduction de l'extension K' » dans (7.3), en commençant par le cas *représentable* :

THÉORÈME (7.5) (critère valuatif, cas représentable et séparé). — Soit $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un 1-morphisme représentable, quasi-compact et séparé de S -champs algébriques. Considérons les conditions suivantes :

- (i) F est universellement fermé;
- (ii) pour tout $V = \text{Spec}(R) \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, où R est un anneau de valuation, de point générique $U = \text{Spec}(K)$, le foncteur naturel $\mathcal{X}_V \rightarrow \mathcal{X}_U \times_{\mathcal{Y}_U} \mathcal{Y}_V$ est une équivalence de catégories;
- (ii bis) même condition que (ii), restreinte aux anneaux de valuation R complets à corps résiduel algébriquement clos;

(ii ter) même condition que (ii), restreinte aux anneaux de valuation discrète R complets à corps résiduel algébriquement clos.

Alors on a (i)⇔(ii)⇔(ii bis)⇔(ii ter), et les quatre conditions sont équivalentes si $\mathcal{Y}$ est localement noethérien et F est de type fini.

Preuve : Il est trivial que (ii)⇒(ii bis)⇒(ii ter). Il résulte de (7.3) que (ii bis) implique (i) (la condition (ii) de (7.3) est même satisfaite avec $R' = R$).

Pour voir que (i) implique (ii), remarquons d'abord que le foncteur envisagé dans (ii) est de toute façon *pleinement fidèle*, vu l'hypothèse sur F et le critère valuatif de séparation (A.3). Supposons maintenant (i) vérifiée et montrons que ce foncteur est essentiellement surjectif. Le problème se ramène, en appliquant (7.3), à la question suivante : on a un diagramme 2-commutatif

$$(7.5.1) \quad \begin{array}{ccccc} U' = \text{Spec}(K') & \xrightarrow{\pi'} & U & \xrightarrow{u} & \mathcal{X} = X \\ \downarrow i' & & \downarrow i & \nearrow h & \downarrow F \\ V' = \text{Spec}(R') & \xrightarrow{\pi} & V & \xrightarrow{\text{Id}} & V \end{array}$$

où l'on a remplacé $\mathcal{Y}$ par V par changement de base, et où :

- $\mathcal{X} = X$ est un espace algébrique (puisque F est représentable);
- $U = \text{Spec}(K)$ et $V = \text{Spec}(R)$ où R est un anneau de valuation et K son corps des fractions;
- R' est un anneau de valuation dominant R , et K' son corps des fractions.

Il s'agit alors de descendre h en un morphisme $h_0 : V \rightarrow X$ tel que $u = h_0 \circ i$. Or π est fidèlement plat et quasi-compact et X est un faisceau sur (Aff/S) pour la topologie fpqc (A.4), donc il s'agit d'un problème de descente classique : posant $V'' = V' \times_V V'$, il suffit de voir que les deux composés $h \circ \text{pr}_1$ et $h \circ \text{pr}_2 : V'' \rightarrow V \rightarrow X$ sont égaux. Or ils le sont sur $U'' := U' \times_U U'$ puisque $h \circ i'$ se descend à U , d'où la conclusion puisque F est séparé et que U'' est schématiquement dense dans V'' .

Supposons maintenant que $\mathcal{Y}$ soit localement noethérien et que F soit de type fini et vérifie (ii ter), et montrons que F est universellement fermé (c'est-à-dire propre, puisqu'il est déjà représentable, séparé et de type fini).

La question est locale sur $\mathcal{Y}$ donc on peut supposer que $\mathcal{Y} = Y$ est un schéma affine noethérien. Dans ce cas, le « lemme de Chow » ([Kn] IV, 3.1) assure qu'il existe un Y -schéma X' et un Y -morphisme $G : X' \rightarrow X$ qui est propre (et même projectif) et surjectif. Comme F est séparé, il suffit de voir que $F \circ G : X' \rightarrow Y$ est propre. Or comme G est propre il vérifie, comme F , la condition (ii ter) de l'énoncé, et il en résulte formellement que $F \circ G$ vérifie également cette condition. Comme de plus $F \circ G$ est un morphisme de type fini et séparé de schémas noethériens, il est bien propre par ([EGA] II, 5.6.3). $\square$

Remarque (7.5.2) : Bien entendu, (7.5) contient comme cas particulier le critère valuatif de propreté pour les morphismes d'espaces algébriques : c'est le cas où $\mathcal{Y}$ (et donc $\mathcal{X}$) est représentable et F de type fini. Si $\mathcal{Y}$ est de plus localement noethérien, ce critère peut se déduire facilement du « lemme de Chow » de ([Kn] IV, 3.1).

Grâce à (7.5) nous sommes maintenant armés pour aborder les morphismes séparés de champs algébriques :

DÉFINITION (7.6). — Un S -champ algébrique $\mathcal{X}$ est séparé si le 1-morphisme (représentable) diagonal $\mathcal{X} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ est universellement fermé (et donc propre, puisqu'il est séparé et de type fini).

Un 1-morphisme $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ de S -champs algébriques est séparé si pour tout $V \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et tout $y \in \text{ob} \mathcal{Y}_V$, vu comme 1-morphisme de S -champs $V \xrightarrow{y} \mathcal{Y}$, le produit fibré $V \times_{y, \mathcal{Y}, F} \mathcal{X}$ est un V -champ (algébrique) séparé.

Remarque (7.6.1) : Pour un champ représentable, il revient au même de dire que $\mathcal{X}$ est séparé ou que le morphisme diagonal Δ est une immersion fermée : ceci résulte de (A.2.2)(b) puisque ce morphisme est alors un monomorphisme de type fini. En d'autres termes, la notion de séparation définie en (7.6) coïncide avec la notion habituelle dans le cas représentable, et par suite il en est de même pour les morphismes.

LEMME (7.7). — Soit $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un 1-morphisme de S -champs algébriques. Alors, le 1-morphisme diagonal $\Delta_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_{F, \mathcal{Y}, F} \mathcal{X}$ est représentable, séparé et de type fini. De plus le 1-morphisme F est séparé si et seulement si $\Delta_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}$ est universellement fermé (et donc propre).

Preuve : Considérons dans $(\text{Ch.alg}/S)$ le diagramme 2-commutatif à carré 2-cartésien suivant

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}} & \mathcal{X} \times_{F, \mathcal{Y}, F} \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{Y} \\ & \searrow \Delta_{\mathcal{X}} & \downarrow & \square & \downarrow \Delta_{\mathcal{Y}} \\ & & \mathcal{X} & \xrightarrow{F \times_S F} & \mathcal{Y} \times_S \mathcal{Y} \end{array}$$

Comme $\Delta_{\mathcal{Y}}$ et $\Delta_{\mathcal{X}}$ sont représentables, $\Delta_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}$ composé avec un 1-morphisme représentable (cf. (3.10)) est représentable, donc $\Delta_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}$ est bien représentable. Comme $\Delta_{\mathcal{X}}$ est séparé et de type fini, il en est alors de même de $\Delta_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}$. La dernière assertion de (7.7) est laissée au lecteur. $\square$

PROPOSITION (7.8) (critère valuatif de séparation). — Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ un 1-morphisme de S -champs algébriques. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) F est séparé ;
- (ii) pour tout $V \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, spectre d'un anneau de valuation de corps des fractions K , tous $x_1, x_2 \in \text{ob} \mathcal{X}_V$, tout isomorphisme $\beta : F(x_1) \rightarrow F(x_2)$ dans $\mathcal{Y}_V$ et tout isomorphisme $\alpha : (x_1)_U \rightarrow (x_2)_U$ dans $\mathcal{X}_U$ (avec $U = \text{Spec}(K)$), tel que $F(\alpha) = \beta_U$, il existe au moins un (et en fait un seul) isomorphisme $\tilde{\alpha} : x_1 \rightarrow x_2$ dans $\mathcal{X}_V$ prolongeant α (i.e. tel que $\tilde{\alpha}_U = \alpha$) et tel que $F(\tilde{\alpha}) = \beta$.

D'autre part on peut se limiter dans (ii) à des V qui sont des spectres d'anneaux de valuation complets et à corps résiduel algébriquement clos.

Si de plus $\mathcal{Y}$ est localement noethérien et F localement de type fini, on peut se limiter dans (ii) à des U qui sont des traits, i.e. des spectres d'anneaux de valuation discrète, et même à des traits complets et à corps résiduel algébriquement clos.

Preuve : C'est le critère valuatif (7.5), appliqué au 1-morphisme (représentable, de type fini et séparé) $\Delta_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}$. Pour les compléments finaux on utilise les implications (ii bis) $\Rightarrow$ (i) et (ii ter) $\Rightarrow$ (i) de (7.5) (dans le second cas on remarque que, sous les hypothèses envisagées, $\mathcal{X} \times_{F, \mathcal{Y}, F} \mathcal{X}$ est localement noethérien et $\Delta_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}$ de présentation finie). $\square$

Remarques (7.8.1) : (1) Une façon plus concise d'exprimer la propriété (ii) est de dire que, pour U et V comme dans l'énoncé, le foncteur naturel $\mathcal{X}_V \rightarrow \mathcal{X}_U \times_{\mathcal{Y}_U} \mathcal{Y}_V$ (dédit du foncteur $F_V : \mathcal{X}_V \rightarrow \mathcal{Y}_V$ et du foncteur de restriction $\mathcal{X}_V \rightarrow \mathcal{X}_U$) est pleinement fidèle.

(2) Beaucoup de S -champs algébriques intéressants ne sont pas séparés : par exemple, pour qu'un S -champ algébrique de la forme $B(G/X)$ pour un X -espace algébrique en groupes G (cf. (3.4.2)) soit séparé il faut et il suffit que G soit propre sur X . En fait, on peut même dire que l'on connaît peu de

champs algébriques séparés utiles qui ne soient pas des champs de Deligne-Mumford : citons ceux de la forme $B(A/S)$ où A est un S -schéma abélien, ou les champs à morphisme diagonal fini tels que le quotient d'un S -schéma localement de présentation finie par l'action d'un S -schéma en groupes fini localement libre. Ces champs sont bien algébriques d'après (10.13.1).

(3) On laisse au lecteur le soin d'énoncer et de démontrer des analogues des résultats de ([EGA] I, 5.2 et 5.3) sur les morphismes séparés. Signalons celui-ci : pour une suite $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y} \xrightarrow{G} \mathcal{Z}$ de 1-morphismes de S -champs algébriques, on a les implications : F et G séparés $\Rightarrow G \circ F$ séparé $\Rightarrow F$ séparé. Un cas particulier important est le suivant : si $\mathcal{Y}$ est un S -champ algébrique et X un S -espace algébrique séparé sur S (par exemple un objet de (Aff/S)), alors tout 1-morphisme de X dans $\mathcal{Y}$ est séparé.

(7.9) Nous allons maintenant revenir au problème de la «réduction de l'extension K' » dans (7.3). Reprenant les notations de (7.3), donnons-nous de plus un diagramme 2-commutatif (7.3.2) et cherchons à y remplacer K' par une extension finie de K . Notons que l'on peut toujours, par changement de base, se ramener au cas où $\mathcal{Y} = V$, ce que nous supposons désormais. Introduisons le produit fibré $U \times_V V' = \text{Spec}(K \otimes_R R')$ et considérons le diagramme

$$(7.9.1) \quad \begin{array}{ccccccc} U' = \text{Spec}(K') & \xrightarrow{j} & U_1 := U \times_V V' & \xrightarrow{\pi'} & U & \xrightarrow{u} & \mathcal{X} \\ & & \downarrow i' & \nearrow h & \downarrow i & & \downarrow F \\ V' = \text{Spec}(R') & \xrightarrow{\pi} & V & \xrightarrow{\text{Id}} & V & & \end{array}$$

où j est déduit de i' et π' par la propriété universelle du produit fibré. Ce diagramme est 2-commutatif si l'on oublie la flèche oblique h , et l'on a un 2-isomorphisme

$$(7.9.2) \quad \varphi_{U'} : u \circ \pi' \circ j \cong h \circ i' \circ j$$

dans $\mathcal{X}_{U'}$ (puisque le diagramme (7.3.2) de départ est 2-commutatif). Rappelons que U (resp. U') est le point générique du schéma local intègre V (resp. V'), et que par suite U' et U_1 peuvent être vus comme deux localisés de V' , l'un contenant l'autre (et tous deux schématiquement denses dans V').

LEMME (7.9.3). — Si F est de type fini et séparé, le diagramme (7.9.1) ci-dessus est 2-commutatif; plus précisément l'isomorphisme $\varphi_{U'}$ de (7.9.2) se prolonge en un unique 2-isomorphisme $\varphi : u \circ \pi' \cong h \circ i'$ dans $\mathcal{X}_{U_1}$.

Preuve : Comme le 1-morphisme diagonal de $\mathcal{X}'$ vers $\mathcal{X}' \times_{F, \mathcal{Y}, F} \mathcal{X}'$ est représentable et propre (puisque F est séparé), le U_1 -faisceau $\mathcal{Z}_{\text{som}, \mathcal{X}'}(\pi' \circ j, h \circ i')$ est représentable par un espace algébrique $f : I \rightarrow U_1$, propre sur U_1 , muni d'une section $\sigma_{U'}$ (déduite de $\varphi_{U'}$) au-dessus de U' . Pour tout point z de U_1 l'anneau local $\mathcal{O}_{U_1, z}$ est égal à $\mathcal{O}_{V', z}$ donc est un anneau de valuation, de sorte que par le critère valuatif (7.5) $\sigma_{U'}$ se prolonge en une section de f sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_{U_1, z})$ donc aussi, comme f est de type fini, sur un voisinage de z dans U_1 . Enfin, comme f est séparé, tous les prolongements sont compatibles, d'où une section de f sur U_1 tout entier $\square$

THÉOREME (7.10). — Soit $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un 1-morphisme de type fini de S -champs algébriques. Considérons les conditions suivantes :

(i) pour tout 1-morphisme $\mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Y}$, où $\mathcal{Y}'$ est un S -champ algébrique noethérien, le 1-morphisme $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{Y}'$ déduit de F par changement de base est fermé ;

(ii) pour tout anneau de valuation discrète R , tout diagramme 2-commutatif

$$(7.10.1) \quad \begin{array}{ccc} U = \text{Spec}(K) & \xrightarrow{u} & \mathcal{X} \\ i \downarrow & & \downarrow F \\ V = \text{Spec}(R) & \xrightarrow{v} & \mathcal{Y} \end{array}$$

où K est le corps des fractions de R et i le monomorphisme canonique, se prolonge en un diagramme 2-commutatif

$$(7.10.2) \quad \begin{array}{ccccccc} U' = \text{Spec}(K') & \xrightarrow{\pi_U} & U & \xrightarrow{u} & \mathcal{X} \\ i' \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow F \\ V' = \text{Spec}(R') & \xrightarrow{\pi} & V & \xrightarrow{v} & \mathcal{Y} \end{array}$$

où K' est une extension de K , et R' un anneau de valuation de corps des fractions K' et dominant R ;

(iii) tout diagramme (7.10.1) se prolonge en un diagramme (7.10.2), où l'on impose de plus que K' soit une extension finie de K , et où R' est cette fois le normalisé de R dans K' .

Alors on a les implications (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftarrow$ (iii), et les trois conditions sont équivalentes si F est séparé.

De plus, on peut se limiter dans (i) aux champs $\mathcal{Y}'$ qui sont des schémas, et dans (ii) et (iii) aux anneaux R qui sont complets à corps résiduel algébriquement clos.

Preuve : Il est immédiat que (iii) implique (ii). L'équivalence de (i) et (ii) se déduit comme (7.3), en utilisant (7.2.2) au lieu de (7.2.1).

Supposons F séparé et montrons que (ii) implique (iii). Considérons un diagramme (7.10.1). On peut supposer que $S = \mathcal{Y} = V$ qui est noethérien de sorte que $\mathcal{X}$ est séparé de présentation finie. Fixons un diagramme (7.10.2) comme dans (ii) prolongeant (7.10.1). Nous allons modifier ce diagramme en plusieurs étapes, en gardant cependant les mêmes notations :

Départ : comme en (ii), K' est une extension de K , et R' un anneau de valuation de corps des fractions K' et dominant R . Comme $\mathcal{X}$ est séparé, on peut d'après (7.9.3) remplacer K' par $K \otimes_R R' = R'[t^{-1}]$ où t désigne une uniformisante de R , d'où :

Étape 1 : R' est inchangé, et le carré de gauche est *cartésien*. Alors K' est limite inductive filtrante de ses sous- K -algèbres de la forme $K_1 = K \otimes_R R_1$, où R_1 parcourt les sous- R -algèbres de *type fini* de R' (qui sont fidèlement plates sur R puisque R est un anneau de valuation). Comme $\mathcal{X}$ est de présentation finie sur V , la catégorie $\mathcal{X}_{V'}$ (resp. $\mathcal{X}_{U'}$) est, d'après (4.15)(i), limite inductive filtrante des catégories $\mathcal{X}_{V_1}$ (resp. $\mathcal{X}_{U_1}$) où R_1 est comme ci-dessus et où l'on a posé $V_1 = \text{Spec}(R_1)$ et $U_1 = \text{Spec}(K_1)$. Nous sommes donc ramenés à :

Étape 2 : π est de *type fini et fidèlement plat* et le carré de gauche est *cartésien*. Il est alors facile de voir qu'il existe un sous-schéma fermé intègre W de V' qui est fidèlement plat et *quasi-fini* sur V (et en particulier est un schéma affine noethérien intègre de dimension 1). Si l'on localise W en l'un de ses points fermés au-dessus du point fermé de V , et que l'on normalise et relocalise le résultat, on obtient le spectre d'un anneau de valuation discrète (théorème de Krull-Akizuki, cf. ([Bou] chap. 7)), à corps des fractions fini sur K , d'où, changeant à nouveau les notations :

Étape 3 : K' est une *extension finie* de K (que l'on peut se permettre d'agrandir, et que nous supposons donc *normale*) et R' est un *anneau de valuation discrète* de corps des fractions K' dominant V . On peut remplacer K par sa fermeture radicielle K_r dans K' et R par son normalisé dans K_r qui est encore un anneau de valuation discrète contenu dans R' : nous supposons donc de plus que K' est une *extension finie galoisienne* de K .

Notons alors G le groupe fini $\text{Aut}_K(K')$, et $V_1 = \text{Spec}(R_1)$ le normalisé de V dans K' . Notons $u' = u \circ \pi_U \in \text{ob. } \mathcal{X}_{U'}$, et soient $x_1, \dots, x_s$ les points fermés distincts de V_1 . Alors V_1 est recouvert par les ouverts $W_i = \text{Spec}(\mathcal{O}_{V_1, x_i})$ dont l'un (disons W_1) s'identifie à V' . Pour conclure, il suffit de voir que, pour chaque $i \in \{1, \dots, s\}$, u' est dans l'image essentielle de $\mathcal{X}_{W_i}$. Or c'est clair pour $i = 1$, et cela en résulte pour les autres puisque chaque W_i est transformé de W_1 par un élément de G , et que u' est isomorphe dans $\mathcal{X}_{U'}$ à ses transformés par G puisqu'il est dans l'image essentielle de $\mathcal{X}_{U'}$. $\square$

Passons maintenant aux morphismes propres.

DÉFINITION (7.11). — Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ un 1-morphisme de S -champs algébriques. On dit que F est *propre* s'il est *séparé*, de *type fini* et *universellement fermé*.

Remarque (7.11.1) : Cette notion coïncide évidemment avec la notion habituelle lorsque F est représentable. Le lecteur vérifiera qu'elle est stable par changement de base et composition, et est locale sur $\mathcal{Y}$ au sens fppf.

Remarque (7.11.2) : L'intérêt de la notion de *propreté* pour les morphismes de schémas vient en grande partie du lemme de Chow : celui-ci permet de montrer le théorème de finitude pour les images directes de Modules cohérents, et aussi de réduire le critère valuatif de *propreté* aux anneaux de valuation discrète. De fait, dans le cadre des champs algébriques, nous ne savons établir ces deux propriétés qu'en présence d'un substitut du lemme de Chow. Par exemple on a l'énoncé suivant :

PROPOSITION (7.12). — Sous les hypothèses de (7.10), on suppose de plus que $\mathcal{Y}$ est noethérien, que F est séparé, et que la condition suivante est vérifiée :

(*) *quitte à effectuer un changement de base $\mathcal{Y}_1 \rightarrow \mathcal{Y}$ lisse et surjectif, il existe un 1-morphisme surjectif et propre $A : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ tel que le composé $\mathcal{X}' \xrightarrow{A} \mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ soit représentable.*

Alors, pour que F soit propre, il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions équivalentes (i)-(iii) de (7.10), ou encore la condition suivante :

(C) *comme (7.10)(ii), où l'on se limite aux diagrammes (7.10.1) pour lesquels $u : \text{Spec}(K) \rightarrow \mathcal{X}$ représente un point maximal de $\mathcal{X}$.*

Remarque (7.12.1) : Dans la condition (*), le morphisme A est automatiquement représentable. D'autre part, grâce au lemme de Chow ([Kn], IV.3.1) on peut de plus exiger (quitte encore à se localiser sur $\mathcal{Y}$) que $F \circ A$ soit *quasi-projectif*, de sorte que A est même *projectif*. C'est d'ailleurs cette remarque qui fait l'efficacité de la condition (*) (cf. ([EGA] II, 5.6.3) qui est utilisé plus bas).

Remarque (7.12.2) : Lorsque la condition (*) est satisfaite, on peut le plus souvent se passer des énoncés généraux tels que (7.3) et (7.10) ; par exemple le lecteur pourra s'amuser dans ce cas à démontrer (7.10) et (7.12) directement à partir du critère valuatif de *propreté* des EGA.

Remarque (7.12.3) : Nous ignorons si tout 1-morphisme séparé de type fini de champs algébriques noethériens vérifie la condition (*). Outre le cas trivial des morphismes représentables, et celui du quotient d'un espace algébrique par l'action d'un schéma en groupes propre, citons (cf. (16.6)) le cas des morphismes relativement de Deligne-Mumford (7.3.3) où le morphisme A peut même être choisi *fini*.

Remarque (7.12.4) : La condition (C) est notamment utile sous la forme, plus faible, où l'on se limite aux $u : \text{Spec}(K) \rightarrow \mathcal{X}$ qui se factorisent par un ouvert dense donné de $\mathcal{X}$. Dans le cas des champs de Deligne-Mumford, cette version est mentionnée dans [De-Mu] (à la suite du théorème 4.19) et est utilisée dans cet article pour déduire la propriété du champ des courbes stables de genre $g \geq 2$ du théorème de réduction semi-stable pour les courbes lisses (qui forment un ouvert dense du champ considéré).

Preuve de (7.12) : La seule chose à vérifier est que la condition (C) entraîne que F est propre. La question étant locale sur $\mathcal{Y}$ on peut supposer que $\mathcal{Y}$ est un schéma affine et que la condition (*) est vérifiée globalement. Dans ces conditions il est immédiat que F est propre si et seulement si $F \circ A$ est propre. De plus on peut supposer $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ irréductibles, de sorte que la condition (C) pour F entraîne (C) pour $F \circ A$. Nous sommes donc ramenés (remplaçant F par $F \circ A$) au cas où $F : X \rightarrow Y$ est un morphisme de schémas vérifiant (C). D'après le lemme de Chow ([EGA] II, 5.6.1) nous pouvons supposer que F est quasi-projectif, et donc qu'il existe une immersion ouverte dominante $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ où $\overline{X}$ est propre sur Y .

Montrons alors que $X = \overline{X}$. Soit z un point de $\overline{X}$; d'après ([EGA] 0_I, 6.5.8) par exemple, il existe un anneau de valuation discrète R et un morphisme dominant $j : \text{Spec}(R) \rightarrow \overline{X}$ envoyant le point fermé sur z . La condition (C), jointe au fait que F est séparé, entraîne alors que j se factorise par X et en particulier que $z \in X$, ce qui achève la démonstration. $\square$

8. Caractérisation des espaces algébriques et des champs de Deligne-Mumford

THÉORÈME (8.1). — *Soit $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique, et soit $\Delta : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ le 1-morphisme diagonal. Pour que $\mathcal{X}$ soit un S -champ de Deligne-Mumford, il faut et il suffit que Δ soit non ramifié.*

Rappelons (cf. (4.2)) que par «non ramifié» nous entendons «localement de type fini et formellement non ramifié».

Avant de prouver ce théorème, donnons-en quelques corollaires :

COROLLAIRE (8.1.1). — *Soit $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique, et soit $\Delta : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ le 1-morphisme diagonal. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $\mathcal{X}$ est représentable ;
- (ii) $\mathcal{X}$ est un S -espace ;
- (iii) pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et tout $x \in \text{ob} \mathcal{X}_U$, on a $\text{Aut}_{\mathcal{X}_U}(x) = \{\text{Id}_x\}$;
- (iv) Δ est un monomorphisme de S -champs.

Preuve de (8.1.1) : Il est trivial que (i) implique les conditions (ii) à (iv), et ces dernières sont équivalentes d'après (2.4.1.1). Enfin (iv) implique (i) d'après (4.4) et (8.1). $\square$

COROLLAIRE (8.1.2). — *Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ un 1-morphisme de S -champs algébriques. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) F est représentable ;
- (ii) le 1-morphisme diagonal $\Delta_F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_{F, \mathcal{Y}, F} \mathcal{X}$ est un monomorphisme. $\square$

COROLLAIRE (8.1.3). — *Tout monomorphisme de S -champs algébriques est représentable.* $\square$

(8.2) *Preuve de (8.1) :* L'assertion «il faut» a déjà été vue en (4.2). Supposons donc Δ non ramifié. Pour voir que $\mathcal{X}$ est un champ de Deligne-Mumford, il suffit de construire, pour tout point y de $|\mathcal{X}'|$, un espace algébrique U et un 1-morphisme étale $U \rightarrow \mathcal{X}$ dont l'image contient y . Pour cela on peut

supposer l'existence d'une présentation $P : X \rightarrow \mathcal{X}$, où X est un schéma affine.

(8.2.1) On fixe donc pour toute la suite les données et notations suivantes :

- un S -corps k et un 1-morphisme $y : \text{Spec}(k) \rightarrow \mathcal{X}$;
- un S -schéma affine X et un 1-morphisme lisse $P : X \rightarrow \mathcal{X}$;
- un point x' de $X_y := \text{Spec}(k) \times_{y, \mathcal{X}, P} X$, et son image x dans X ;
- $k_0 :=$ le corps résiduel du point de S image de $\text{Spec}(k)$;
- $k_{0, \text{sep}} :=$ une clôture séparable de k_0 ;
- $Z := X \times_{P, \mathcal{X}, P} X$, et le diagramme 2-cartésien de S -champs

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{p_2} & X \\ p_1 \downarrow & \square & \downarrow P \\ X & \xrightarrow{P} & \mathcal{X}. \end{array}$$

On notera que dans le diagramme ci-dessus, toutes les flèches sont représentables, lisses et surjectives.

(8.2.2) Le fait que Δ soit non ramifié signifie que le morphisme canonique $Z \xrightarrow{(p_1, p_2)} X \times_S X$ est non ramifié; ceci implique que le morphisme naturel de $\mathcal{C}_Z$ -Modules quasi-cohérents

$$(8.2.2.1) \quad p_1^* \Omega_{X/S}^1 \oplus p_2^* \Omega_{X/S}^1 \rightarrow \Omega_{Z/S}^1$$

est *surjectif*. Il en est donc de même du morphisme naturel

$$(8.2.2.2) \quad p_2^* \Omega_{X/S}^1 \rightarrow \Omega_{p_1}^1$$

puisque $\Omega_{p_1}^1 = \text{Coker}(p_1^* \Omega_{X/S}^1 \rightarrow \Omega_{Z/S}^1)$.

(Remarque destinée à rassurer le lecteur : on utilise librement la notion de Module quasi-cohérent sur un espace algébrique éventuellement non noethérien, ce qui sort du cadre de [Kn]. Mais en fait, l'hypothèse sur Δ entraîne, comme on l'a vu dans la preuve de (4.2), qu'il est schématique quasi-affine. En particulier le morphisme P est quasi-affine, Z est un S -schéma quasi-affine et X_y est un k -schéma lisse et quasi-affine.)

(8.2.3) Introduisons le $\mathcal{C}_X$ -Module quasi-cohérent

$$(8.2.3.1) \quad \Omega_{X/\mathcal{X}}^1 = \Omega_P^1$$

des différentielles relatives de X sur $\mathcal{X}$. On peut le définir, intrinsèquement, comme le faisceau conormal du morphisme diagonal $X \rightarrow Z = X \times_{\mathcal{X}} X$. On a un morphisme canonique

$$(8.2.3.2) \quad \Omega_{X/S}^1 \rightarrow \Omega_P^1$$

qui après le changement de base lisse $p_2 : Z \rightarrow X$ donne le morphisme (8.2.2.2). Par suite le morphisme (8.2.3.2) est *surjectif* et Ω_P^1 est un $\mathcal{C}_X$ -Module *localement libre* de rang fini.

(8.2.4) Soit r le rang de Ω_P^1 au voisinage du point x de X . En raison de la surjectivité de (8.2.3.2), il existe des sections globales $f_1, \dots, f_r$ de $\mathcal{C}_X$ dont les différentielles en x forment une base du $\kappa(x)$ -espace vectoriel $\Omega_P^1(x)$. Considérons alors les S -morphisms (représentables, puisque X est un schéma)

$$(8.2.4.1) \quad f := (f_1, \dots, f_r) : X \rightarrow \mathbb{A}_S^r$$

$$(8.2.4.2) \quad (P, f) : X \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathbb{A}_S^r.$$

Alors (P, f) est un $\mathcal{X}$ -morphisme de champs algébriques lisses sur $\mathcal{X}$, dont la différentielle est un isomorphisme au point x . Il est donc *étale au voisinage de x* (par changement de base on se ramène au cas où $\mathcal{X}$ est un schéma, et l'on invoque ([EGA] IV, 17.11.1)); pour simplifier nous supposons, quitte à restreindre X , que (P, f) est étale.

(8.2.5) Bien entendu, (P, f) induit par changement de base un k -morphisme étale

$$(8.2.5.1) \quad (P, f)_y : X_y \rightarrow \mathbb{A}_k^r$$

dont l'image est un ouvert dense de $\mathbb{A}_k^r$ et contient donc un ouvert de la forme $D(\Phi)$ où $\Phi \in k[T_1, \dots, T_r]$ est un polynôme non nul. Il est alors immédiat, puisque $k_{0, \text{sep}}$ est infini, qu'il existe $z_1, \dots, z_r \in k_{0, \text{sep}}$ tels que $\Phi(z_1, \dots, z_r) \neq 0$. En d'autres termes, l'image du morphisme composé

$$(8.2.5.1) \quad X_y \xrightarrow{(P, f)_y} \mathbb{A}_k^r \longrightarrow \mathbb{A}_{k_0}^r$$

contient un point fermé Q étale sur $\text{Spec}(k_0)$. Il existe donc un sous-schéma E de $\mathbb{A}_S^r$, étale sur S et contenant Q .

Notons alors $U \subset X$ l'image réciproque de $\mathcal{X} \times_S E$ par le morphisme (P, f) de (8.2.4.2); alors U est étale sur $\mathcal{X}$ puisque E est étale sur S et que (P, f) est étale; d'autre part, vu le choix de E , l'image réciproque de U dans X_y est non vide, de sorte que U remplit les conditions requises au début de la preuve. $\square$

9. Parenthèse sur les topologies plates

(9.1) Jusqu'à présent nous n'avons utilisé que la topologie étale sur (Aff/S) . Comme le lecteur s'en doute, certaines des notions générales introduites plus haut, celles de préchamp et de champ notamment, gardent un sens pour un site (ou un topos) quelconque. Sans entrer dans la théorie générale (pour cela voir [Gir 2]), nous aurons besoin, au chapitre 10 notamment, de considérer deux autres topologies bien connues sur (Aff/S) : la topologie fppf (« fidèlement plate de présentation finie ») et la topologie fpqc (« fidèlement plate quasi-compacte »). On dispose donc sur (Aff/S) , par ordre croissant de finesse, de trois topologies de Grothendieck, qui sont engendrées respectivement par les prétopologies décrites ci-dessous :

topologie	familles couvrantes
étale	famille finies surjectives de morphismes étales
fppf	famille finies surjectives de morphismes plats et de présentation finie
fpqc	famille finies surjectives de morphismes plats

Désignant par TOP l'une de ces trois topologies, on appellera « S -faisceaux TOP » les faisceaux sur (Aff/S) muni de la topologie TOP. Ainsi, un S -espace est simplement un S -faisceau étale, et d'après ([SGA 1] VIII, 5.2), les S -schémas sont des S -faisceaux fpqc. Il en est d'ailleurs de même, en vertu de (A.4), des S -espaces algébriques.

(9.2) Les notions de relation d'équivalence et de faisceau quotient (§1) se généralisent évidemment aux faisceaux TOP. En fait, une relation d'équivalence TOP n'est rien d'autre qu'une relation d'équivalence $X_1 \rightrightarrows X_0$ dans (Es/S) , où les S -espaces X_0 et X_1 sont des faisceaux TOP. Par contre, le « quotient TOP » ne coïncide pas en général avec le quotient dans (Es/S) mais est le faisceau TOP associé à ce dernier.

On a aussi une notion évidente de S -faisceau TOP en groupoïdes, généralisant (2.4.3).

La notion de S -groupoïde ne fait pas intervenir de topologie sur (Aff/S) .

(9.3) On dit qu'un S -groupoïde $\mathcal{X}$ est un S -préchamp TOP si les faisceaux $\mathcal{I}som(x, y)$ de (3.1)(i) sont des faisceaux TOP ; c'est un S -champ TOP si

c'est un S -préchamp TOP et si de plus pour toute famille $(V_i \xrightarrow{\varphi_i} U)_{i \in I}$ dans (Aff/S) , convraute pour TOP, toute donnée de descente pour la catégorie fibrée $\mathcal{X}$ relativement à cette famille est effective. On a évidemment les implications :

$$S\text{-préchamp fpqc} \Rightarrow S\text{-préchamp fppf} \Rightarrow S\text{-préchamp (étale)}$$

et de même pour les champs.

De façon plus précise, les S -champs TOP forment une sous-2-catégorie strictement pleine de (Ch/S) ; le foncteur d'inclusion commute aux produits fibrés finis et aux sommes disjointes. Il a un adjoint à gauche qui est le foncteur « S -champ TOP associé», et il transforme monomorphismes en monomorphismes; l'analogie n'est pas vraie pour les épimorphismes.

(9.4) Il résulte de (A.4) que les S -champs algébriques sont des S -préchamps fpqc. Nous verrons en (10.7) que ce sont aussi des S -champs fppf.

Il est également facile de déduire de (A.4) que le S -champ des espaces algébriques défini en (3.4.6) (qui n'est pas algébrique) est un S -préchamp fpqc; c'est en fait, lui aussi, un S -champ fppf (10.4.2).

Nous aurions donc pu définir dès le départ les S -champs algébriques comme les S -champs fppf vérifiant les conditions (i) et (ii) de (4.1), d'autant que pour les champs les plus utilisés en pratique, notamment pour la plupart des «champs de modules», la propriété d'être un champ fppf est facile à vérifier. La définition «étale» adoptée ici a l'avantage de coïncider avec celle d'Artin, d'être mieux en accord avec la définition des espaces algébriques, et de simplifier au début certains arguments (cf. par exemple (4.3.1)).

(9.5) De manière générale, les définitions et les résultats du §3 s'étendent sans difficulté aux S -champs TOP. Par exemple, la construction (3.4.3) du S -champ $[X.]$ associé à un S -espace en groupoïdes X_* est valable, mutatis mutandis, pour la topologie TOP : à un S -faisceau TOP en groupoïdes X_* , on associe un S -champ TOP noté $[X.]_{\text{TOP}}$ qui n'est autre que le champ TOP associé au S -champ (étale) $[X.]$.

(9.6) Il y a bien entendu des situations où la topologie naturelle à considérer n'est pas la topologie étale; c'est notamment le cas pour de nombreux S -faisceaux en groupoïdes tels que les quotients de schémas par des actions de schémas en groupes plats, mais non lisses. Ainsi, si G est un S -schéma en groupes plat et de présentation finie, le champ $B(G/S)$ de (2.4.2) (qui classe les G -espaces homogènes localement triviaux pour la topologie étale) n'est utile que si G est lisse, et le «bon» champ classifiant à considérer est plutôt $B(G/S)_{\text{fppf}}$, c'est-à-dire le champ quotient $[S/G/S]_{\text{fppf}}$ de S par l'action triviale de G , pour la topologie fppf. Celui-ci est d'ailleurs un S -champ algébrique si G est séparé, comme nous le verrons en (10.13.1). Si G est lisse et séparé alors il résulte de (10.1) que $B(G/S)$ et $B(G/S)_{\text{fppf}}$

coïncident; autrement dit tout « G -torseur fppf» est un « G -torseur étale», ce qui résulte aussi d'un théorème de Grothendieck ([Gr 3] VI, 11.7).

(9.7) De même la notion de gerbe fppf, et celle de S -faisceau fppf grossier associé à un champ, qui généralisent respectivement les notions étales définies en (3.15) et (3.19), seront utilisées plus bas, cf. (10.8), et (11.1) à (11.5). Ici encore, ce sont les quotients fppf qui sont naturels dans les problèmes de modules courants : par exemple, si $S = \text{Spec}(\mathbb{Z})$ et si $\mathcal{E}$ désigne le S -champ des courbes elliptiques, qui est un S -champ de Deligne-Mumford, l'invariant modulaire classique $j : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$ fait de $\mathcal{E}$ une gerbe fppf sur $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$ et permet d'identifier $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$ au S -faisceau fppf grossier associé à $\mathcal{E}$, mais j n'est pas un épimorphisme pour la topologie étale.

10. Les critères d'Artin pour qu'un S -champ soit algébrique

Le théorème suivant, dû à Artin ([Ar 6] 6.1), assure que la définition (4.1) des S -champs algébriques (quasi-séparés) est essentiellement la plus générale possible.

THÉORÈME (10.1). — Soit $\mathcal{X}$ un S -champ vérifiant les trois conditions suivantes :

- (i) $\mathcal{X}$ est un S -champ fppf (9.3) ;
- (ii) le 1-morphisme de S -champs diagonal

$$\mathcal{X} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$$

est représentable, séparé et quasi-compact ;

- (iii) il existe un S -espace algébrique Y et un 1-morphisme $Y \xrightarrow{Q} \mathcal{X}$ de S -champs qui est représentable, fidèlement plat et localement de présentation finie.

Alors $\mathcal{X}$ est un S -champ algébrique.

Remarque (10.2) : La représentabilité de Q dans (10.1)(iii) résulte bien entendu de la condition (10.1)(ii). Comme en (4.2), on montre que Δ est en fait de type fini sous les conditions (10.1)(ii) et (iii) sur $\mathcal{X}$.

Preuve de (10.1) : La seule chose à démontrer est l'existence d'une présentation $X \xrightarrow{P} \mathcal{X}$ de $\mathcal{X}$ (P surjectif et lisse).

Pour tout morphisme de S -champs $\mathcal{C}' \xrightarrow{F} \mathcal{C}$ et tout entier $i \geq 0$, on notera simplement $(\mathcal{C}'/\mathcal{C})^{(i)}$ le produit fibré

$$\mathcal{C}' \times_{F, \mathcal{C}, F} \mathcal{C}' \cdots \times_{F, \mathcal{C}, F} \mathcal{C}'$$

de i copies de $\mathcal{C}'$ au-dessus de $\mathcal{C}$ et

$$F_j^{(i+1)} : (\mathcal{C}'/\mathcal{C})^{(i+1)} \rightarrow (\mathcal{C}'/\mathcal{C})^{(i)} \quad (j = 1, \dots, i+1)$$

la projection canonique correspondant à l'oubli du j -ième facteur ($F_1^{(1)}$ n'est autre que F) ; on notera aussi

$$\Delta : (\mathcal{C}'/\mathcal{C})^{(1)} \rightarrow (\mathcal{C}'/\mathcal{C})^{(2)}$$

le 1-morphisme diagonal.

Fixons, pour $i = 1, 2, 3$, un schéma affine Z^i muni d'un morphisme étale $Z^i \rightarrow (Y/\mathcal{X})^{(i)}$ et fixons un entier $n \geq 1$. Considérons le préfaisceau $\overline{X}(Z^*, n)$ sur (Aff/S) défini comme suit : pour tout $U = \text{Spec}(A) \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, $\overline{X}(Z^*, n, U)$ est l'ensemble des couples

$$(A', y^*),$$

où A' est une A -algèbre (associative, commutative et unitaire) de A -module sous-jacent A^n , définissant un morphisme fini et libre de rang n

$$U' = \text{Spec}(A') \xrightarrow{\pi} U$$

dans (Aff/S) , et où $y^* = (y^1, y^2, y^3)$ est un triplet de morphismes de S -schémas

$$y^i : (U'/U)^{(i)} \rightarrow Z^i \quad (i = 1, 2, 3)$$

tels que

$$y^{i-1} \circ \pi_j^{(i)} = Q_j^{(i)} \circ y^i \quad (j = 1, \dots, i \text{ et } i = 2, 3)$$

et

$$y^2 \circ \Delta_\pi = \Delta_Q \circ y^1$$

(on a noté encore y^i le morphisme composé $(U'/U)^{(i)} \xrightarrow{y^i} Z^i \rightarrow (Y/\mathcal{X})^{(i)}$; pour toute flèche $V \xrightarrow{\varphi} U$ dans (Aff/S) , φ^* de $\overline{X}(Z^*, n, U)$ dans $\overline{X}(Z^*, n, V)$ est définie de manière évidente.

Il est clair que $\overline{X}(Z^*, n)$ est représentable par un objet de (Aff/S) , noté encore $\overline{X}(Z^*, n)$, et que l'on a un 1-morphisme de S -champs

$$\overline{X}(Z^*, n) \xrightarrow{\overline{P}} \mathcal{X}.$$

qui à $(A', y^*) \in \overline{X}(Z^*, n, U)$ associe l'objet x de $\mathcal{X}_U$ obtenu par descente fppf de U' à U à partir de $Q(y) \in \text{ob } \mathcal{X}_{U'}$ et de la donnée de descente définie par y^2 et y^3 . Enfin, on définit un ouvert $X(Z^*, n)$ de $\overline{X}(Z^*, n)$ en imposant à $(A', y^*) \in \overline{X}(Z^*, n, U)$ la condition supplémentaire suivante : le morphisme de S -espaces algébriques

$$U' \xrightarrow{(\pi, y^1)} U \times_{x, \mathcal{X}, Q} Z^1$$

(où $x = \overline{P}(A', y^*)$) est une immersion fermée, transversalement régulière relativement à U (cf. ([EGA] IV, 19.2.2)).

Maintenant, on va montrer que le 1-morphisme de S -champs $X \xrightarrow{P} \mathcal{X}$, où X est la somme disjointe des $X(Z^*, n)$ pour tous les choix possibles de $Z^* = (Z^1, Z^2, Z^3)$ et de n et où $P|X(Z^*, n) = \overline{P}|X(Z^*, n)$, répond à la question.

Commençons par la surjectivité de P . Soient k un corps, $x \in \text{ob } \mathcal{X}_{\text{Spec}(k)}$ et Z^1 un schéma affine étale au-dessus de Y tel que le k -espace algébrique $Z_x^1 = \text{Spec}(k) \times_{x, \mathcal{X}, Q} Z^1$ soit non vide (un tel schéma affine existe car Q est surjectif). Comme Z_x^1 est localement de type fini sur k , il existe un ouvert

dense de Z_x^1 qui est un schéma, et dans cet ouvert au moins un point fermé z tel que l'anneau local $\mathcal{O}_z$ de Z_x^1 en z soit de Cohen-Macaulay (en effet, l'ensemble des points de Z_x^1 dont l'anneau local est de Cohen-Macaulay est ouvert d'après ([EGA] IV, 6.11.3) et contient tous les points maximaux de Z_x^1 puisqu'un anneau local artinien est automatiquement de Cohen-Macaulay). Alors, si d est la dimension de $\mathcal{O}_z$ et si $(f_1, \dots, f_d)$ est une suite régulière de longueur d dans l'idéal maximal de $\mathcal{O}_z$, le sous-schéma fermé U' de Z_x^1 , supporté par z , défini par $f_1 = 0, \dots, f_d = 0$, est régulièrement immergé dans Z_x^1 (par construction) et est fini et libre sur $U = \text{Spec}(k)$; on note n son rang. Il ne reste plus qu'à trouver des schémas affines Z^2 et Z^3 , étales au-dessus de $(Y/\mathcal{X})^{(2)}$ et $(Y/\mathcal{X})^{(3)}$ respectivement, tels que pour $i = 2, 3$, le morphisme

$$(U'/U)^{(i)} \rightarrow (Y/\mathcal{X})^{(i)}$$

induit par

$$U' \rightarrow Z_x^1 \rightarrow Z^1 \rightarrow Y$$

se factorise par $Z^i \rightarrow (Y/\mathcal{X})^{(i)}$; or $(U'/U)^{(i)}$ est semi-local et on peut prendre pour Z^i une somme disjointe finie de schémas affines étales au-dessus de $(Y/\mathcal{X})^{(i)}$. Par suite x se relève en un point de $X(Z^*, n)$ pour les choix de $Z^* = (Z^1, Z^2, Z^3)$ et n faits ci-dessus, d'où la surjectivité de P .

Pour la lissité de P , nous montrerons tout d'abord que P est localement de présentation finie puis que P est formellement lisse (cf. (4.15)).

Pour montrer que P est localement de présentation finie, il suffit de montrer que, pour chaque choix de $Z^* = (Z^1, Z^2, Z^3)$ et de n , $\overline{P} : \overline{X}(Z^*, n) \rightarrow \mathcal{X}$ l'est. Or les $Q_j^{(i)}$ ($j = 1, \dots, i$ et $i = 1, 2, 3$) et Δ_Q sont localement de présentation finie par hypothèse, par suite il en est de même de $\overline{P}$ comme on le voit en utilisant le critère ([EGA] IV, 8.14.2) (cf. (4.15)).

Pour montrer que P est formellement lisse, il suffit de montrer que, pour chaque choix de $Z^* = (Z^1, Z^2, Z^3)$ et de n , $P : X(Z^*, n) \rightarrow \mathcal{X}$ l'est. Soient donc $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, $U = \text{Spec}(A)$, avec A un anneau strictement local, $I \subset A$ un idéal de carré nul, $A_0 = A/I$, $U_0 = \text{Spec}(A_0) \xrightarrow{i} U$ le sous- S -schéma fermé défini par I , $x \in \text{ob } \mathcal{X}_U$, $x_0 \in \text{ob } \mathcal{X}_{U_0}$ la restriction de x à U_0 et (A'_0, y'_0) un relèvement de x_0 en un U_0 -point de $X(Z^*, n)$. Il s'agit de relever x en un U -point (A', y^*) de $X(Z^*, n)$ dont la restriction à U_0 soit (A'_0, y'_0) . Notons Z_x^1 et $Z_{x_0}^1$ les S -espaces algébriques $U \times_{x, \mathcal{X}, Q} Z^1$ et $U_0 \times_{x_0, \mathcal{X}, Q} Z^1$ respectivement, on a alors un carré cartésien dans $(\text{Es.alg}/S)$

$$\begin{array}{ccc} Z_{x_0}^1 & \longrightarrow & Z_x^1 \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ U_0 & \xrightarrow{i} & U \end{array}$$

où les flèches verticales sont plates et localement de présentation finie, et tout revient à relever l'immersion fermée, transversalement régulière relativement à U_0 , $U'_0 \rightarrow Z_{x_0}^1$, donnée par (A'_0, y'_0) , en une immersion fermée,

transversalement régulière relativement à U , $U' \rightarrow Z_x^1$ avec U' libre de rang n sur U (en effet, pour $i = 2, 3$, la flèche $Z^i \rightarrow (Y/\mathcal{X})^{(i)}$ étant étale, le morphisme $(U'/U)^{(i)} \rightarrow (Y/\mathcal{X})^{(i)}$, induit par $U' \rightarrow Z_x^1 \rightarrow Z^1 \rightarrow Y$, se relèvera automatiquement de manière unique en $y^i : (U'/U)^{(i)} \rightarrow Z^i$, de restriction y_0^i à U_0).

Comme U'_0 est fini sur le schéma (affine) strictement local U_0 , il est somme de schémas strictement locaux et nous pouvons donc supposer que U_0 est strictement local. Le morphisme $U_0 \rightarrow Z_{x_0}^1$ se factorise alors automatiquement par l'ensémlé strict $\text{Spec}(B_0)$ de $Z_{x_0}^1$ au point image du point fermé de U_0 . Notons $\text{Spec}(B)$ l'ensémlé strict de Z_x^1 au même point, de sorte que $B_0 = B/IB$. Le lemme (10.3) ci-dessous implique l'existence d'un sous- U -schéma fermé transversalement régulier U' de $\text{Spec}(B)$, automatiquement fini et libre sur U et prolongeant $U'_0 \rightarrow \text{Spec}(B_0)$. Le composé $U' \rightarrow \text{Spec}(B) \rightarrow Z_x^1$ répond à la question (le fait que ce composé soit une immersion fermée se voit par réduction modulo I).

LEMME (10.3). — Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal de carré nul, B une A -algèbre plate et $(b_1, \dots, b_d)$ une suite dans B d'image $(b_{1,0}, \dots, b_{d,0})$ dans $B_0 = B/IB$. Alors $(b_1, \dots, b_d)$ est transversalement régulière relativement à A si et seulement si $(b_{1,0}, \dots, b_{d,0})$ est transversalement régulière relativement à $A_0 = A/I$.

Preuve : Par récurrence, on se ramène au cas $d = 1$ et il s'agit de voir que, pour $b \in B$ d'image b_0 dans B_0 , la multiplication par b dans B est injective et B/bB est A -plat si et seulement si la multiplication par b_0 dans B_0 est injective et B_0/b_0B_0 est A_0 -plat.

La partie «seulement si» est immédiate. Passons à la partie «si» de l'assertion. Pour montrer que $B \xrightarrow{b} B$ est injective, il suffit de montrer que $IB \xrightarrow{b} IB$ l'est. Or B est A -plat, donc $I \otimes_A B \xrightarrow{\sim} IB$; mais $I = I/I^2$ est en fait un A_0 -module, donc $I \otimes_A B \xrightarrow{\sim} I \otimes_{A_0} B_0$; par suite

$$\text{Ker}(IB \xrightarrow{b} IB) = \text{Ker}(I \otimes_{A_0} B_0 \xrightarrow{1 \otimes b_0} I \otimes_{A_0} B_0)$$

est bien nul par hypothèse. Enfin, pour voir que B/bB est A -plat, on remarque que

$$\text{Tor}_1^A(A_0, B/bB) = (0)$$

puisque $B_0 \xrightarrow{b_0} B_0$ est injective et on applique ([Bou] III, 5.2, Thm. 1). $\square$

Combinant (10.1) et (8.1), on obtient un premier corollaire :

COROLLAIRE (10.4). — Soient X une S -relation d'équivalence fppf (9.2) et X le S -faisceau fppf quotient. On suppose que X_0 et X_1 sont des S -espaces algébriques, que les morphismes de S -espaces algébriques $\text{pr}_1 \circ \delta$ et $\text{pr}_2 \circ \delta$ sont plats et localement de présentation finie, et que le morphisme de S -espaces algébriques δ est quasi-compact. Alors X est un S -espace algébrique.

Preuve : Il suffit de vérifier que le 1-morphisme diagonal de S -espaces $\Delta : X \rightarrow X \times_S X$ est représentable : en effet si tel est le cas, le 1-morphisme canonique $X_0 \rightarrow X$ sera représentable, fidèlement plat et localement de présentation finie, tout comme $\text{pr}_1 \circ \delta$ et $\text{pr}_2 \circ \delta$, et le 1-morphisme représentable $\Delta : X \rightarrow X \times_S X$ sera un monomorphisme (séparé et) quasi-compact, tout comme δ , de sorte que (10.4) résultera immédiatement de (10.1) et (8.1). En termes plus concrets, il suffit donc de montrer que pour tous les $U, V \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et $x \in X(U)$, $y \in X(V)$, le S -espace $U \times_{x,X,y} V$ est un S -espace algébrique.

Remarquons tout d'abord que $U \times_{x,X,y} V$ est trivialement représentable s'il existe un monomorphisme i du S -espace X dans un S -espace algébrique Y car alors

$$U \times_{x,X,y} V = U \times_{i(x),Y,i(y)} V$$

ce qui va nous permettre d'utiliser (10.4) quand cette hypothèse supplémentaire d'existence d'un tel monomorphisme i est satisfaite.

La représentabilité de $U \times_{x,X,y} V$ est aussi triviale si x et y sont les images par le morphisme canonique $X_0 \rightarrow X$ de sections $x_0 \in X_0(U)$ et $y_0 \in X_0(V)$ respectivement ($X_0 \times_X X_0$ est représentable par X_1). Bien entendu, ce n'est pas en général le cas, mais par contre il existe toujours des familles couvrantes (à un élément) $(U' \rightarrow U)$ et $(V' \rightarrow V)$ et des $x'_0 \in X_0(U')$ et $y'_0 \in X_0(V')$ relevant x et y respectivement. Alors si $x' \in X(U')$ et $y' \in X(V')$ sont les images de x et y respectivement par le morphisme canonique $X_0 \rightarrow X$, $U' \times_{x',X,y'} V'$ est représentable et $U \times_{x,X,y} V$ est un quotient de ce dernier espace algébrique par une relation d'équivalence qui satisfait clairement les hypothèses de (10.4). Comme de plus on a un monomorphisme

$$U \times_{x,X,y} V \rightarrow U \times_S V$$

on est même dans les conditions d'application du cas particulier de (10.4) déjà considéré. D'où la conclusion. $\square$

COROLLAIRE (10.4.1). — Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme de S -faisceaux fppf. On suppose que :

- (i) X est un S -espace algébrique ;
- (ii) π est représentable, fidèlement plat et localement de présentation finie ;
- (iii) $(\text{pr}_1, \text{pr}_2) : X \times_Y X \rightarrow X \times_S X$ (qui est un morphisme d'espaces algébriques d'après (i) et (ii)) est quasi-compact.

Alors Y est un S -espace algébrique.

Preuve : Ce n'est qu'une reformulation de (10.4) (cf. (0.6)). $\square$

COROLLAIRE (10.4.2). — Soit $g : Y' \rightarrow Y$ un morphisme fidèlement plat et localement de présentation finie de S -espaces algébriques. Alors g est un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée des S -espaces algébriques.

Autrement dit «les espaces algébriques forment un S -champ fppf».

Preuve : Analogie à celle de (1.6.4). $\square$

COROLLAIRE (10.5). — Soit

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_0 & \xrightarrow{G} & \mathcal{X} \\ F_0 \downarrow & \square & \downarrow F \\ \mathcal{Y}_0 & \xrightarrow{H} & \mathcal{Y} \end{array}$$

un carré 2-cartésien de 1-morphismes de S -champs fppf. On suppose que H (et donc G) est un épimorphisme (au sens fppf) et que F_0 est représentable. Alors F est aussi représentable.

Preuve : Raisonnant, mutatis mutandis, comme en (4.3.3), on se ramène au cas où $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{Y}_0$ et $\mathcal{Y}$ sont des S -espaces algébriques et où H est fidèlement plat et de présentation finie, et l'on montre alors que $\mathcal{X}$ est un S -faisceau fppf; il suffit alors d'appliquer (10.4.1) au morphisme G . $\square$

On peut maintenant généraliser (10.4) aux champs :

COROLLAIRE (10.6). — Soient X un S -faisceau fppf en groupoïdes et $\mathcal{X} = [X]_{\text{fppf}}$ le S -champ fppf associé (cf. (9.5)). On suppose que X_0 et X_1 sont des S -espaces algébriques, que les morphismes de S -espaces algébriques s et b de X_1 dans X_0 sont plats et localement de présentation finie, et que le morphisme de S -espaces algébriques $\delta = (s, b) : X_0 \rightarrow X_0 \times_S X_0$ est séparé et quasi-compact. Alors $\mathcal{X}$ est un S -champ algébrique.

Preuve : D'après (10.1), la seule chose à démontrer est la représentabilité du 1-morphisme diagonal $\mathcal{X} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ (voir le début de la preuve de (10.4)). Or cette représentabilité résulte aussitôt de (10.5). $\square$

COROLLAIRE (10.7). — Soit $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique. Alors :

(a) $\mathcal{X}$ est un S -champ fppf;

(b) si le morphisme diagonal $\mathcal{X} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ est quasi-affine, $\mathcal{X}$ est un S -champ fpqc.

Preuve : On peut écrire $\mathcal{X}$ comme le S -champ quotient d'un S -espace en groupoïdes $X_1 \rightrightarrows X_0$ comme en (4.3), où X_0 est somme de schémas affines. D'autre part on sait déjà (4.1.1) que $\mathcal{X}$ est un S -préchamp fpqc, donc un S -préchamp fppf. Désignant par $\mathcal{X}'$ (resp. $\mathcal{X}''$) le S -champ fppf (resp. fpqc) associé à $\mathcal{X}$, ceci implique que les morphismes canoniques de S -champs (étales) $\pi' : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ et $\pi'' : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}''$ sont des monomorphismes.

Il suffit donc, pour prouver (a), de montrer que π' est un épimorphisme (pour la topologie étale). Or $X_1 \rightrightarrows X_0$ est un S -faisceau fppf en groupoïdes d'après (A.4), et $\mathcal{X}''$ est évidemment son S -champ fppf quotient. Il résulte donc de (9.6) que $\mathcal{X}''$ est un S -champ algébrique, de sorte que le morphisme canonique $X_0 \rightarrow \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}''$ est représentable, et de plus lisse et surjectif (en effet cette dernière condition est locale pour la topologie fppf et est vérifiée après le changement de base $X_0 \rightarrow \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}''$ qui est un épimorphisme fppf). C'est donc en particulier un épimorphisme pour la topologie étale et a fortiori il en est de même de π' , d'où (a).

Pour montrer (b) il suffit comme ci-dessus de voir que π'' est un épimorphisme au sens étale. Soient donc $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et $x'' \in \mathcal{X}''(U)$. Par construction de $\mathcal{X}''$ comme champ associé, il existe $U_1 \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et $g : U_1 \rightarrow U$ fidèlement plat tels que $x'' \circ g \in \mathcal{X}''(U_1)$ se relève en $y : U_1 \rightarrow X_0$. Soit V un ouvert affine de X_0 par lequel y se factorise (on rappelle que X_0 est somme de schémas affines). Il suffit de montrer que le morphisme composé $U \times_{x'', \mathcal{X}''} V \rightarrow U \times_{x'', \mathcal{X}''} X_0 \rightarrow U$ est représentable, quasi-affine, lisse et surjectif (ce sera alors un épimorphisme de faisceaux étales). Or cette question est locale sur U au sens fpqc (par descente effective des schémas quasi-affines, cf. ([SGA 1] VIII, 7.9)), ce qui nous permet de remplacer U par U_1 et donc de supposer que x'' se factorise par $y : U \rightarrow V$. Mais dans ce cas, on a $U \times_{\mathcal{X}''} V = U \times_{\mathcal{X}} V$ parce que $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}''$ est un monomorphisme. Il suffit donc de remarquer que le morphisme naturel $V \rightarrow \mathcal{X}$ est représentable, lisse et (vu les hypothèses sur V et $\mathcal{X}$) quasi-affine, de sorte que le morphisme $U \times_{\mathcal{X}} V \rightarrow U$ a les mêmes propriétés et a de plus une section (donnée par y). $\square$

Enfin, on a (voir aussi ([De 2] 3.11)) :

COROLLAIRE (10.8). — Soit $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique. On suppose que, pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et tout $x \in \text{ob}(\mathcal{X}_U)$, le U -espace algébrique en groupes $\mathcal{I}\text{som}(x, x)$ est plat et localement de présentation finie. Alors, le S -faisceau fppf grossier X attaché à $\mathcal{X}$ (cf. (9.7)) est un S -espace algébrique et le 1-morphisme structural $A : \mathcal{X} \rightarrow X$ est fidèlement plat et localement de présentation finie.

Remarque (10.9) : Dire que $\mathcal{I}\text{som}(x, x)$ est U -plat pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et tout $x \in \text{ob}(\mathcal{X}_U)$, équivaut à dire que la projection canonique

$$\mathcal{X} \times_{\Delta, \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}, \Delta} \mathcal{X} \xrightarrow{\text{pr}_1} \mathcal{X}$$

est un 1-morphisme (représentable) plat de S -champs. Notons aussi qu'elle est toujours (séparée et) quasi-compacte de sorte que la condition «localement de présentation finie» pour $\mathcal{I}\text{som}(x, x)$ équivaut en fait à «de présentation finie».

Preuve de (10.8) : Fixons une présentation $X_0 \xrightarrow{P} \mathcal{X}$ de $\mathcal{X}$ de sorte que $\mathcal{X}$ est le S -champ associé au S -espace en groupoïdes

$$X_1 = X_0 \times_{P, \mathcal{X}, P} X_0 \xrightleftharpoons[b=\text{pr}_1]{s=\text{pr}_2} X_0$$

(cf. (10.7)) où X_0, X_1 sont des S -espaces algébriques, s, b lisses et $\delta = (s, b) : X_1 \rightarrow X_0 \times_S X_0$ séparé et quasi-compact. Considérons le X_0 -espace algébrique en groupes

$$G = X_1 \times_{\delta, X_0 \times_S X_0, \Delta} X_0,$$

où $X_0 \xrightarrow{\Delta} X_0 \times_S X_0$ est le morphisme diagonal, et les $X_0 \times_S X_0$ -espaces algébriques en groupes G' et G'' déduits respectivement de G par les changements de base pr_1 et $\text{pr}_2 : X_0 \times_S X_0 \rightarrow X_0$. Le $X_0 \times_S X_0$ -espace algébrique en groupes G' (resp. G'') agit librement à gauche (resp. à droite) sur le $X_0 \times_S X_0$ -espace algébrique X_1 et il est clair que les deux $X_0 \times_S X_0$ -faisceaux quotients $[X_1/G'/X_0 \times_S X_0]_{\text{fppf}}$ et $[X_1/G''/X_0 \times_S X_0]_{\text{fppf}}$ sont canoniquement isomorphes. En fait, si

$$X_1 \xrightarrow{\bar{\delta}} \bar{X}_1 \xrightarrow{I} X_0 \times_S X_0$$

est la factorisation canonique de δ en un épimorphisme de S -faisceaux fppf $\bar{\delta}$ et un monomorphisme de S -faisceaux fppf I (cf. (3.7)), les deux $X_0 \times_S X_0$ -faisceaux ci-dessus sont canoniquement isomorphes à $\bar{X}_1 \rightarrow X_0 \times_S X_0$.

Comme G est séparé, plat et de présentation finie sur X_0 par hypothèse, on déduit de ce qui précède et de (10.4) que $\bar{X}_1$ est un $X_0 \times_S X_0$ -espace algébrique et que le morphisme de S -espaces algébriques $X_1 \rightarrow \bar{X}_1$ est séparé, fidèlement plat et de présentation finie. D'après ([EGA] IV, 17.7.5 et IV, 2.2.13 (ii)), il en résulte que le monomorphisme de S -espaces algébriques $\bar{X}_1 \xrightarrow{I} X_0 \times_S X_0$ est quasi-compact et que les morphismes de S -espaces algébriques $\text{pr}_1 \circ I$ et $\text{pr}_2 \circ I$ de $\bar{X}_1$ dans X_0 sont plats et localement de présentation finie.

Une nouvelle application de (10.4) montre alors que le S -faisceau fppf quotient de X_0 par la relation d'équivalence $\bar{X}_1 \xrightarrow{I} X_0 \times_S X_0$, i.e. le S -faisceau fppf grossier X attaché à $\mathcal{X}$, est un S -espace algébrique. La dernière assertion est alors immédiate. D'où la conclusion. $\square$

Un autre type de critère pour qu'un S -champ soit algébrique provient du théorème d'algébrisation suivant d'Artin ([Ar 2] I, 1.6) :

THÉORÈME (10.10). — *Supposons S localement de type fini sur un corps ou sur un anneau de Dedekind excellent. Soient*

$$F : (\text{Aff}/S)^{\text{opp}} \rightarrow (\text{Ens})$$

un foncteur, k un corps de type fini sur S et $\bar{x} \in F(\text{Spec}(k))$.

On suppose que :

(i) *F est localement de présentation finie, i.e. que, pour tout système projectif filtrant $(U_i)_{i \in I}$ dans (Aff/S) , la flèche canonique*

$$\varinjlim_I F(U_i) \rightarrow F(\varinjlim_I U_i)$$

est bijective ;

(ii) *il existe une déformation formelle verselle $x \in F(\text{Spec}(k))$ de $\bar{x}$, i.e. il existe une $\mathcal{C}_S$ -algèbre locale complète noethérienne A , de corps résiduel k , et un $x \in F(\text{Spec}(A))$ tels que :*

(a) *x ait pour image $\bar{x}$ dans $F(\text{Spec}(k))$;*

(b) *pour toute $\mathcal{C}_S$ -algèbre locale artinienne B de corps résiduel k , tout idéal I de carré nul de B , tout homomorphisme local de $\mathcal{C}_S$ -algèbres $A \rightarrow B/I$ et tout $y \in F(\text{Spec}(B))$ ayant même image que x dans $F(\text{Spec}(B/I))$, i.e. tel que le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(B/I) & \longrightarrow & \text{Spec}(A) \\ \downarrow & & \downarrow x \\ \text{Spec}(B) & \xrightarrow{y} & F \end{array}$$

on puisse trouver un relèvement $A \rightarrow B$ de l'homomorphisme $A \rightarrow B/I$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(B/I) & \longrightarrow & \text{Spec}(A) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow x \\ \text{Spec}(B) & \xrightarrow{y} & F. \end{array}$$

Alors, il existe $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, de type fini sur S , un point fermé u de U , un isomorphisme local de $\mathcal{C}_S$ -algèbres $\hat{\mathcal{C}}_{U,u} \xrightarrow{\sim} A$ et $x' \in F(U)$ tels que x' ait même image que x dans $F(\text{Spec}(A/\mathfrak{m}^{n+1}))$, pour tout entier $n \geq 0$, où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A .

Comme application de (10.10), on a le critère suivant :

COROLLAIRE (10.11). — *Supposons que S soit localement de type fini sur un corps ou sur un anneau de Dedekind excellent et soit $\mathcal{X}$ un S -champ. Pour que $\mathcal{X}$ soit un S -champ algébrique localement de type fini, il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions suivantes :*

(i) *le 1-morphisme de S -champs diagonal*

$$\mathcal{X} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$$

est représentable, séparé et de type fini ;

(ii) $\mathcal{X}$ est localement de présentation finie, i.e. pour tout système projectif filtrant $(U_i)_{i \in I}$ dans (Aff/S) , le foncteur canonique

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ I}} \mathcal{X}_{U_i} \rightarrow \mathcal{X}_{\lim_{\substack{\longrightarrow \\ I}} U_i}$$

définit une équivalence de catégories ;

(iii) pour tout corps k de type fini sur S et tout $\bar{x} \in \text{ob } \mathcal{X}_{\text{Spec}(k)}$, il existe une extension finie séparable k' de k , une $\mathcal{O}_S$ -algèbre locale complète noethérienne A' , de corps résiduel k' , et $x' \in \text{ob } \mathcal{X}_{\text{Spec}(A')}$ tels que :

(a) le diagramme dans (Ch/S)

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(k') & \longrightarrow & \text{Spec}(k) \\ \downarrow & & \downarrow \bar{x} \\ \text{Spec}(A') & \xrightarrow{x'} & \mathcal{X} \end{array}$$

soit 2-commutatif,

(b) le 1-morphisme (représentable) $\text{Spec}(A') \xrightarrow{x'} \mathcal{X}$ soit formellement lisse au point fermé de $\text{Spec}(A')$, i.e. que, pour toute $\mathcal{O}_S$ -algèbre locale artinienne B' de corps résiduel k' , tout idéal I' de B' de carré nul, tout homomorphisme local de $\mathcal{O}_S$ -algèbres $A' \rightarrow B'/I'$ et tout $y' \in \text{ob } \mathcal{X}_{\text{Spec}(B')}$ tel que le diagramme dans (Ch/S)

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(B'/I') & \longrightarrow & \text{Spec}(A') \\ \downarrow & & \downarrow x' \\ \text{Spec}(B') & \xrightarrow{y'} & \mathcal{X} \end{array}$$

soit 2-commutatif, on puisse trouver un relèvement $A' \rightarrow B'$ de $A' \rightarrow B'/I'$ faisant 2-commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(B'/I') & \longrightarrow & \text{Spec}(A') \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow x' \\ \text{Spec}(B') & \xrightarrow{y'} & \mathcal{X}; \end{array}$$

(iv) si $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ est de type fini (sur S), si u est un point fermé de U et si $x' \in \text{ob } \mathcal{X}_U$ est formellement lisse au point u , il existe un voisinage ouvert affine V de u dans U tel que le 1-morphisme (représentable) de S -champs

$$x_V : V \rightarrow \mathcal{X}$$

soit lisse.

Preuve : Si $\mathcal{X}$ est un S -champ algébrique localement de type fini et donc localement de présentation finie, les conditions (i) à (iv) sont bien vérifiées (cf. (4.2), ([EGA] IV, 8.14.2) et ([EGA] IV, 17.14.2)).

Réciproquement, le théorème (10.10), appliqué au foncteur F des classes d'isomorphie d'objets de $\mathcal{X}$ (F est localement de présentation finie par la condition (ii)), et les conditions (iii) et (iv) permettent de construire une présentation $X \xrightarrow{P} \mathcal{X}$ où X est somme disjointe d'objets de (Aff/S) qui sont de type fini (sur S). $\square$

Remarques (10.12) : (1) Pour vérifier la condition (i) de (10.11), il suffit de montrer que pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et tous les $x, y \in \text{ob } \mathcal{X}_U$, le U -espace $\mathcal{I}om(x, y)$ est algébrique, séparé et de type fini (cf. (3.13)). Par passage à la limite (compte tenu de la condition (ii) de (10.11)), on peut se limiter aux U de type fini sur S . Par suite, pour vérifier la condition (i) de (10.11) pour le S -champ $\mathcal{X}$ (vérifiant déjà la condition (ii) de (10.11)), on peut appliquer (10.11) puis (8.1) au U -espace $\mathcal{I}om(x, y)$ pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ de type fini (sur S) et tous les $x, y \in \text{ob } \mathcal{X}_U$.

(2) Pour vérifier la condition (ii) de (10.11), on procède le plus souvent en deux étapes. Grâce au théorème de Schlessinger on montre l'existence d'une déformation formelle verselle de $\bar{x}$ ([Sch] 2.11), ([SGA 7 I] VI), ([Ar 6] 3)). Il reste à voir qu'une telle déformation formelle verselle est effective, ce qui peut résulter par exemple des théorèmes d'existence en théorie formelle de Grothendieck ([EGA] III, 5.1.4, III, 5.1.8 et III, 5.4.5).

(3) Pour une discussion plus détaillée de la condition (iv) de (10.11), on renvoie aux articles d'Artin ([Ar 2] I,3) et ([Ar 6] 4)). $\square$

Terminons ce chapitre par de nouveaux exemples de S -champs algébriques.

(10.13) Soient X un S -espace algébrique, $Y \rightarrow X$ un morphisme de S -espaces algébriques et G un X -espace algébrique en groupes que l'on suppose séparé, plat et de présentation finie sur X , opérant à droite sur le X -espace algébrique Y .

PROPOSITION (10.13.1). — *Le S -champ $[Y/G/X]$ défini en (2.4.2) et (3.4.2) est un S -champ algébrique. En particulier, le S -champ $B(G/X)$ de loc. cit. est un S -champ algébrique.*

Preuve : C'est une conséquence immédiate de (10.6). $\square$

Remarque (10.13.2) : Si, de plus, on suppose G lisse sur X , le 1-morphisme canonique $Y \rightarrow [Y/G/X]$ est une présentation et pour que $[Y/G/X]$ soit lisse sur S il faut et il suffit que Y le soit.

11. Points algébriques, faisceaux résiduels, gerbes résiduelles, dimension

(11.1) *Faisceau résiduel, gerbe résiduelle.* Fixons un point ξ d'un S -champ algébrique $\mathcal{X}$ et un représentant (x, K) de ξ . Alors, d'après l'analogie fppf de (3.7), le 1-morphisme de S -champs fppf

$$\mathrm{Spec}(K) \xrightarrow{x} \mathcal{X}$$

admet une factorisation canonique

$$\mathrm{Spec}(K) \xrightarrow{\bar{x}} \mathcal{G}_\xi \rightarrow \mathcal{X}$$

où $\mathcal{G}_\xi$ est un sous- S -champ fppf de $\mathcal{X}$ et $\bar{x}$ un épimorphisme fppf. Il est facile de vérifier que le sous- S -champ $\mathcal{G}_\xi$ de $\mathcal{X}$ est indépendant du représentant (x, K) de ξ choisi. Nous noterons $\bar{\xi}$ le S -faisceau fppf grossier attaché au S -champ fppf $\mathcal{G}_\xi$, de sorte que $\mathcal{G}_\xi$ est une gerbe fppf sur $\bar{\xi}$ (cf. (3.19)). On dira que $\bar{\xi}$ est le S -faisceau résiduel du point ξ de $\mathcal{X}$ et que $\mathcal{G}_\xi$ est sa gerbe résiduelle.

DÉFINITION (11.2). — *Un point ξ d'un S -champ algébrique $\mathcal{X}$ sera dit algébrique si les conditions suivantes sont vérifiées :*

- (i) *le S -faisceau résiduel $\bar{\xi}$ de ξ est un S -espace algébrique, nécessairement de la forme $\mathrm{Spec}(k)$, pour un S -corps k ([Kn] II, 6.2) ;*
- (ii) *le monomorphisme canonique $\mathcal{G}_\xi \rightarrow \mathcal{X}$ est représentable, de sorte que $\mathcal{G}_\xi$ est un S -champ algébrique, et même un $\bar{\xi}$ -champ algébrique (cf. (4.5)) ;*
- (iii) *le $\bar{\xi}$ -champ algébrique $\mathcal{G}_\xi$ est de type fini.*

On dira que le S -corps k défini par (11.2)(i) est le *corps résiduel* du point algébrique ξ de $\mathcal{X}$ et on le notera encore $\kappa(\xi)$.

Remarque (11.2.1) : Si ξ est un point algébrique du S -champ algébrique $\mathcal{X}$, on peut trouver un représentant (x, K) de ξ où K est une extension finie du corps résiduel $\kappa(\xi)$.

Si $P : X \rightarrow \mathcal{X}$ est une présentation du S -champ algébrique $\mathcal{X}$ (ou plus généralement si X est un S -espace algébrique et si P est fidèlement plat et localement de présentation finie) et si $x \in X(K)$ pour un corps K , on appellera *orbite* ou *classe d'équivalence* de x dans X le sous- S -espace

$$O(x) \subset X$$

image de la projection canonique $\mathrm{Spec}(K) \times_{P \circ x, \mathcal{X}, P} X \rightarrow X$. Si ξ est le point de $\mathcal{X}'$ défini par $(P \circ x, K)$, $O(x)$ n'est autre que le produit fibré $\mathcal{G}_\xi \times_{\mathcal{X}, P} X$ (et donc ne dépend que de ξ et de P). En particulier, si ξ est un point algébrique au sens de la définition ci-dessus, $O(x)$ est un $\kappa(\xi)$ -espace algébrique localement de type fini.

Exemple (11.2.2) : Soient G un S -schéma en groupes, plat et localement de présentation finie, opérant à gauche sur un S -espace algébrique X . On suppose que le morphisme $G \times_S X \rightarrow X \times_S X$, $(g, x) \mapsto (gx, x)$, est quasi-compact, de sorte que le S -champ quotient $\mathcal{X}' = [X/G/S]$ est algébrique d'après (10.4). Alors, pour tout corps K et tout $x \in X(K)$, d'image un point algébrique ξ de $\mathcal{X}'$, la notion d'orbite de x dans X est la notion usuelle. En particulier, cette orbite $O(x)$ est un espace homogène sous le $\kappa(\xi)$ -schéma en groupes $G_{\kappa(\xi)} := \mathrm{Spec}(\kappa(\xi)) \times_S G$ et le K -schéma $K \otimes_{\kappa(\xi)} O(x)$ n'est autre que le quotient G_K/H où $H \subset G_K := K \otimes_{\kappa(\xi)} G_{\kappa(\xi)}$ est le fixateur de x . (On remarquera que, si l'on suppose de plus X localement noethérien, le S -champ algébrique $\mathcal{X}' = [X/G/S]$ vérifie les hypothèses du théorème ci-dessous.)

THÉOREME (11.3). — *Soit $\mathcal{X}'$ un S -champ algébrique localement noethérien. Alors, tout point ξ de $\mathcal{X}'$ est algébrique.*

Preuve de (11.3) : Fixons un point ξ de $\mathcal{X}'$. Alors, on peut trouver un S -schéma intègre Y et un 1-morphisme (représentable) de type fini $F : Y \rightarrow \mathcal{X}'$ tels que le point générique (y, L) de Y définisse un représentant de ξ via F (prendre pour Y un ouvert dense assez petit de l'adhérence d'un point (y, L) qui représente ξ dans une présentation de $\mathcal{X}'$, (cf. (5.3)).

Quitte à remplacer Y par un ouvert dense assez petit, on peut supposer que les deux projections canoniques (de type fini)

$$\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : Y \times_{F, \mathcal{X}', F} Y \rightarrow Y$$

sont plates et que le Y -espace algébrique en groupes (séparé et de type fini)

$$\mathcal{X}' \times_{\Delta, \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}', (F, F)} Y \rightarrow Y$$

est plat (théorème de platitude générique, ([EGA] IV, 6.9.1)).

Considérons maintenant la factorisation fppf canonique (cf. (3.7))

$$Y \xrightarrow{\bar{F}} \mathcal{Y} \xrightarrow{I} \mathcal{X}'$$

du 1-morphisme de S -champs fppf F et montrons que I est représentable et donc que $\mathcal{Y}$ est un S -champ algébrique (cf. (4.5)(ii)). Pour tout $U \in \mathrm{ob}(\mathrm{Aff}/S)$ et tout $x \in \mathrm{ob} \mathcal{X}'_U$, le U -faisceau $\mathcal{Y} \times_{I, \mathcal{X}', x} U$ est l'image (au sens des faisceaux fppf) du morphisme localement de présentation finie de U -espaces algébriques

$$Y \times_{F, \mathcal{X}', x} U \rightarrow U$$

et c'est donc aussi le quotient fppf de $Y \times_{F, \mathcal{X}', x} U$ par la relation d'équivalence $(Y \times_{F, \mathcal{X}', x} U) \times_U (Y \times_{F, \mathcal{X}', x} U)$. Or, vu notre choix de Y ,

$$\mathrm{pr}_1 : (Y \times_{F, \mathcal{X}', x} U) \times_U (Y \times_{F, \mathcal{X}', x} U) \rightarrow Y \times_{F, \mathcal{X}', x} U$$

est un morphisme plat, et donc $\mathcal{Y} \times_{I, \mathcal{X}', x} U$ est un U -espace algébrique d'après (10.4). D'où la représentabilité de I . De plus, il est clair que $\bar{F} : Y \rightarrow \mathcal{Y}$ est (représentable) fidèlement plat et de type fini et que $\mathcal{Y}$ est (un S -champ algébrique) intègre et de type fini sur $\mathcal{X}'$.

Cela étant, vu le choix de Y , $\mathcal{Y}$ vérifie les hypothèses et donc les conclusions de (10.8). Le S -faisceau fppf grossier $\bar{Y}$ associé à $\mathcal{Y}$ est donc un S -espace algébrique intègre et $\mathcal{Y}$ est une gerbe (au sens fppf) fidèlement plate et de type fini sur $\bar{Y}$.

Pour conclure, il reste à remarquer que le S -faisceau fppf $\bar{\xi}$ n'est autre que le point générique de $\bar{Y}$ et que $\mathcal{G}_\xi$ n'est autre que la gerbe

$$\mathcal{Y} \times_{A, \bar{Y}} \bar{\xi} \rightarrow \bar{\xi}$$

déduite de la gerbe $\mathcal{Y} \xrightarrow{A} \bar{Y}$ par le changement de base $\bar{\xi} \rightarrow \bar{Y}$. $\square$

COROLLAIRE (11.4). — *Soit S un S -champ algébrique noethérien. L'application qui à ξ associe la gerbe $\mathcal{G}_\xi$ sur $\bar{\xi}$ définit une bijection de l'ensemble des points de $\mathcal{X}'$ sur l'ensemble des classes d'isomorphie de couples*

$$(\mathcal{G} \xrightarrow{A} \mathrm{Spec}(k), \mathcal{G} \xrightarrow{I} \mathcal{X}')$$

où $\mathcal{G}$ est une gerbe fppf sur un S -corps k et où $\mathcal{G} \xrightarrow{I} \mathcal{X}'$ est un monomorphisme de S -champs.

Une autre conséquence du corollaire (10.8) et du théorème de platitude générique ([EGA] IV, 6.9.1) est le théorème suivant :

THÉOREME (11.5). — *Soit $\mathcal{X}'$ un S -champ algébrique noethérien. Alors, il existe une famille finie $(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$ de sous- S -champs localement fermés de $\mathcal{X}'$, qui sont (des S -champs algébriques) réduits, avec les propriétés suivantes :*

- (i) $\mathcal{X}'$ est réunion disjointe des $\mathcal{X}_i$ ($i \in I$) ;
- (ii) chaque $\mathcal{X}_i$ est une gerbe fppf sur un S -espace algébrique noethérien

X_i , et le morphisme structural $\mathcal{X}_i \xrightarrow{A_i} X_i$ est fidèlement plat et de type fini.

Remarque (11.5.1) : L'ensemble des points de $\mathcal{X}'$ est en bijection canonique avec la réunion disjointe des ensembles des points des X_i ($i \in I$). Si ξ est un point de $\mathcal{X}'$, $\bar{\xi} = \mathrm{Spec}(\kappa(\bar{\xi}))$ est un point d'un X_i et alors $\mathcal{G}_\xi$ n'est autre que la gerbe $\mathcal{X}_i \times_{A_i, X_i} \bar{\xi}$ sur $\bar{\xi}$.

Remarque (11.5.2) : (Cette remarque a été proposée par le rapporteur.) Supposons que les S -espaces algébriques en groupes d'automorphismes des

objets de $\mathcal{X}$ soient propres et de présentation finie, ou bien soient à fibres connexes. Alors on a une stratification *canonique* de $\mathcal{X}$ par des sous-champs localement fermés (mais pas nécessairement réduits) que l'on obtient en platisant les espaces algébriques en groupes d'automorphismes. Chaque strate est une gerbe sur son espace grossier

Preuve de (11.5) : Le théorème de platitude générique ([EGA] IV, 6.9.1) et son corollaire ([EGA] IV, 6.9.3), qui s'étendent tels quels aux 1-morphismes représentables entre S -champs algébriques, assurent qu'il existe une famille $(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$ de sous- S -champs localement fermés de $\mathcal{X}$, réduits en tant que S -champs algébriques, telle que

- (i) $\mathcal{X}$ soit réunion disjointe des $\mathcal{X}_i$ ($i \in I$);
- (ii) pour chaque $i \in I$, la restriction à $\mathcal{X}_i$ du 1-morphisme représentable et de type fini de S -champs

$$\mathcal{X} \times_{\Delta, \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}, \Delta} \mathcal{X} \xrightarrow{\text{pr}_1} \mathcal{X}$$

soit plate.

Alors, $\mathcal{X}_i$ est un S -champ algébrique noethérien qui vérifie les hypothèses de (10.8). D'où la conclusion. $\square$

Nous allons maintenant étendre la notion de dimension des S -schémas aux S -champs algébriques localement noethériens.

Rappelons que, si X est un S -schéma, la *dimension* $\dim(X) \in \mathbb{N} \cup \{\pm\infty\}$ de X est définie comme la borne supérieure des longueurs des chaînes de parties fermées irréductibles de X et que, si x est un point de X , la dimension $\dim_x(X)$ de X en x est la borne inférieure de l'ensemble des dimensions des voisinages ouverts de x dans X (pour la topologie de Zariski). On rappelle aussi que

$$(11.6) \quad \dim(X) = \sup_{x \in X} \delta_x(X) \in \mathbb{N} \cup \{\pm\infty\},$$

([EGA] IV, 5.14), où

$$(11.7) \quad \delta_x(X) = \dim(\mathcal{O}_{X,x}) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

est la dimension de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ de X en x .

Si X est un schéma localement de type fini sur un corps k et si x est un point de X , alors $\dim_x(X) \in \mathbb{N}$ et on a ([EGA] IV, 5.2.3)

$$(11.8) \quad \dim_x(X) = \delta_x(X) + \deg.\text{tr}(\kappa(x)/k)$$

où $\deg.\text{tr}(\kappa(x)/k)$ est le degré de transcendance du corps résiduel $\kappa(x)$ de x sur k .

Si $X \xrightarrow{f} Y$ est un morphisme localement de type fini de S -schémas et si x est un point de X d'image y dans Y , la *dimension relative* de f en x est par définition l'entier

$$(11.9) \quad \dim_x(f) = \dim_x(X_y).$$

La fonction $\dim(f) : X \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $x \mapsto \dim_x(f)$ est semi-continue supérieurement (Théorème de Chevalley ([EGA] IV, 13.1.3)).

Cette notion de dimension relative est surtout utile lorsque f est supposé de plus lisse. Rappelons les résultats suivants de ([EGA] IV, §17.10) :

PROPOSITION (11.10). — *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme lisse de schémas. Pour tout point $x \in X$, le $\mathcal{O}_{X,x}$ -module $\Omega_{X/Y,x}^1$ est libre de rang $\dim_x(f)$.*

En particulier, la fonction $\dim(f) : X \rightarrow \mathbb{N}$ est continue, et f est étale en $x \in X$ si et seulement si $\dim_x(f) = 0$. $\square$

COROLLAIRE (11.11). — *Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux morphismes lisses de schémas. Pour tout point $x \in X$, on a*

$$\dim_x(g \circ f) = \dim_x(f) + \dim_{f(x)}(g).$$

$\square$

COROLLAIRE (11.12). — *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme lisse de schémas. La fonction $\dim(f) : X \rightarrow \mathbb{N}$ est compatible aux changements de bases : pour tout carré cartésien de morphismes de schémas*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{a} & X \\ f' \downarrow & \square & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{b} & Y \end{array}$$

et tout point $x' \in X'$ on a

$$\dim_{x'}(f') = \dim_{a(x')}(f).$$

$\square$

Rappelons aussi la proposition suivante :

PROPOSITION (11.13). — *Soient X et Y deux S -schémas localement noethériens et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme lisse. Alors, pour tout point x de X d'image y dans Y , on a l'égalité*

$$\dim_x(X) = \dim_x(f) + \dim_y(Y).$$

En particulier, si f est étale, et donc purement de dimension relative 0, on a

$$\dim_x(X) = \dim_y(Y).$$

Preuve : Quitte à remplacer X et Y par des voisinages ouverts de x et y on peut supposer que f est surjectif et purement de dimension relative n , et il s'agit de démontrer que, sous ces hypothèses supplémentaires, on a

$$\dim(X) = n + \dim(Y).$$

Mais, pour tout point $x \in X$ d'image y dans Y on a

$$\delta_x(X) = \delta_y(Y) + \delta_x(X_y) = \delta_y(Y) + n - \deg.\text{tr}(\kappa(x)/\kappa(y))$$

d'après ([EGA] IV, 6.1.2) et (11.8), et donc

$$\delta_x(X) \leq \delta_y(Y) + n$$

avec égalité si x est un point fermé du $\kappa(y)$ -schéma localement de type fini X_y . Par suite

$$\dim(X) = \sup_{x \in X} \delta_x(X) = \sup_{y \in Y} \delta_y(Y) + n = \dim(Y) + n$$

puisque chaque fibre X_y contient toujours au moins un point fermé. $\square$

Si X est un S -espace algébrique localement noethérien et x un point de X , la dimension de X en x , $\dim_x(X)$, est par définition la valeur commune des $\dim_{x_0}(X_0)$ pour tous les couples (X_0, x_0) avec X_0 un S -schéma étale au-dessus de X et x_0 un point de X_0 d'image x dans X .

Si $X \xrightarrow{f} Y$ est un morphisme localement de type fini de S -espaces algébriques et x un point de X d'image y dans Y , on définit encore la dimension relative de f en x par $\dim_x(f) = \dim_x(X_y)$. La fonction $\dim(f) : X \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $x \mapsto \dim_x(f)$ est toujours semi-continue supérieurement. De plus, avec cette définition, les énoncés (11.10) à (11.13) s'étendent sans modification aux S -espaces algébriques.

Nous allons maintenant définir la dimension $\dim_\xi(\mathcal{X})$ d'un S -champ algébrique localement noethérien $\mathcal{X}$ en un point ξ .

Si $P : X \rightarrow \mathcal{X}$ est une présentation d'un S -champ algébrique $\mathcal{X}$ et si x est un point de X , on définit la dimension relative de P en x , $\dim_x(P)$, comme la dimension relative en (x, x) du morphisme lisse de S -espaces algébriques $\text{pr}_1 : X \times_{P, \mathcal{X}, P} X \rightarrow X$. Pour tout morphisme de S -champs algébriques $Q : Y \rightarrow \mathcal{X}$ où Y est un S -espace algébrique, et pour tout point z de $Y \times_{Q, \mathcal{X}, P} X$ d'image x par la seconde projection canonique, on a bien entendu

$$\dim_x(P) = \dim_z(\text{pr}_Y)$$

où $\text{pr}_Y : Y \times_{Q, \mathcal{X}, P} X \rightarrow Y$ est la première projection canonique. La fonction $\dim(P) : X \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $x \mapsto \dim_x(P)$ est compatible aux changements de bases et continue.

Si $\mathcal{X}$ est un S -champ algébrique localement noethérien et si ξ est un point de $\mathcal{X}$ on définit alors la *dimension de $\mathcal{X}$ en ξ* comme l'entier

$$(11.14) \quad \dim_\xi(\mathcal{X}) = \dim_x(X) - \dim_x(P)$$

où $X \xrightarrow{P} \mathcal{X}$ est une présentation arbitraire de $\mathcal{X}$ et x est un point arbitraire de X au-dessus de ξ (cf. (5.3)). Que cette définition ne dépende pas des choix effectués résulte aussitôt des énoncés (11.10) à (11.13).

On posera aussi, pour tout S -champ algébrique localement noethérien $\mathcal{X}$,

$$(11.15) \quad \dim(\mathcal{X}) = \sup_{\xi} \dim_\xi(\mathcal{X}),$$

où ξ parcourt les points de $\mathcal{X}$.

Remarque (11.16) : (i) Si $\mathcal{X}$ est noethérien et non vide, $\dim(\mathcal{X})$ est un entier. En général, $\dim(\mathcal{X}) \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ et $\dim(\mathcal{X}) = -\infty$ si et seulement si $\mathcal{X}$ est vide.

(ii) Contrairement à ce qui se passe pour les S -espaces algébriques, $\dim_\xi(\mathcal{X})$ et $\dim(\mathcal{X})$ peuvent être des entiers négatifs. Par exemple, si G est un schéma en groupes lisse de type fini sur un S -corps k , $\dim(\text{B}(G/k))$ est égal à $-\dim(G)$.

(11.17) *Un exemple.* Nous terminerons ce chapitre par un exemple qui illustre les diverses notions que l'on vient d'introduire.

Fixons un entier $m \geq 1$. Pour tout schéma affine $U = \text{Spec}(R)$, notons simplement $\pi : A_U \rightarrow U$ la droite affine $\text{Spec}(R[T])$ sur U et considérons la catégorie $\mathcal{X}_U$ des $\mathcal{O}_{A_U}$ -Modules cohérents $\mathcal{M}$ qui sont U -plats et tels que $\pi_* \mathcal{M}$ soit un $\mathcal{O}_U$ -Module localement libre de rang m . Le foncteur «sections globales» identifie cette catégorie à celle des R -modules M localement libres de rang m munis d'un endomorphisme $t : M \rightarrow M$.

Pour U variable, les catégories $\mathcal{X}_U$ s'organisent en un champ $\mathcal{X}$ sur $\mathbb{Z}$. Ce champ est algébrique : en fait, on a un 1-isomorphisme

$$\mathcal{X} = [\mathfrak{g}/G/\mathbb{Z}]$$

où G est le schéma en groupes $\text{GL}_{m, \mathbb{Z}}$, $\mathfrak{g}$ est son algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_{m, \mathbb{Z}}$ et l'action de G sur $\mathfrak{g}$ est l'action adjointe, i.e. l'action par conjugaison.

La théorie des diviseurs élémentaires associe à tout endomorphisme t d'un espace vectoriel M de dimension m sur un corps k une suite $(P_1(T), \dots, P_m(T))$ de polynômes unitaires à coefficients dans k , caractérisée par les deux propriétés suivantes :

- (i) $P_i(T)$ divise $P_{i-1}(T)$ pour tout $i = 2, \dots, m$;
- (ii) le $k[T]$ -module M , où T agit comme l'endomorphisme t , est isomorphe à

$$k[T]/(P_1(T)) \oplus \dots \oplus k[T]/(P_m(T)).$$

Bien entendu le produit $P_1(T) \cdots P_m(T)$ est le polynôme caractéristique de t et les degrés $d_1 \geq \dots \geq d_m \geq 0$ de ces polynômes forment une partition de m .

Pour chaque partition $d = (d_1 \geq \dots \geq d_m \geq d_{m+1} = 0)$ de m , notons $\mathcal{X}_d$ la *nappe de Dixmier* correspondante, i.e. le sous-champ localement fermé réduit de $\mathcal{X}$ formé des (M, t) pour lesquels les diviseurs élémentaires sont de degrés $d_1, \dots, d_m$, et notons X_d le schéma affine des suites de polynômes unitaires $(Q_1(T), \dots, Q_m(T))$ de degrés $d_1 - d_2, \dots, d_m - d_{m+1}$. Alors $\mathcal{X}$ est réunion disjointe des $\mathcal{X}_d$ et, pour chaque d , le morphisme de champs

$$A_d : \mathcal{X}_d \rightarrow X_d,$$

qui envoie (M, t) sur la suite de polynômes

$$\left(Q_1(T) = \frac{P_1(T)}{P_2(T)}, \dots, Q_m(T) = \frac{P_m(T)}{P_{m+1}(T)} \right)$$

où $(P_1(T), P_2(T), \dots, P_m(T))$ sont les diviseurs élémentaires de (M, t) et $P_{m+1}(T) = 1$, est une gerbe. Cette gerbe est neutre car elle admet la section

$$S_d : X_d \rightarrow \mathcal{X}_d$$

qui envoie $(Q_1(T), \dots, Q_m(T)) \in X_d(R)$ sur le $R[T]$ -module «compagnon»

$$M = R[T]/(Q_1(T)Q_2(T) \cdots Q_m(T)) \oplus R[T]/(Q_2(T) \cdots Q_m(T)) \oplus \cdots \oplus R[T]/(Q_m(T))$$

pour tout anneau R . On a donc

$$\mathcal{X}_d = B(Z_d/X_d)$$

où Z_d est le X_d -schéma en groupes des automorphismes du module compagnon universel sur X_d .

On laisse au lecteur le soin de vérifier les formules suivantes pour les dimensions des champs ci-dessus

$$\dim(\mathcal{X}) = 0$$

et, pour toute partion d ,

$$\dim(X_d) = \sum_{i=1}^m (d_i - d_{i+1}),$$

$$\dim(Z_d) = \sum_{i=1}^m (d_i^*)^2$$

et donc

$$\dim(\mathcal{X}_d) = \sum_{i=1}^m (d_i - d_{i+1}) - \sum_{i=1}^m (d_i^*)^2$$

où $d^* = (d_1^* \geq \dots \geq d_m^* \geq d_{m+1}^* = 0)$ est la partition duale de d , définie par $d_i^* = |\{j = 1, \dots, m \mid d_j \geq i\}|$

12. Faisceaux sur le site lisse-étale d'un $\mathcal{S}$ -champ algébrique

DÉFINITION (12.1). — (i) Soit $\mathcal{X}$ un $\mathcal{S}$ -champ algébrique. On appelle site lisse-étale de $\mathcal{X}$ et on note $\text{Lis-ét}(\mathcal{X})$ le site défini comme suit.

La catégorie sous-jacente à $\text{Lis-ét}(\mathcal{X})$ a pour objets les 1-morphismes (représentables) lisses de $\mathcal{S}$ -champs algébriques, $u : U \rightarrow \mathcal{X}$ où U est un $\mathcal{S}$ -espace algébrique, objets que l'on notera encore (U, u) et que l'on appellera les ouverts lisses-étales de $\mathcal{X}$. Une flèche de (U, u) dans (V, v) est un couple (φ, α) constitué d'un 1-morphisme de $\mathcal{S}$ -espaces algébriques $U \xrightarrow{\varphi} V$ et d'un 2-isomorphisme $\alpha : u \xrightarrow{\sim} v \circ \varphi$.

La topologie sur cette catégorie est celle engendrée par la prétopologie pour laquelle $\text{Cov}(U, u)$ est l'ensemble des familles de morphismes $((\varphi_i, \alpha_i) : (U_i, u_i) \rightarrow (U, u))_{i \in I}$ telles que le 1-morphisme de $\mathcal{S}$ -espaces algébriques

$$\prod_{i \in I} \varphi_i : \prod_{i \in I} U_i \rightarrow U$$

soit étale et surjectif.

(ii) Si $\mathcal{X}$ est un $\mathcal{S}$ -champ de Deligne-Mumford, on appelle site étale de $\mathcal{X}$ et on note $\text{Ét}(\mathcal{X})$ le site défini comme suit.

La catégorie sous-jacente à $\text{Ét}(\mathcal{X})$ est la sous-catégorie pleine de $\text{Lis-ét}(\mathcal{X})$ dont les objets sont les ouverts lisses-étales (U, u) de $\mathcal{X}$ tels que $u : U \rightarrow \mathcal{X}$ soit étale. Ces objets seront appelés les ouverts étales de $\mathcal{X}$.

La topologie sur cette catégorie est la topologie induite par celle de $\text{Lis-ét}(\mathcal{X})$.

Remarque (12.1.1) : Si $\mathcal{X}$ est un $\mathcal{S}$ -champ de Deligne-Mumford, la définition ci-dessus diffère légèrement de celle donnée dans [De-Mu] (4.10) : on ne demande pas que U soit un $\mathcal{S}$ -schéma. Par contre, si $\mathcal{X} = X$ est un $\mathcal{S}$ -espace algébrique, le site étale défini ci-dessus est exactement celui défini par Knutson ([Kn] (2.2)). En particulier, si $\mathcal{X} = X$ est un $\mathcal{S}$ -schéma, le site étale ci-dessus n'est pas exactement celui introduit par Grothendieck ([SGA 4] VII). (On remarquera cependant qu'un espace algébrique étale et séparé sur un schéma est automatiquement un schéma d'après (A.2).)

Ces différences sont sans importance car les topologies associées sont équivalentes comme on va le voir ci-dessous.

Pour tout site $\text{Top}(\mathcal{S})$ où «Top» désigne une topologie, on notera $\mathcal{K}_{\text{op}}$ le topos associé, i.e. la catégorie des faisceaux d'ensembles sur ce site. On appellera encore *faisceaux «top»* les objets de ce topos.

Si $\mathcal{X}'$ est un S -champ algébrique (resp. de Deligne-Mumford) on dispose donc du topos $\mathcal{X}_{\text{lis-ét}}$ des faisceaux lisses-étales sur $\mathcal{X}'$ (resp. du topos $\mathcal{X}_{\text{ét}}$ des faisceaux étales sur $\mathcal{X}'$).

LEMME (12.1.2). — (i) Soit $\mathcal{X}'$ un S -champ algébrique. Notons $\underline{\text{Lis-ét}}(\mathcal{X}')$ la sous-catégorie pleine de $\text{Lis-ét}(\mathcal{X}')$ dont les objets sont les (U, u) avec $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, munie de la topologie engendrée par la prétopologie pour laquelle $\text{Cov}(U, u)$ est l'ensemble des familles finies $((\varphi_i, \alpha_i) : (U_i, u_i) \rightarrow (U, u))_{i \in I}$ de morphismes telles que le morphisme de S -schémas $\coprod_{i \in I} \varphi_i : \coprod_{i \in I} U_i \rightarrow U$ soit étale et surjectif.

Alors, le foncteur d'inclusion $\underline{\text{Lis-ét}}(\mathcal{X}') \hookrightarrow \text{Lis-ét}(\mathcal{X}')$ induit une équivalence du topos $\mathcal{X}_{\text{lis-ét}}$ sur le topos $\mathcal{X}_{\underline{\text{lis-ét}}}$.

(ii) Soit $\mathcal{X}'$ un S -champ de Deligne-Mumford. Notons $\underline{\text{Ét}}(\mathcal{X}')$ la sous-catégorie pleine de $\text{Lis-ét}(\mathcal{X}')$ dont les objets sont les (U, u) avec $u : U \rightarrow \mathcal{X}'$ étale, munie de la topologie induite par celle de $\underline{\text{Lis-ét}}(\mathcal{X}')$.

Alors, le foncteur d'inclusion $\underline{\text{Ét}}(\mathcal{X}') \hookrightarrow \text{Ét}(\mathcal{X}')$ induit une équivalence du topos $\mathcal{X}_{\text{ét}}$ sur le topos $\mathcal{X}_{\underline{\text{ét}}}$.

Preuve : Tout ouvert lisse-étale (U, u) de $\mathcal{X}'$ peut être recouvert par une famille (infinie en général) de $(U_i, u_i) \in \text{ob} \underline{\text{Lis-ét}}(\mathcal{X}')$ et on peut appliquer ([SGA 4] III, 4.1). Il reste à remarquer que, de toute famille couvrante $((U_i, u_i) \xrightarrow{(\varphi_i, \alpha_i)} (U, u))_{i \in I}$ dans $\text{Lis-ét}(\mathcal{X}')$ où U et les U_i sont des schémas affines, on peut extraire une sous-famille couvrante finie et donc couvrante dans $\underline{\text{Lis-ét}}(\mathcal{X}')$ (U est quasi-compact et chaque $U_i \xrightarrow{\varphi_i} U$ est ouvert d'après ([EGA] IV, 2.4.6)). $\square$

Dans la suite on identifiera les topos $\mathcal{X}_{\text{lis-ét}}$ et $\mathcal{X}_{\underline{\text{lis-ét}}}$ (et aussi les topos $\mathcal{X}_{\text{ét}}$ et $\mathcal{X}_{\underline{\text{ét}}}$ si $\mathcal{X}'$ est de Deligne-Mumford) par cette équivalence.

(12.2) Pour tout morphisme continu de sites $f^{-1} : \text{Top}(\mathcal{S}) \rightarrow \text{Top}(\mathcal{S}')$ on notera $f = (f^{-1}, f_*) : \mathcal{S}'_{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}_{\text{op}}$ le morphisme de topos associé (on utilise donc la notation f^{-1} pour désigner l'adjoint à gauche du foncteur f_* , la notation f^* étant réservée pour désigner l'adjoint à gauche du foncteur f_* dans le cadre des topos annelés).

Si (U, u) est un ouvert lisse-étale de $\mathcal{X}'$, tout faisceau lisse-étale $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{X}'$ définit par restriction un faisceau étale sur U que l'on notera $\mathcal{F}_{U, u}$. Si $\varphi : (U, u) \rightarrow (V, v)$ est une flèche dans $\text{Lis-ét}(\mathcal{X}')$, pour tout faisceau lisse-étale $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{X}'$ le morphisme de S -espaces algébriques φ induit un morphisme de faisceaux étales

$$\theta_{\varphi, \alpha} : \mathcal{F}_{V, v} \rightarrow \varphi_* \mathcal{F}_{U, u},$$

et donc par adjonction, un morphisme de faisceaux étales

$$\theta_{\varphi, \alpha}^h : \varphi^{-1} \mathcal{F}_{V, v} \rightarrow \mathcal{F}_{U, u}.$$

LEMME (12.2.1). — La catégorie des faisceaux lisses-étales $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{X}'$ est équivalente à la catégorie des systèmes

$$(\mathcal{F}_{U, u}, \theta_{\varphi, \alpha})$$

où, pour chaque ouvert lisse-étale (U, u) de $\mathcal{X}'$, $\mathcal{F}_{U, u}$ est un faisceau étale sur U , et où, pour chaque morphisme $(\varphi, \alpha) : (U, u) \rightarrow (V, v)$ entre tels ouverts, $\theta_{\varphi, \alpha} : \mathcal{F}_{V, v} \rightarrow \varphi_* \mathcal{F}_{U, u}$ est un morphisme de faisceaux étales, les $\theta_{\varphi, \alpha}$ vérifiant de plus les deux conditions suivantes :

(i) pour toute flèche composée $(U, u) \xrightarrow{(\varphi, \alpha)} (V, v) \xrightarrow{(\psi, \beta)} (W, w)$ dans $\text{Lis-ét}(\mathcal{X}')$, on a

$$\psi_* \theta_{\varphi, \alpha} \circ \theta_{\psi, \beta} = \theta_{\psi \circ \varphi, \varphi_* \beta \circ \alpha};$$

(ii) pour toute flèche $(U, u) \xrightarrow{(\varphi, \alpha)} (V, v)$ dans $\text{Lis-ét}(\mathcal{X}')$ avec $\varphi : U \rightarrow V$ étale, le morphisme de faisceaux étales $\theta_{\varphi, \alpha}^h : \varphi^{-1} \mathcal{F}_{V, v} \rightarrow \mathcal{F}_{U, u}$ est un isomorphisme.

Preuve : Si $\varphi : U \rightarrow V$ est étale, alors pour tout faisceau étale d'ensembles $\mathcal{S}$ sur V , $\varphi^{-1} \mathcal{S}$ n'est autre que la restriction de $\mathcal{S}$ à $\text{Ét}(U) \rightarrow \text{Ét}(V)$. Par suite, si $\mathcal{F}$ est un faisceau lisse-étale sur $\mathcal{X}'$, $\theta_{\varphi, \alpha}^h$ est bien un isomorphisme dès que φ est étale.

Inversement, montrons comment construire un faisceau lisse-étale $\mathcal{F}$ à partir d'un système $(\mathcal{F}_{U, u}, \theta_{\varphi, \alpha})$. Pour tout ouvert lisse-étale (U, u) de $\mathcal{X}'$ on pose

$$\mathcal{F}(U, u) = \mathcal{F}_{U, u}(U),$$

et pour toute flèche $(U, u) \xrightarrow{(\varphi, \alpha)} (V, v)$ de $\text{Lis-ét}(\mathcal{X}')$, on prend $\theta_{\varphi, \alpha}(V)$ comme flèche de restriction de $\mathcal{F}(V, v)$ à $\mathcal{F}(U, u)$. Le fait que $\mathcal{F}$ ainsi défini soit un faisceau lisse-étale sur $\mathcal{X}'$ résulte de ce que les $\mathcal{F}_{U, u}$ sont des faisceaux étales et de la condition (ii). $\square$

Remarque (12.2.2) : Le topos $\mathcal{X}_{\text{lis-ét}}$ a suffisamment de points : en effet tout couple $((U, u), \xi)$ formé d'un ouvert lisse-étale (U, u) de $\mathcal{X}'$ et d'un point géométrique ξ de U définit un point du topos $\mathcal{X}_{\text{lis-ét}}$ par $\mathcal{F} \mapsto (\mathcal{F}_{U, u})_{\xi}$; une flèche $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ entre deux faisceaux lisses-étales sur $\mathcal{X}'$ est un isomorphisme si et seulement si, pour tout couple $((U, u), \xi)$ comme ci-dessus, $(\alpha_{U, u})_{\xi}$ est bijective. Deux couples $((U, u), \xi)$ et $((U', u'), \xi')$ définissent le même point du topos $\mathcal{X}_{\text{lis-ét}}$ s'il existe un morphisme $(\varphi, \alpha) : (U, u) \rightarrow (U', u')$ dans $\text{Lis-ét}(\mathcal{X}')$ avec $\varphi : U \rightarrow U'$ étale, et qui envoie ξ sur ξ' .

Remarque (12.2.3) : Pour (U, u) fixé dans $\text{Lis-ét}(\mathcal{X}')$, il est immédiat que le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{U, u}$ de $\mathcal{X}_{\text{lis-ét}}$ dans $U_{\text{ét}}$ commute aux limites inductives et projectives arbitraires. En d'autres termes, les calculs de limites inductives et

projectives dans $\mathcal{X}_{\text{lis-ét}}$ se ramènent, par l'équivalence (12.2.1), à des calculs similaires sur les faisceaux étales sur des schémas.

DÉFINITION (12.3). — *Un faisceau lisse-étale d'ensembles $\mathcal{F}$ sur le S -champ algébrique $\mathcal{X}$ est dit cartésien si pour toute flèche $(\varphi, \alpha) : (U, u) \rightarrow (V, v)$ dans $\text{Lis-ét}(\mathcal{X})$, le morphisme de faisceaux étales $\theta_{\varphi, \alpha}^{\mathcal{F}} : \varphi^{-1} \mathcal{F}_{V, v} \rightarrow \mathcal{F}_{U, u}$ est un isomorphisme.*

Remarque (12.3.1) : Pour qu'un faisceau lisse-étale $\mathcal{F}$ soit cartésien, il suffit qu'il vérifie la condition de la définition ci-dessus pour les (φ, α) tels que $\varphi : U \rightarrow V$ soit lisse. En effet, toute flèche (φ, α) de $\text{Lis-ét}(\mathcal{X})$ se factorise en

$$(U, u) \xrightarrow{\Gamma_{(\varphi, \alpha)}} (U \times_{u, \mathcal{X}, v} V, v \circ \text{pr}_2) \xrightarrow{\text{pr}_{(V, v)}} (V, v)$$

où $\Gamma_{(\varphi, \alpha)}$ est le graphe de (φ, α) et $\text{pr}_{(V, v)}$ la projection canonique. Or $\Gamma_{(\varphi, \alpha)}$ admet comme rétraction la projection canonique $\text{pr}_{(U, u)}$ et les projections canoniques $\text{pr}_U : U \times_{u, \mathcal{X}, v} V \rightarrow U$ et $\text{pr}_V : U \times_{u, \mathcal{X}, v} V \rightarrow V$ sont lisses.

En outre, pour tout faisceau lisse-étale $\mathcal{F}$, le morphisme $\theta_{\varphi, \alpha}^{\mathcal{F}}$ est de toute façon un monomorphisme si $\varphi : U \rightarrow V$ est lisse. En effet, cette propriété se vérifie sur les fibres aux points géométriques de U , elle est vérifiée si φ est étale, et tout point géométrique $\xi : \text{Spec}(k) \rightarrow U$ se factorise par un U -espace algébrique qui est étale sur V .

Remarque (12.3.2) : La sous-catégorie pleine $\mathcal{X}_{\text{lis-ét, cart}}$ de $\mathcal{X}_{\text{lis-ét}}$ dont les objets sont les faisceaux cartésiens est stable par limites inductives quelconques et limites projectives finies : c'est une conséquence des définitions, de la remarque (12.2.3), et des propriétés correspondantes des foncteurs φ^{-1} entre catégories de faisceaux étales sur les espaces algébriques.

PROPOSITION (12.3.3). — *Si $\mathcal{X}$ est un S -champ de Deligne-Mumford (et donc en particulier si $\mathcal{X}$ est un S -espace algébrique ou un S -schéma), le foncteur d'inclusion $\text{Ét}(\mathcal{X}) \hookrightarrow \text{Lis-ét}(\mathcal{X})$ induit une équivalence de la sous-catégorie pleine $\mathcal{X}_{\text{lis-ét, cart}}$ de $\mathcal{X}_{\text{lis-ét}}$ dont les objets sont les faisceaux cartésiens, sur la catégorie $\mathcal{X}_{\text{ét}}$.*

Preuve : Si $\mathcal{F}$ est un faisceau étale d'ensembles sur $\mathcal{X}$, posons pour chaque ouvert lisse-étale (U, u) de $\mathcal{X}$,

$$\mathcal{F}_{U, u} = u^{-1} \mathcal{F},$$

où u est considéré ici comme un morphisme de topos de $U_{\text{ét}}$ dans $\mathcal{X}_{\text{ét}}$. Pour chaque flèche (φ, α) dans $\text{Lis-ét}(\mathcal{X})$, définissons le morphisme $\theta_{\varphi, \alpha}$ de manière évidente. Alors le système

$$(\mathcal{F}_{U, u}, \theta_{\varphi, \alpha})$$

est un faisceau lisse-étale cartésien sur $\mathcal{X}$. Cette construction sur les objets se prolonge trivialement en un foncteur de $\mathcal{X}_{\text{ét}}$ dans $\mathcal{X}_{\text{lis-ét, cart}}$. Il ne reste plus

qu'à vérifier que ce foncteur est un quasi-inverse du foncteur de $\mathcal{X}_{\text{lis-ét, cart}}$ dans $\mathcal{X}_{\text{ét}}$ considéré dans l'énoncé. C'est tautologiquement un quasi-inverse à droite. Vérifions que c'est aussi un quasi-inverse à gauche.

Soient donc $\mathcal{F}$ un faisceau lisse-étale cartésien sur $\mathcal{X}$ et (U, u) un ouvert lisse-étale de $\mathcal{X}$. Notons $\mathcal{F}'$ la restriction de $\mathcal{F}$ au site étale de $\mathcal{X}$. Il s'agit de vérifier l'assertion suivante : le morphisme de faisceaux étales sur U ,

$$(*) \quad u^{-1} \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}_{U, u},$$

déduit par adjonction du morphisme naturel $\mathcal{F}' \rightarrow u_* \mathcal{F}_{U, u}$, est un isomorphisme. Cette assertion est locale pour la topologie étale sur U . On peut donc remplacer $\mathcal{X}$ par X et $u : U \rightarrow \mathcal{X}$ par $\text{pr}_X : U \times_{u, \mathcal{X}, P} X \rightarrow X$, où $X \xrightarrow{P} \mathcal{X}$ est une présentation étale de $\mathcal{X}$. On est donc ramené au cas où $\mathcal{X} = X$ est un S -espace algébrique. Dans ce cas l'assertion est tautologique. $\square$

(12.4) Si $\mathcal{X}$ est un S -champ algébrique, muni d'une présentation $X \xrightarrow{P} \mathcal{X}$ où X est un S -espace algébrique, on peut former le S -espace algébrique simplicial

$$(12.4.1) \quad X : \Delta^{\text{opp}} \rightarrow (\text{Es. alg}/S).$$

Rappelons que Δ est la catégorie dont les objets sont les ensembles finis $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et dont les flèches sont les applications croissantes. Le foncteur X envoie $[n] \in \text{ob } \Delta$ sur

$$X_n = (X/\mathcal{X})^{[n]},$$

produit fibré sur $\mathcal{X}$ d'une famille, indexée par $[n]$, de $(n+1)$ copies de X . En particulier, pour $n > 0$ et pour chaque $i \in [n]$, il envoie l'injection croissante $[n-1] \hookrightarrow [n]$ dont l'image est le complémentaire de $\{i\}$ sur la projection «oubli de la i -ième composante»

$$p_{n, i} : (X/\mathcal{X})^{[n]} \rightarrow (X/\mathcal{X})^{[n-1]},$$

(attention, les composantes sont indexées à partir de 0) et il envoie la surjection croissante $[n] \twoheadrightarrow [n-1]$ qui «répète i », sur la diagonale pour la i -ième composante

$$d_{n, i} : (X/\mathcal{X})^{[n-1]} \rightarrow (X/\mathcal{X})^{[n]}.$$

Ce S -espace simplicial est muni d'un morphisme canonique $P : X \rightarrow \mathcal{X}$ dont la n -ième composante $P_n : X_n \rightarrow \mathcal{X}$ est la projection canonique.

Le topos étale $(X.)_{\text{ét}}$ du S -espace algébrique simplicial X a été défini par Deligne (cf. ([SGA 4] Vbis) et [De 1]). Il peut se décrire comme suit.

Considérons la catégorie $\text{Ét}(X.)$ dont les objets sont les couples $([n], U \rightarrow X_n)$, notées encore (n, U) , où $[n] \in \text{ob } \Delta$ et où $U \rightarrow X_n$ est un morphisme étale de S -espaces algébriques et dont les flèches de (n, U) dans (n', U') sont les couples (δ, φ) où $\delta : [n'] \rightarrow [n]$ est une flèche dans la catégorie Δ et où

$\varphi : U \rightarrow U'$ est un morphisme de S -espaces algébriques relevant le morphisme $X_*(\delta) : X_n \rightarrow X_{n'}$ induit par δ .

On munit cette catégorie de la topologie associée à la prétopologie pour laquelle les familles couvrantes de (n, U) sont les familles

$$((n, U_i) \xrightarrow{(\text{Id}, \varphi_i)} (n, U))_{i \in I}$$

où $(U_i \xrightarrow{\varphi_i} U)_{i \in I}$ est une famille couvrante pour la topologie étale sur X_n .

Le topos $(X_*)_{\text{ét}}$ est la catégorie des faisceaux d'ensembles sur le site ainsi défini. Un objet de ce topos est appelé un *faisceau étale simplicial* sur X_* .

Un faisceau étale simplicial sur X_* n'est autre qu'une suite de faisceaux étales d'ensembles $\mathcal{F}_* = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ sur la suite des X_n , munie d'une flèche de transition

$$\theta_\delta : \mathcal{F}_{n'} \rightarrow X_*(\delta)_* \mathcal{F}_n,$$

ou ce qui revient au même par adjonction, d'une flèche de transition

$$\theta_\delta^h : X_*(\delta)^{-1} \mathcal{F}_{n'} \rightarrow \mathcal{F}_n,$$

pour chaque flèche $\delta : [n'] \rightarrow [n]$ dans Δ , ces flèches satisfaisant bien sûr la condition de cocycle évidente.

DÉFINITION (12.4.2). — *Un faisceau étale simplicial $\mathcal{F}_*$ sur X_* est dit cartésien si, pour toute flèche δ dans Δ , le morphisme de faisceaux étales θ_δ^h est un isomorphisme.*

Remarque (12.4.3) : Pour qu'un faisceau étale simplicial $\mathcal{F}_*$ sur X_* soit cartésien il suffit clairement que pour tout couple d'entiers (n, i) avec $0 \leq i \leq n$ et $n > 0$ le morphisme de faisceaux étales $\theta_{p_{n,i}}^h$ soit un isomorphisme : cf. l'argument de (12.3.1).

On a un morphisme continu de sites

$$\varepsilon^{-1} : \text{Ét}(X_*) \rightarrow \text{Lis-ét}(\mathcal{X}')$$

défini par

$$\varepsilon^{-1}([n], U \rightarrow X_n) = (U, u)$$

où u est le composé du morphisme étale $U \rightarrow X_n$ et de la projection canonique lisse $X_n \rightarrow \mathcal{X}'$. On a donc un morphisme de topos

$$(12.4.4) \quad \varepsilon = \varepsilon_{\mathcal{X}'} = (\varepsilon^{-1}, \varepsilon_*) : \mathcal{X}'_{\text{lis-ét}} \rightarrow (X_*)_{\text{ét}}.$$

Le foncteur ε_* envoie le faisceau $\mathcal{F}$ donné par le système $(\mathcal{F}_{U,u}, \theta_{\varphi, \alpha})$ sur le faisceau $\mathcal{F}_*$ donné par la suite des $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{X_n, X_n \rightarrow \mathcal{X}'}$ et par les flèches de transition induites par les $\theta_{\varphi, \alpha}$. En particulier, ε_* envoie $\mathcal{X}'_{\text{lis-ét, cart}}$ sur la sous-catégorie pleine $(X_*)_{\text{ét, cart}}$ de $(X_*)_{\text{ét}}$ dont les objets sont les faisceaux étales simpliciaux cartésiens.

Le foncteur ε^{-1} n'admet pas de description simple. Par contre ε_* admet un adjoint à droite $\varepsilon^!$ qui se calcule comme suit. Pour tout ouvert lisse-étale (U, u) de $\mathcal{X}'$ on dispose par changement de base d'un espace algébrique simplicial $X_{*,U}$ muni d'un morphisme $P_{*,U} : X_{*,U} \rightarrow U$ rendant cartésien le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_{*,U} & \xrightarrow{u_*} & X_* \\ P_{*,U} \downarrow & \square & \downarrow P_* \\ U & \xrightarrow{u} & \mathcal{X}' \end{array}$$

Si $\mathcal{F}_*$ est un faisceau étale simplicial sur X_* , $u_*^{\text{ét}} \mathcal{F}_*$ est un faisceau étale simplicial sur $X_{*,U}$ et l'on peut former le noyau

$$\mathcal{F}_{U,u} = \text{Ker}((P_{0,U})_* \mathcal{F}_{0,U} \rightrightarrows (P_{1,U})_* \mathcal{F}_{1,U})$$

Par définition $\varepsilon^! \mathcal{F}_*$ est la collection des faisceaux étales $\mathcal{F}_{U,u}$ avec les flèches de transition évidentes.

PROPOSITION (12.4.5). — *Le foncteur*

$$\mathcal{X}'_{\text{lis-ét, cart}} \rightarrow (X_*)_{\text{ét, cart}}$$

induit par ε_ sur les faisceaux cartésiens, est une équivalence de catégories.*

Preuve : Il suffit de vérifier que la restriction de $\varepsilon^!$ à $(X_*)_{\text{ét, cart}}$ est un quasi-inverse pour ce foncteur. Mais cela résulte immédiatement de la description suivante de $\varepsilon^! \mathcal{F}_*$ pour tout faisceau étale simplicial cartésien $\mathcal{F}_*$ sur X_* . Si $\mathcal{F}_*$ est un tel faisceau et si (U, u) est un ouvert lisse-étale de $\mathcal{X}'$, la restriction $\mathcal{F}_{*,U}$ de $\mathcal{F}_*$ à $X_{*,U}$ est aussi un faisceau étale simplicial cartésien. Comme P_U admet des sections localement pour la topologie étale sur U , P_U est un morphisme de descente effective, et donc $\mathcal{F}_{*,U}$ provient d'un unique faisceau étale $\mathcal{F}_{U,u}$ sur U qui n'est autre que $(\varepsilon^! \mathcal{F}_*)_{U,u}$. $\square$

Exemple (12.4.6) : Soit $\mathcal{X}'$ un S -champ algébrique de la forme $[Y/G/X]$ pour un S -espace algébrique X , un X -schéma en groupes lisse G et un X -espace algébrique Y muni d'une action de G . Alors la catégorie des faisceaux d'ensembles lisses-étales cartésiens sur $\mathcal{X}'$ est équivalente à la catégorie des faisceaux étales d'ensembles G -équivalents sur Y .

Si $\mathcal{F}$ est un tel faisceau étale G -équivalent et si (U, u) est un objet de $\text{Lis-ét}(\mathcal{X}')$, le faisceau étale $\mathcal{F}_{U,u}$ sur U correspondant est donné comme suit. Par définition du S -champ $[Y/G/X]$, on dispose d'un $G_U (= G \times_X U)$ -torseur P sur U et d'un morphisme G -équivalent de X -espaces algébriques $\alpha : P \rightarrow Y$, et $\mathcal{F}_{U,u}$ est le faisceau étale sur U déduit du faisceau étale G_U -équivalent $\alpha^{-1} \mathcal{F}$ sur P par descente (le morphisme lisse $P \rightarrow U$ admet, localement pour la topologie étale sur U , des sections et est donc de descente effective pour les faisceaux étales).

(12.5) *Fonctorialités du topos lisse-étale.* Soit $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un 1-morphisme de S -champs algébriques. On définit un morphisme de topos

$$F_{\text{lisse-ét}} = (F^{-1}, F_*) : \mathcal{Y}_{\text{lisse-ét}} \rightarrow \mathcal{X}_{\text{lisse-ét}}$$

de la façon suivante. Pour tout faisceau lisse-étale $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{Y}$ et tout ouvert lisse-étale (U, u) de $\mathcal{X}$, on pose

$$(F_* \mathcal{S})_{U, u} = \varinjlim f_* \mathcal{S}_{V, v}$$

où la limite projective est prise sur les carrés 2-commutatifs de S -champs algébriques

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{v} & \mathcal{Y} \\ f \downarrow & & \downarrow F \\ U & \xrightarrow[u]{} & \mathcal{X} \end{array}$$

avec $(V, v) \in \text{ob Lis-ét}(\mathcal{Y})$ et on définit les flèches de transition $\theta_{\varphi, \alpha}$ de manière évidente. Pour tout faisceau lisse-étale $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{X}$ et tout ouvert lisse-étale (V, v) de $\mathcal{Y}$, on pose

$$(F^{-1} \mathcal{F})_{V, v} = \varinjlim f^{-1} \mathcal{F}_{U, u}$$

où la limite inductive est prise sur les carrés 2-commutatifs de S -champs algébriques

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{v} & \mathcal{Y} \\ f \downarrow & & \downarrow F \\ U & \xrightarrow[u]{} & \mathcal{X} \end{array}$$

avec $(U, u) \in \text{ob Lis-ét}(\mathcal{X})$ et on définit les flèches de transition $\theta_{\psi, \beta}$ de manière évidente. On laisse au lecteur le soin de vérifier que F^{-1} ainsi défini est bien l'adjoint à gauche du foncteur F_* .

(12.5.1) Si $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ est *lisse*, pour tout faisceau lisse-étale $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{X}$, le faisceau lisse-étale $F^{-1} \mathcal{F}$ n'est autre que la restriction de $\mathcal{F}$ au site lisse-étale de $\mathcal{Y}$ par le foncteur

$$\text{Lis-ét}(\mathcal{Y}) \rightarrow \text{Lis-ét}(\mathcal{X}), (V, v) \mapsto (V, F \circ v),$$

et sera encore noté $\mathcal{F}_{(\mathcal{Y}, F)}$ (bien entendu, quand $(\mathcal{Y}, F) = (U, u)$ est un objet du site lisse-étale de $\mathcal{X}$, $\mathcal{F}_{U, u}$ est la restriction de $\mathcal{F}_{(\mathcal{Y}, F)}$ au site étale de U).

(12.5.2) Si $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ est *représentable*, le foncteur

$$(U, u) \mapsto (\mathcal{Y} \times_{F, \mathcal{X}, u} U, \text{pr}_1)$$

définit un morphisme continu de sites

$$F^{-1} : \text{Lis-ét}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Lis-ét}(\mathcal{Y})$$

et le morphisme de topos $F_{\text{lisse-ét}}$ est induit par ce morphisme de sites : en particulier, pour tout faisceau lisse-étale $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{Y}$ et tout $(U, u) \in \text{ob Lis-ét}(\mathcal{X})$ le faisceau étale $(F_* \mathcal{S})_{U, u}$ est l'image directe du faisceau étale $\mathcal{S}_{V, \text{pr}_2}$ par le morphisme de S -espaces algébriques $\text{pr}_1 : V = \mathcal{Y} \times_{F, \mathcal{X}, u} U \rightarrow U$ déduit de F par le changement de base $U \xrightarrow{u} \mathcal{X}$.

(12.5.3) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau lisse-étale sur un S -champ algébrique $\mathcal{X}$, de morphisme structural $A : \mathcal{X} \rightarrow S$. L'ensemble

$$\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{F}) = \Gamma(S, (A_* \mathcal{F})_{S, \text{id}})$$

des *sections globales* de $\mathcal{F}$ est l'ensemble des familles $(s_{(U, u)})$ de sections de $\mathcal{F}$ sur les $(U, u) \in \text{ob Lis-ét}(\mathcal{X})$ telles que

$$\text{res}_\varphi s_{(V, v)} = s_{(U, u)}$$

pour toute flèche $(U, u) \xrightarrow{\varphi} (V, v)$ dans $\text{Lis-ét}(\mathcal{X})$, où on a noté $\text{res}_\varphi : \mathcal{F}_{(V, v)} \rightarrow \mathcal{F}_{(U, u)}$ la flèche de restriction.

Si $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ est un morphisme *lisse* de S -champs algébriques, l'ensemble des sections globales du faisceau lisse-étale $\mathcal{F}_{(\mathcal{Y}, F)}$ sur $\mathcal{Y}$ sera encore noté

$$\Gamma((\mathcal{Y}, F), \mathcal{F}),$$

voire simplement $\Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ quand aucune confusion n'en résulte, et appelé l'ensemble des sections de $\mathcal{F}$ sur $(\mathcal{Y}, F)$.

(12.5.4) Si $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ est un 1-morphisme de S -champs algébriques, pour tout faisceau lisse-étale $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{Y}$ et tout ouvert lisse-étale (U, u) de $\mathcal{X}$, on a

$$F_* \mathcal{S}_{(U, u)} = \Gamma((\mathcal{Y} \times_{F, \mathcal{X}, u} U, \text{pr}_1), \mathcal{S}).$$

(12.6) Soit toujours $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un 1-morphisme de S -champs algébriques. Le foncteur

$$F^{-1} : \mathcal{X}_{\text{lisse-ét}} \rightarrow \mathcal{Y}_{\text{lisse-ét}}$$

envoie évidemment tout faisceau cartésien sur un faisceau cartésien.

Nous verrons au chapitre 18 que, si F est supposé de plus quasi-compact, le foncteur F_* envoie lui aussi tout faisceau lisse-étale cartésien sur un faisceau lisse-étale cartésien. Pour l'instant contentons-nous de montrer comment calculer $F_* \mathcal{S}$ lorsque $\mathcal{S}$ est un faisceau lisse-étale cartésien sur $\mathcal{Y}$, à l'aide d'une présentation de $\mathcal{Y}$.

Soit donc $Q : Y \rightarrow \mathcal{Y}$ une telle présentation et soient Y_* le S -espace algébrique simplicial associé et $Q_* : Y_* \rightarrow \mathcal{Y}$ la projection canonique. On

note $F_n : Y_n \rightarrow \mathcal{X}'$ le morphisme de S -champs algébriques composé de $Q_n : Y_n \rightarrow \mathcal{Y}$ et de F .

Soit $\mathcal{S}$ un faisceau lisse-étale d'ensembles arbitraire sur $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{S}_\bullet$ le faisceau étale simplicial sur $Y_\bullet$ correspondant. Si (U, u) est un ouvert lisse-étale de $\mathcal{X}'$, on dispose d'une part du faisceau étale $(F_*\mathcal{S})_{U,u}$, et d'autre part du faisceau étale

$$\text{Ker}((F_{0,U})_*\mathcal{S}_{0,U} \rightrightarrows (F_{1,U})_*\mathcal{S}_{1,U})$$

où

$$F_{\bullet,U} : Y_{\bullet,U} \rightarrow U$$

est le U -espace algébrique simplicial déduit de $F_\bullet : Y_\bullet \rightarrow \mathcal{X}'$ par le changement de base $U \xrightarrow{u} \mathcal{X}'$, où $\mathcal{S}_{\bullet,U}$ est la restriction de $\mathcal{S}_\bullet$ à $Y_{\bullet,U}$, et où la double flèche est induite par les projections $p_{0,1}, p_{1,1} : Y_{1,U} \rightarrow Y_{0,U}$. Par définition de $(F_*\mathcal{S})_{U,u}$ comme limite projective, on dispose en outre d'un morphisme canonique de faisceaux étales

$$(12.6.1) \quad (F_*\mathcal{S})_{U,u} \rightarrow \text{Ker}((F_{0,U})_*\mathcal{S}_{0,U} \rightrightarrows (F_{1,U})_*\mathcal{S}_{1,U})$$

(prendre pour $V \xrightarrow{v} \mathcal{Y}$ successivement $Y_{0,U} \rightarrow Y_0 \xrightarrow{Q_0} \mathcal{Y}$ et $Y_{1,U} \rightarrow Y_1 \xrightarrow{Q_1} \mathcal{Y}$).

L'énoncé suivant admet (12.4.5) comme cas particulier ($F = \text{Id}_{\mathcal{X}'}$).

LEMME (12.6.2). — Si $\mathcal{S}$ est cartésien, le morphisme (12.6.1) est un isomorphisme.

Preuve : Soit

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{v} & \mathcal{Y} \\ f \downarrow & & \downarrow F \\ U & \xrightarrow{u} & \mathcal{X}' \end{array}$$

un carré commutatif de S -champs algébriques, où (V, v) est un ouvert lisse-étale de $\mathcal{Y}$. Notons $Q_{\bullet,V} : Y_{\bullet,V} \rightarrow V$ le V -espace algébrique simplicial déduit de $Q_\bullet : Y_\bullet \rightarrow \mathcal{Y}$ par le changement de base $V \xrightarrow{v} \mathcal{Y}$ et $f_{n,V}$ le morphisme composé de $Q_{n,V}$ et de f . Notons $\mathcal{S}_{\bullet,V}$ la restriction de $\mathcal{S}_\bullet$ à $Y_{\bullet,V}$. (Dans cette preuve, nous utiliserons simultanément les notations $Y_{\bullet,V}$, $\mathcal{S}_{\bullet,V}$ et $Y_{\bullet,U}$, $\mathcal{S}_{\bullet,U}$ en espérant que cela ne prête pas à confusion). Alors, comme $\mathcal{S}$ est cartésien et que tout morphisme lisse surjectif est un morphisme de descente effective pour la topologie étale, on a

$$f_*\mathcal{S}_{V,v} = \text{Ker}((f_{0,V})_*\mathcal{S}_{0,V} \rightrightarrows (f_{1,V})_*\mathcal{S}_{1,V}).$$

Mais le morphisme $v : V \rightarrow \mathcal{Y}$ se factorise par la projection canonique $u_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y}_U = U \times_{u,\mathcal{X}',P} \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ et on a un diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} Y_{\bullet,V} & \longrightarrow & Y_{\bullet,U} & \longrightarrow & Y_\bullet \\ Q_{\bullet,V} \downarrow & \square & \downarrow & \square & \downarrow Q_\bullet \\ V & \longrightarrow & \mathcal{Y}_U & \longrightarrow & \mathcal{Y} \\ & \searrow f & \downarrow & \square & \downarrow F \\ & & U & \xrightarrow{u} & \mathcal{X}' \end{array}$$

d'où un morphisme de restriction du noyau

$$\text{Ker}((F_{0,U})_*\mathcal{S}_{0,U} \rightrightarrows (F_{1,U})_*\mathcal{S}_{1,U})$$

dans le noyau

$$\text{Ker}((f_{0,V})_*\mathcal{S}_{0,V} \rightrightarrows (f_{1,V})_*\mathcal{S}_{1,V}),$$

et donc par passage à la limite projective un morphisme

$$(12.6.3) \quad \text{Ker}((F_{0,U})_*\mathcal{S}_{0,U} \rightrightarrows (F_{1,U})_*\mathcal{S}_{1,U}) \rightarrow (F_*\mathcal{S})_{U,u}.$$

Il ne reste plus qu'à montrer que ce dernier morphisme est un inverse du morphisme (12.6.1).

Si $(s_V)_V$ est une section de $(F_*\mathcal{S})_{U,u}$, le morphisme (12.6.1) envoie cette section sur $s_{Y_{0,U}}$ et on a

$$p_{0,1}^* s_{Y_{0,U}} = p_{1,1}^* s_{Y_{0,U}}$$

dans $\mathcal{S}_{1,U}$. Le morphisme (12.6.3) envoie $s_{Y_{0,U}}$ sur le système projectif de ses restrictions aux $Y_{0,V}$, chacune de ces restrictions étant automatiquement dans le noyau de la double flèche formée des deux restrictions à $Y_{1,V}$. Comme $s_{Y_{0,V}}$ est la restriction de $s_{Y_{0,U}}$ à $Y_{0,V}$ et aussi la restriction de s_V à $Y_{0,V}$ le composé (12.6.3) $\circ$ (12.6.1) est bien l'identité.

Inversement, si s est une section de $\mathcal{S}_{Y_{0,U}}$ qui vérifie $p_{0,1}^* s = p_{1,1}^* s$, la restriction de s à $Y_{0,V}$ provient par descente d'une section s_V de $\mathcal{S}_V$. Si $V = Y_{0,U}$, la section s_V n'est autre que s et le composé (12.6.1) $\circ$ (12.6.3) est donc aussi l'identité. $\square$

(12.7) Anneaux, champs algébriques annelés. Soit $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique. Un Anneau du topos $\mathcal{X}_{\text{lisse-ét}}$ est un système $(\mathcal{A}_{U,u}, \theta_{\varphi,\alpha})$ vérifiant les conditions de (12.2.1), où les $\mathcal{A}_{U,u}$ sont des faisceaux étales en anneaux sur les U et où les $\theta_{\varphi,\alpha}$ sont des homomorphismes de faisceaux étales en anneaux.

Un tel Anneau sera dit *plat* si, pour toute flèche $(\varphi, \alpha) : (U, u) \rightarrow (V, v)$ dans $\text{Lis-ét}(\mathcal{X})$ avec $\varphi : U \rightarrow V$ lisse, l'homomorphisme d'Anneaux étales

$$\theta_{\varphi,\alpha}^{\sharp} : \varphi^{-1} \mathcal{A}_{V,v} \rightarrow \mathcal{A}_{U,u}$$

est plat. Bien entendu, un Anneau dont le faisceau lisse-étale d'ensembles sous-jacent est cartésien, est automatiquement plat.

Exemples (12.7.1) : (i) On note $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ le système $(\mathcal{O}_{U,u}, \theta_{\varphi,\alpha})$ avec $\mathcal{O}_{U,u} = \mathcal{O}_U$, le faisceau structural de U pour la topologie étale, et avec les homomorphismes $\theta_{\varphi,\alpha}$ évidents. Cet Anneau est plat puisque tout morphisme lisse de S -espaces algébriques est plat. Il sera appelé le *faisceau structural* de $\mathcal{X}$.

(ii) Si n est un entier strictement positif, on note $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathcal{X}}$ le système $(\mathcal{O}_{U,u}, \theta_{\varphi,\alpha})$ avec $\mathcal{O}_{U,u} = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_U$, le faisceau constant de valeur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour la topologie étale sur U et avec les homomorphismes $\theta_{\varphi,\alpha}$ évidents. Cet Anneau est cartésien en tant que faisceau lisse-étale d'ensembles et est donc plat. Il sera appelé le *faisceau constant de valeur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$* sur $\mathcal{X}$.

DÉFINITION (12.7.2). — Un S -champ algébrique annelé est un couple $(\mathcal{X}, \mathcal{O})$ où $\mathcal{X}$ est un S -champ algébrique et $\mathcal{O}$ est un Anneau plat du topos $\mathcal{X}_{\text{lis-ét}}$.

Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{O})$ un S -champ algébrique annelé. On note $\text{Mod}(\mathcal{O})$ la catégorie abélienne des $\mathcal{O}$ -Modules du topos $\mathcal{X}_{\text{lis-ét}}$, i.e. la catégorie abélienne des systèmes $(\mathcal{M}_{U,u}, \theta_{\varphi,\alpha})$ où chaque $\mathcal{M}_{U,u}$ est un $\mathcal{O}_{U,u}$ -Module et où pour chaque flèche $(\varphi, \alpha) : (U, u) \rightarrow (V, v)$, $\theta_{\varphi,\alpha}$ est un homomorphisme de $\mathcal{O}_{V,v}$ -Modules. Par adjonction au sens des Modules, les homomorphismes $\theta_{\varphi,\alpha}$ induisent des homomorphismes

$$\theta_{\varphi,\alpha}^{\mathcal{O}} : \varphi^* \mathcal{M}_{V,v} = \mathcal{O}_{U,u} \otimes_{\varphi^{-1} \mathcal{O}_{V,v}} \varphi^{-1} \mathcal{M}_{V,v} \rightarrow \mathcal{M}_{U,u}.$$

DÉFINITION (12.7.3). — Un $\mathcal{O}$ -Module $\mathcal{M}$ est dit cartésien si, pour toute flèche $(\varphi, \alpha) : (U, u) \rightarrow (V, v)$ dans $\text{Lis-ét}(\mathcal{X})$ avec $\varphi : U \rightarrow V$ lisse, l'homomorphisme de $\mathcal{O}_{U,u}$ -Modules

$$\theta_{\varphi,\alpha}^{\mathcal{O}} : \varphi^* \mathcal{M}_{V,v} \rightarrow \mathcal{M}_{U,u}$$

est un isomorphisme.

On notera

$$\text{Mod}_{\text{cart}}(\mathcal{O})$$

la sous-catégorie pleine de $\text{Mod}(\mathcal{O})$ dont les objets sont les $\mathcal{O}$ -Modules cartésiens. Il résulte des définitions que cette sous-catégorie est stable par extensions, limites inductives arbitraires et limites projectives finies. En particulier, elle est stable par noyaux, conoyaux et extensions et est donc une sous-catégorie abélienne épaisse. Il résulte aussi des définitions que $\text{Mod}_{\text{cart}}(\mathcal{O})$ est stable par produits tensoriels sur $\mathcal{O}$.

On laisse au lecteur le soin de vérifier l'énoncé suivant (cf. la preuve de (12.3.3)) :

PROPOSITION (12.7.4). — Soit $\mathcal{X}$ un S -champ de Deligne-Mumford (par exemple un S -espace algébrique ou un S -schéma). Notons $\mathcal{O}_{\text{ét}}$ l'Anneau

du topos $\mathcal{X}_{\text{ét}}$ induit par $\mathcal{O}$. Alors, le foncteur d'inclusion $\text{ét}(\mathcal{X}) \hookrightarrow \text{Lis-ét}(\mathcal{X})$ induit une équivalence de catégories abéliennes de $\text{Mod}_{\text{cart}}(\mathcal{O})$ sur la catégorie abélienne $\text{Mod}(\mathcal{O}_{\text{ét}})$ des $\mathcal{O}_{\text{ét}}$ -Modules du topos $\mathcal{X}_{\text{ét}}$. $\square$

Remarque (12.7.5) : On fera attention au fait qu'un $\mathcal{O}$ -Module non nul qui est non cartésien peut très bien induire un $\mathcal{O}_{\text{ét}}$ -Module nul. Par exemple, c'est le cas pour le $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\text{lis-ét}}}$ -Module qui associe à tout ouvert lisse-étale (U, u) de $\mathcal{X}$ le $\mathcal{O}_{U,\text{ét}}$ -Module $\Omega_{U/\mathcal{X}}^1$.

Remarque (12.7.6) : Une $\mathcal{O}$ -Algèbre $\mathcal{B}$ qui est un $\mathcal{O}$ -Module cartésien est automatiquement un Anneau plat, de sorte que $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ est encore un S -champ algébrique annelé.

(12.8) Soient $X \xrightarrow{P} \mathcal{X}$ une présentation lisse d'un S -champ algébrique $\mathcal{X}$ et $X_{\bullet}$ le S -espace algébrique simplicial associé.

Un Anneau étale simplicial $\mathcal{O}_{\bullet}$ sur $X_{\bullet}$, i.e. un Anneau du topos $(X_{\bullet})_{\text{ét}}$, est une suite d'Anneaux étales $(\mathcal{O}_n)$ sur la suite des X_n , munie d'un homomorphisme d'Anneaux étales $\theta_{\delta} : \mathcal{O}_{n'} \rightarrow X_{\bullet}(\delta)_{*} \mathcal{O}_n$ pour chaque flèche $\delta : [n'] \rightarrow [n]$ dans Δ .

Un tel Anneau est dit *plat* si, pour tous entiers n et i avec $0 \leq i \leq n$, l'homomorphisme d'Anneaux du topos étale de X_n ,

$$\theta_{p_{n,i}}^{\mathcal{O}} : p_{n,i}^{-1} \mathcal{O}_{n-1} \rightarrow \mathcal{O}_n,$$

est plat.

Pour tout Anneau étale simplicial plat $\mathcal{O}_{\bullet}$ sur $X_{\bullet}$, on note $\text{Mod}(\mathcal{O}_{\bullet})$ la catégorie abélienne des $\mathcal{O}_{\bullet}$ -Modules.

DÉFINITION (12.8.1). — Soit $\mathcal{O}_{\bullet}$ un Anneau étale simplicial plat sur $X_{\bullet}$. Un $\mathcal{O}_{\bullet}$ -Module $\mathcal{M}_{\bullet}$ est dit cartésien si, pour tous entiers n et i avec $0 \leq i \leq n$, le morphisme de $\mathcal{O}_n$ -Modules $\theta_{p_{n,i}}^{\mathcal{O}} : \mathcal{M}_{n-1} \rightarrow \mathcal{M}_n$ est un isomorphisme.

On note $\text{Mod}_{\text{cart}}(\mathcal{O}_{\bullet})$ la sous-catégorie strictement pleine de $\text{Mod}(\mathcal{O}_{\bullet})$ dont les objets sont les $\mathcal{O}_{\bullet}$ -Modules cartésiens.

Comme le foncteur $p_{n,i}^*$ est exact puisque $\mathcal{O}_{\bullet}$ est supposé plat, la sous-catégorie $\text{Mod}_{\text{cart}}(\mathcal{O}_{\bullet})$ de $\text{Mod}(\mathcal{O}_{\bullet})$ est stable par noyaux, conoyaux et extensions. En particulier, c'est une catégorie abélienne. $\square$

Si $\mathcal{O}$ est un Anneau lisse-étale sur $\mathcal{X}$, $\mathcal{O}_{\bullet} = \varepsilon_{*} \mathcal{O}$ où $\varepsilon : \mathcal{X}_{\text{lis-ét}} \rightarrow (X_{\bullet})_{\text{ét}}$ est le morphisme de topos défini en (12.4.4), est bien entendu un Anneau étale simplicial sur $X_{\bullet}$, et ε_{*} induit un foncteur exact, noté encore ε_{*} , de la catégorie abélienne $\text{Mod}(\mathcal{O})$ dans la catégorie abélienne $\text{Mod}(\mathcal{O}_{\bullet})$. Ce foncteur admet un adjoint à droite

$$\varepsilon^! : \text{Mod}(\mathcal{O}_{\bullet}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{O})$$

défini par

$$(\varepsilon^! \mathcal{M}_*)_{U,u} = \text{Ker}[(P_{0,U})_* \mathcal{M}_{0,U} \xrightarrow{\partial} (P_{1,U})_* \mathcal{M}_{1,U}]$$

pour tout ouvert lisse-étale (U, u) de $\mathcal{X}$, avec les notations de (12.4.) et où l'homomorphisme ∂ est la différence des homomorphismes induits par les deux projections $p_{0,1}, p_{1,1} : X_{1,U} \rightarrow X_{0,U}$.

On laisse de nouveau au lecteur le soin de vérifier (cf. la preuve de (12.4.5)) :

PROPOSITION (12.8.2). — *Soit $\mathcal{A}$ un Anneau plat du topos $\mathcal{X}_{\text{lis-ét}}$. Alors $\mathcal{A}_* = \varepsilon_* \mathcal{A}$ est un Anneau étale simplicial plat sur X , et le foncteur exact $\varepsilon_* : \text{Mod}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{A}_*)$ induit une équivalence de catégories abéliennes de $\text{Mod}_{\text{cart}}(\mathcal{A})$ sur $\text{Mod}_{\text{cart}}(\mathcal{A}_*)$, un foncteur quasi-inverse étant donné par la restriction à $\text{Mod}_{\text{cart}}(\mathcal{A}_*)$ de $\varepsilon^!$.* $\square$

(12.9) Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ un S -champ algébrique annelé. On a des foncteurs *produit tensoriel*

$$(12.9.1) \quad (-) \otimes_{\mathcal{A}} (-) : \text{Mod}(\mathcal{A}) \times \text{Mod}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{A})$$

et *Hom interne*

$$(12.9.2) \quad \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(-, -) : \text{Mod}(\mathcal{A})^{\text{opp}} \times \text{Mod}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{A})$$

définis par

$$((-) \otimes_{\mathcal{A}} (-))_{U,u} = (-)_{U,u} \otimes_{\mathcal{A}_{U,u}} (-)_{U,u}$$

et

$$(\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(-, -))_{U,u} = \mathcal{H}om_{\mathcal{A}_{U,u}}((-)_{U,u}, (-)_{U,u})$$

pour tout ouvert lisse-étale (U, u) de $\mathcal{X}$ et avec les flèches de transition évidentes.

Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux $\mathcal{A}$ -Modules cartésiens, il en est de même de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{N}$.

Soit $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$ un autre S -champ algébrique annelé. Un *morphisme de S -champs algébriques annelés* de $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ est un couple (F, θ_F) où $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ est un morphisme de S -champs algébriques et où $\theta_F : \mathcal{B} \rightarrow F_* \mathcal{A}$ est un morphisme d'Anneaux dans le topos $\mathcal{X}_{\text{lis-ét}}$.

Exemples (12.9.3) : (i) Tout morphisme de S -champs algébriques $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ admet un relèvement canonique en un morphisme de S -champs algébriques annelés $(F, \theta_F) : (\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}) \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$.

(ii) Si n est un entier strictement positif, tout morphisme de S -champs algébriques $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ admet un relèvement canonique en un morphisme de S -champs algébriques annelés $(F, \theta_F) : (\mathcal{Y}, (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathcal{Y}}) \rightarrow (\mathcal{X}, (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathcal{X}})$.

Pour tout morphisme $(F, \theta_F) : (\mathcal{Y}, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{A})$ de S -champs algébriques annelés, le foncteur F_* induit un foncteur exact à gauche de

la catégorie abélienne $\text{Mod}(\mathcal{B})$ dans la catégorie abélienne $\text{Mod}(\mathcal{A})$ et ce foncteur admet comme adjoint à gauche le foncteur exact à droite

$$F^* : \text{Mod}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{B})$$

défini par

$$F^* \mathcal{M} = F^{-1} \mathcal{M} \otimes_{F^{-1} \mathcal{A}, \theta_F^*} \mathcal{B}$$

où $\theta_F^* : F^{-1} \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est déduit de $\theta_F : \mathcal{B} \rightarrow F_* \mathcal{A}$ par adjonction.

Bien entendu, le foncteur F^* transforme tout $\mathcal{A}$ -Module cartésien en un $\mathcal{B}$ -Module cartésien.

On verra que, si l'on suppose de plus F quasi-compact, le foncteur F_* transforme lui aussi tout $\mathcal{B}$ -Module cartésien en un $\mathcal{A}$ -Module cartésien.

Pour l'instant, contentons nous d'énoncer la variante naturelle du lemme (12.6.2). Soient $Y \xrightarrow{Q} \mathcal{Y}$ une présentation de $\mathcal{Y}$, $\mathcal{N}$ un $\mathcal{B}$ -Module et (U, u) un ouvert lisse-étale de $\mathcal{X}$. On dispose d'une part du $\mathcal{A}_{U,u}$ -Module $(F_* \mathcal{N})_{U,u}$, et d'autre part du $\mathcal{B}_{U,u}$ -Module

$$\text{Ker}[(F_{0,U})_* \mathcal{N}_{0,U} \xrightarrow{\partial} (F_{1,U})_* \mathcal{N}_{1,U}]$$

où $F_{*,U} : Y_{*,U} \rightarrow U$ est le U -espace algébrique simplicial déduit de $F : Y \rightarrow \mathcal{X}$ par le changement de base $U \xrightarrow{u} \mathcal{X}$, et où l'homomorphisme ∂ est la différence des homomorphismes induits par les projections $p_{0,1}, p_{1,1} : Y_{1,U} \rightarrow Y_{0,U}$. Par définition de $(F_* \mathcal{N})_{U,u}$ comme limite projective, on dispose en outre d'un homomorphisme canonique de $\mathcal{B}_{U,u}$ -Modules

$$(12.9.4) \quad (F_* \mathcal{N})_{U,u} \rightarrow \text{Ker}[(F_{0,U})_* \mathcal{N}_{0,U} \xrightarrow{\partial} (F_{1,U})_* \mathcal{N}_{1,U}]$$

(prendre pour $V \xrightarrow{v} \mathcal{Y}$ successivement $Y_{0,U} \rightarrow Y_0 \xrightarrow{Q_0} \mathcal{Y}$ et $Y_{1,U} \rightarrow Y_1 \xrightarrow{Q_1} \mathcal{Y}$).

PROPOSITION (12.9.5). — *Si $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{B}$ -Module cartésien, le morphisme (12.9.4) est un isomorphisme.* $\square$

(12.10) Fixons un S -champ algébrique annelé $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$. On note $D(\mathcal{A})$ la catégorie dérivée de la catégorie abélienne $\text{Mod}(\mathcal{A})$ et

$$\mathcal{H}^n : D(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{A})$$

($n \in \mathbb{Z}$) les foncteurs cohomologiques canoniques. Les objets de $D(\mathcal{A})$ sont donc les complexes de $\mathcal{A}$ -Modules et $\mathcal{H}^n$ est le n -ième faisceau de cohomologie d'un tel complexe.

On a les variantes habituelles $D^\alpha(\mathcal{A})$ où α est l'une des expressions

$$[a, +\infty[, + = \bigcup_a [a, +\infty[,] - \infty, b], - = \bigcup_b] - \infty, b], [a, b], b = \bigcup_{a,b} [a, b]$$

avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

On définit la catégorie triangulée

$$D_{\text{cart}}(\cdot, \mathcal{C}),$$

et ses variantes $D_{\text{cart}}^\alpha(\cdot, \mathcal{C})$, comme la sous-catégorie pleine de $D(\cdot, \mathcal{C})$, ou de $D^\alpha(\cdot, \mathcal{C})$, dont les objets sont les complexes dont les faisceaux de cohomologie sont des $\mathcal{A}$ -Modules cartésiens.

La proposition (12.7.4) se généralise comme suit :

PROPOSITION (12.10.1). — *On suppose que $\mathcal{X}$ est un S -champ de Deligne-Mumford (par exemple un S -espace algébrique ou un S -schéma). Notons $\cdot, \mathcal{C}_{\text{ét}}$ l'anneau du topos $\mathcal{X}_{\text{ét}}$ induit par $\cdot, \mathcal{C}$. Alors, le foncteur d'inclusion $\text{Ét}(\mathcal{X}) \hookrightarrow \text{Lis-ét}(\mathcal{X})$ induit une équivalence de catégories triangulées de $D_{\text{cart}}(\cdot, \mathcal{C})$ sur la catégorie dérivée $D(\cdot, \mathcal{C}_{\text{ét}})$ des complexes de $\cdot, \mathcal{C}_{\text{ét}}$ -Modules. De plus cette équivalence respecte les foncteurs cohomologiques $\mathcal{H}^n$ ($n \in \mathbb{Z}$).*

Preuve : Compte tenu de l'énoncé (12.7.4) sur les Modules, il suffit essentiellement de démontrer que l'on a

$$R^i \varepsilon_* \mathcal{M} = (0)$$

pour tout entier $i > 0$ et tout $\cdot, \mathcal{C}$ -Module $\mathcal{M}$, où l'on a noté $\varepsilon : \mathcal{X}_{\text{lis-ét}} \rightarrow \mathcal{X}_{\text{ét}}$ le morphisme de topos induit par le foncteur d'inclusion $\text{Ét}(\mathcal{X}) \hookrightarrow \text{Lis-ét}(\mathcal{X})$. Cela est laissé au lecteur. $\square$

Si $P : X \rightarrow \mathcal{X}$ est une présentation lisse du S -champ algébrique $\mathcal{X}$ et si $X_\bullet$ est le S -espace algébrique simplicial associé, on peut former la catégorie dérivée $D(\cdot, \mathcal{A}_\bullet)$ de la catégorie abélienne $\text{Mod}(\cdot, \mathcal{A}_\bullet)$, où $\mathcal{A}_\bullet = \varepsilon_* \mathcal{A}$, et ses variantes $D^\alpha(\cdot, \mathcal{A}_\bullet)$.

On définit la catégorie triangulée

$$D_{\text{cart}}(\cdot, \mathcal{A}_\bullet),$$

et ses variantes $D_{\text{cart}}^\alpha(\cdot, \mathcal{A}_\bullet)$, comme la sous-catégorie pleine de $D(\cdot, \mathcal{A}_\bullet)$, ou de $D^\alpha(\cdot, \mathcal{A}_\bullet)$, dont les objets sont les complexes à cohomologie cartésienne.

Le foncteur exact $\varepsilon_* : \text{Mod}(\cdot, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Mod}(\cdot, \mathcal{A}_\bullet)$ se dérive trivialement en un foncteur $\varepsilon_* : D^+(\cdot, \mathcal{A}) \rightarrow D^+(\cdot, \mathcal{A}_\bullet)$. Ce dernier foncteur admet un adjoint à droite qui n'est autre que le foncteur dérivé

$$R\varepsilon^! : D^+(\cdot, \mathcal{A}_\bullet) \rightarrow D^+(\cdot, \mathcal{A})$$

du foncteur $\varepsilon^! : \text{Mod}(\cdot, \mathcal{A}_\bullet) \rightarrow \text{Mod}(\cdot, \mathcal{A})$. On renvoie à ([De 1] §5) et à ([SGA 4] V^{bis}) pour plus de détails.

La proposition (12.8.2) se généralise comme suit :

PROPOSITION (12.10.2). — *Le foncteur $\varepsilon_* : D^+(\cdot, \mathcal{A}) \rightarrow D^+(\cdot, \mathcal{A}_\bullet)$ induit une équivalence de catégories triangulées de $D_{\text{cart}}^+(\cdot, \mathcal{A})$ sur $D_{\text{cart}}^+(\cdot, \mathcal{A}_\bullet)$,*

équivalence qui respecte les foncteurs cohomologiques $\mathcal{H}^n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Un quasi-inverse est donné par la restriction de $R\varepsilon^!$ à $D_{\text{cart}}^+(\cdot, \mathcal{A}_\bullet)$. $\square$

On a des foncteurs dérivés

$$(-) \otimes_{\cdot, \mathcal{C}}^L (-) : D^-(\cdot, \mathcal{C}) \times D^-(\cdot, \mathcal{C}) \rightarrow D^-(\cdot, \mathcal{C})$$

et

$$R\mathcal{H}om_{\cdot, \mathcal{C}}(-, -) : D^-(\cdot, \mathcal{C})^{\text{opp}} \times D^+(\cdot, \mathcal{C}) \rightarrow D^+(\cdot, \mathcal{C}).$$

Si $M, N \in \text{ob } D_{\text{cart}}^-(\cdot, \mathcal{C})$ il en est de même de $M \otimes_{\cdot, \mathcal{C}}^L N$.

Si $F : (\mathcal{Y}, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{X}, \cdot, \mathcal{C})$ est un morphisme de S -champs algébriques annelés, on a des foncteurs dérivés

$$RF_* : D^+(\cdot, \mathcal{B}) \rightarrow D^+(\cdot, \mathcal{C})$$

et

$$LF^* : D^-(\cdot, \mathcal{C}) \rightarrow D^-(\cdot, \mathcal{B}).$$

Il résulte des définitions que le foncteur LF^* envoie $D_{\text{cart}}^-(\cdot, \mathcal{C})$ dans $D_{\text{cart}}^-(\cdot, \mathcal{B})$.

Pour ce qui est du comportement du foncteur RF_* vis-à-vis des complexes à cohomologie cartésienne, on renvoie au chapitre 18 pour le cas où $\cdot, \mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ sont constants de valeur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et on laisse au lecteur le soin de formuler et de démontrer la variante « dérivée » de la proposition (12.9.5).

13. Modules quasi-cohérents sur un S -champ algébrique

Dans tout ce chapitre les S -champs algébriques $\mathcal{X}$ sont annelés par leurs Anneaux structuraux $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$.

(13.1) Soit X un S -schéma. Considérons les topos X_{Zar} des faisceaux d'ensembles pour la topologie de Zariski sur X et $X_{\text{ét}}$ des faisceaux étales d'ensembles sur X . Comme tout ouvert de Zariski de X est trivialement étale sur X , on a un foncteur de restriction $\varepsilon_* : X_{\text{ét}} \rightarrow X_{\text{Zar}}$. Ce foncteur admet un adjoint à droite ε^{-1} et la paire $(\varepsilon^{-1}, \varepsilon_*)$ définit un morphisme de topos $\varepsilon : X_{\text{ét}} \rightarrow X_{\text{Zar}}$.

Explicitons le foncteur ε^{-1} . Si (U, u) est un ouvert étale de X , $u(U)$ est un ouvert de Zariski de X et, si $(U_i, u_i)_{i \in I}$ est un recouvrement étale de (U, u) , alors $(u_i(U_i))_{i \in I}$ est un recouvrement de Zariski de $u(U)$; de plus, pour tous $i, j \in I$ on a $u_{i,j}(U_i \times_U U_j) \subset u_i(U_i) \cap u_j(U_j)$ (où $u_{i,j} : U_i \times_U U_j \rightarrow X$ est le morphisme canonique), avec égalité si u est un monomorphisme. Pour tout faisceau d'ensembles $\mathcal{F}$ pour la topologie de Zariski sur X , on définit donc un préfaisceau séparé sur $\text{Ét}(X)$ par

$$(U, u) \mapsto \mathcal{F}(u(U))$$

et $\varepsilon^{-1}\mathcal{F}$ est le faisceau associé : on a

$$(\varepsilon^{-1}\mathcal{F})(U, u) = \varinjlim \text{Ker} \left(\prod_{i \in I} \mathcal{F}(u_i(U_i)) \rightrightarrows \prod_{i,j \in I} \mathcal{F}(u_{i,j}(U_i \times_U U_j)) \right)$$

où la limite inductive est prise sur les recouvrements étales $(U_i, u_i)_{i \in I}$ de (U, u) . Le morphisme d'adjonction

$$\mathcal{F} \rightarrow \varepsilon_* \varepsilon^{-1} \mathcal{F}$$

est évidemment un isomorphisme.

Les deux topos X_{Zar} et $X_{\text{ét}}$ sont annelés par les Anneaux structuraux notés dans la suite $\mathcal{O}_{X_{\text{Zar}}}$ et $\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}$, et ε se relève tautologiquement en un morphisme de topos annelés $(\varepsilon^*, \varepsilon_*)$. Pour tout $\mathcal{O}_{X_{\text{Zar}}}$ -Module $\mathcal{M}$ on a par définition

$$\varepsilon^* \mathcal{M} = \mathcal{O}_{X_{\text{ét}}} \otimes_{\varepsilon^{-1} \mathcal{O}_{X_{\text{Zar}}}} \varepsilon^{-1} \mathcal{M}.$$

Comme l'homomorphisme d'Anneaux $\varepsilon^{-1} \mathcal{O}_{X_{\text{Zar}}} \rightarrow \mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}$ est plat (sa fibre en un point géométrique ξ de X localisé en $x \in X$ est l'homomorphisme

$\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow (\mathcal{O}_{X,x})_{\xi}^{\text{hs}}$ de l'anneau local de X en x vers son hensélisé strict relativement à l'extension séparablement close $\kappa(\xi)$ de $\kappa(x)$, le foncteur exact à droite ε^* est aussi exact à gauche; en outre, comme par définition on a

$$\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}(U, u) = \mathcal{O}_{X_{\text{Zar}}}(U)$$

pour tout ouvert de Zariski $U \xrightarrow{u} X$ de X le morphisme d'adjonction

$$\mathcal{M} \rightarrow \varepsilon_* \varepsilon^* \mathcal{M}$$

est un isomorphisme et ε^* est pleinement fidèle.

Cependant la paire de foncteurs adjoints $(\varepsilon^*, \varepsilon_*)$ entre les catégories de Modules $\text{Mod}(\mathcal{O}_{X_{\text{Zar}}})$ et $\text{Mod}(\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}})$ n'est pas en général une équivalence de catégories. Notons $\text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{X_{\text{Zar}}})$ la sous-catégorie pleine de $\text{Mod}(\mathcal{O}_{X_{\text{Zar}}})$ dont les objets sont les $\mathcal{O}_X$ -Modules quasi-cohérents.

LEMME (13.1.1). — *Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{X_{\text{Zar}}}$ -Module quasi-cohérent, on a*

$$R^n \varepsilon_* \varepsilon^* \mathcal{M} = (0)$$

pour tout entier $n \geq 1$. En d'autres termes la flèche d'adjonction

$$\mathcal{M} \rightarrow R\varepsilon_* \varepsilon^* \mathcal{M}$$

est un isomorphisme dans $D^+(\mathcal{O}_{X_{\text{Zar}}})$.

Preuve : ([SGA 4] VII, 4.3). □

Par définition, la sous-catégorie strictement pleine

$$(13.1.2) \quad \text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}})$$

de $\text{Mod}(\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}})$ formée des $\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}$ -Modules quasi-cohérents, est l'image essentielle de la restriction du foncteur pleinement fidèle ε^* à $\text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{X_{\text{Zar}}})$. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}$ -Module quasi-cohérent, la flèche d'adjonction

$$\varepsilon^* \varepsilon_* \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$$

est évidemment un isomorphisme et le couple de foncteurs $(\varepsilon^*, \varepsilon_*)$ induit une équivalence de catégories entre $\text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{X_{\text{Zar}}})$ et $\text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}})$.

LEMME (13.1.3). — *La sous-catégorie (strictement pleine) $\text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}})$ de la catégorie abélienne $\text{Mod}(\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}})$ est stable par extensions, limites inductives arbitraires et limites projectives finies. En particulier, elle est stable par noyaux et conoyaux, et est une sous-catégorie abélienne épaisse.*

Preuve : Les propriétés analogues pour la sous-catégorie pleine $\text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{X_{\text{Zar}}})$ de $\text{Mod}(\mathcal{O}_{X_{\text{Zar}}})$ sont démontrées dans ([EGA] I, 2.2). Comme ε^* est exact et

pleinement fidèle, elles impliquent immédiatement toutes les assertions du lemme à l'exception de la stabilité par extensions.

Mais si

$$0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$$

est une suite exacte de $\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}$ -Modules avec $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$ quasi-cohérents, la suite exacte longue que l'on en déduit par application du foncteur dérivé de ε_* se réduit à une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \varepsilon_* \mathcal{M}' \rightarrow \varepsilon_* \mathcal{M} \rightarrow \varepsilon_* \mathcal{M}'' \rightarrow 0$$

de $\mathcal{O}_{X_{\text{Zar}}}$ -Modules d'après (13.1.1). Par hypothèse $\varepsilon_* \mathcal{M}'$ et $\varepsilon_* \mathcal{M}''$ sont quasi-cohérents; il en est donc de même de $\varepsilon_* \mathcal{M}$ puisque $\text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{X_{\text{Zar}}})$ est stable par extensions. Par adjonction on a un morphisme de suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \varepsilon^* \varepsilon_* \mathcal{M}' & \rightarrow & \varepsilon^* \varepsilon_* \mathcal{M} & \rightarrow & \varepsilon^* \varepsilon_* \mathcal{M}'' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{M}' & \rightarrow & \mathcal{M} & \rightarrow & \mathcal{M}'' \rightarrow 0 \end{array}$$

dont les deux flèches verticales extrêmes et donc aussi la flèche intermédiaire sont des isomorphismes. Il en résulte que $\mathcal{M}$ est bien quasi-cohérent. □

LEMME (13.1.4). — *Un $\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}$ -Module M est quasi-cohérent si et seulement si il existe un recouvrement étale $\pi : X' \rightarrow X$ de S -schémas tel que $\pi^* M$ soit isomorphe au conoyau d'un homomorphisme de $\mathcal{O}_{X'_{\text{ét}}}$ -Modules libres*

$$\mathcal{O}_{X'_{\text{ét}}}^{(B)} \rightarrow \mathcal{O}_{X'_{\text{ét}}}^{(A)}$$

pour des ensembles A et B .

Preuve : Montrons tout d'abord la partie «si». On suppose donc que $\pi^* \mathcal{M}$ est le conoyau d'un homomorphisme de $\mathcal{O}_{X'_{\text{ét}}}$ -Modules libres. Comme $\mathcal{O}_{X'_{\text{ét}}}$ est trivialement un $\mathcal{O}_{X'_{\text{ét}}}$ -Module quasi-cohérent, un tel conoyau est automatiquement un Module quasi-cohérent sur X' et donc de la forme $\varepsilon^* \mathcal{V}'$ pour un $\mathcal{O}_{X'_{\text{Zar}}}$ -Module quasi-cohérent $\mathcal{V}'$. Mais, comme $\varepsilon^* \mathcal{V}'$ est isomorphe à $\pi^* \mathcal{M}$ et que le foncteur ε^* est pleinement fidèle, $\mathcal{V}'$ est automatiquement muni d'une donnée de descente relativement au morphisme étale surjectif $\pi : X' \rightarrow X$ et donc se descend ([SGA 1] VIII, 1.3) en un $\mathcal{O}_{X_{\text{Zar}}}$ -Module quasi-cohérent $\mathcal{V}$. Il est alors clair que le $\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}$ -Module $\mathcal{M}$ est isomorphe à $\varepsilon^* \mathcal{V}$ et est donc quasi-cohérent.

Inversement, si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{X_{\text{Zar}}}$ -Module quasi-cohérent, il existe par définition un recouvrement de X pour la topologie de Zariski sur lequel $\mathcal{M}$ est le conoyau d'un homomorphisme de Modules libres. Comme un tel recouvrement est aussi un recouvrement étale et que le foncteur ε^* est exact, la partie «seulement si» s'ensuit. □

Notons $D_{\text{qcoh}}(\mathcal{C}_{X_{\text{Zar}}})$ et $D_{\text{qcoh}}(\mathcal{C}_{X_{\text{ét}}})$ les sous-catégories (strictement pleines) de $D(\mathcal{C}_{X_{\text{Zar}}})$ et $D(\mathcal{C}_{X_{\text{ét}}})$ formées des complexes de Modules à cohomologie quasi-cohérente. Ce sont des sous-catégories triangulées d'après le lemme (13.1.3) et il résulte du lemme (13.1.1) que :

LEMME (13.1.5). — *Le couple de foncteurs adjoints $(\varepsilon^*, R\varepsilon_*)$ induit une équivalence de catégories entre $D_{\text{qcoh}}^+(\mathcal{C}_{X_{\text{Zar}}})$ et $D_{\text{qcoh}}^+(\mathcal{C}_{X_{\text{ét}}})$.* $\square$

Les principales propriétés des Modules étales quasi-cohérents sur les schémas se déduisent immédiatement des propriétés analogues des Modules quasi-cohérents pour la topologie de Zariski, et s'énoncent comme suit :

PROPOSITION (13.1.6). — (i) *Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux $\mathcal{C}_{X_{\text{ét}}}$ -Modules quasi-cohérents, il en est de même de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{C}_{X_{\text{ét}}}} \mathcal{N}$, et le foncteur $(-)^{\mathbb{L}} \otimes_{\mathcal{C}_{X_{\text{ét}}}} (-)$ envoie $D_{\text{qcoh}}^-(\mathcal{C}_{X_{\text{ét}}}) \times D_{\text{qcoh}}^-(\mathcal{C}_{X_{\text{ét}}})$ dans $D_{\text{qcoh}}^-(\mathcal{C}_{X_{\text{ét}}})$.*

(ii) *Soit $Y \xrightarrow{f} X$ un morphisme de S -schémas. Alors pour tout $\mathcal{C}_{X_{\text{ét}}}$ -Module quasi-cohérent $\mathcal{M}$, le $\mathcal{C}_{Y_{\text{ét}}}$ -Module $f^*\mathcal{M}$ est quasi-cohérent, et le foncteur Lf^* envoie $D_{\text{qcoh}}^-(\mathcal{C}_{X_{\text{ét}}})$ dans $D_{\text{qcoh}}^-(\mathcal{C}_{Y_{\text{ét}}})$.*

(iii) *Soit $Y \xrightarrow{f} X$ un morphisme quasi-compact de S -schémas. Alors pour tout $\mathcal{C}_{Y_{\text{ét}}}$ -Module quasi-cohérent $\mathcal{N}$, le $\mathcal{C}_{X_{\text{ét}}}$ -Module $f_*\mathcal{N}$ est quasi-cohérent, et le foncteur Rf_* envoie $D_{\text{qcoh}}^+(\mathcal{C}_{Y_{\text{ét}}})$ dans $D_{\text{qcoh}}^+(\mathcal{C}_{X_{\text{ét}}})$.*

DÉFINITION (13.1.7). — *Soit X un S -espace algébrique. Un $\mathcal{C}_{X_{\text{ét}}}$ -Module $\mathcal{M}$ est dit quasi-cohérent s'il existe un recouvrement étale $\pi : X' \rightarrow X$ tel que X' soit un S -schéma et que $\pi^*\mathcal{M}$ soit un $\mathcal{C}_{X'}$ -Module quasi-cohérent.*

Soit $\mathcal{X}$ un S -champ de Deligne-Mumford. Un $\mathcal{C}_{\mathcal{X}_{\text{ét}}}$ -Module $\mathcal{M}$ est dit quasi-cohérent s'il existe une présentation étale $P : X \rightarrow \mathcal{X}$ telle que $P^\mathcal{M}$ soit un $\mathcal{C}_{X_{\text{ét}}}$ -Module quasi-cohérent.*

Pour tout S -champ de Deligne-Mumford (et en particulier pour tout S -espace algébrique) $\mathcal{X}$, on notera encore $\text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}_{\text{ét}}})$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $\text{Mod}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}_{\text{ét}}})$ dont les objets sont les $\mathcal{C}_{\mathcal{X}_{\text{ét}}}$ -Modules quasi-cohérents.

Remarque (13.1.8) : Bien entendu les deux définitions de (13.1.7) sont compatibles entre elles, et redonnent la notion habituelle dans le cas des schémas. De plus les lemmes (13.1.3), (13.1.4) et (13.1.5) et la proposition (13.1.6) s'étendent sans modification aux S -espaces algébriques et aux S -champs de Deligne-Mumford.

PROPOSITION (13.1.9). — *Soient*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{h} & Y \\ f' \downarrow & \square & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

un carré cartésien de morphismes de S -espaces algébriques (voire de S -champs de Deligne-Mumford) avec f quasi-compact et $g : X' \rightarrow X$ plat et $\mathcal{N}$ un $\mathcal{C}_{Y_{\text{ét}}}$ -Module quasi-cohérent (ou plus généralement un objet de $D_{\text{qcoh}}^+(\mathcal{C}_{Y_{\text{ét}}})$). Alors la flèche canonique de changement de base

$$g^*Rf_*\mathcal{N} \rightarrow Rf'_*h^*\mathcal{N}$$

est un isomorphisme dans $D_{\text{qcoh}}^+(\mathcal{C}_{X'_{\text{ét}}})$.

Preuve : L'énoncé est trivial si g est étale, i.e. est un morphisme de localisation. La question est donc locale pour la topologie étale sur X' et X , et on peut supposer que X et X' sont des schémas affines.

Si Y et Y' sont des schémas, l'énoncé est un cas particulier du théorème de changement de base ([SGA 6] IV, 3.1.0).

En général, on peut calculer les images directes $Rf_*\mathcal{N}$ et $Rf'_*h^*\mathcal{N}$ à la Čech (cf. ([SGA 4] Vbis)), après avoir choisi une présentation étale de Y (et donc aussi de Y' par changement de base). Ceci nous ramène au cas déjà traité où Y (et donc Y') est un schéma. $\square$

(13.2) Soit $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique, annelé par son Anneau lisse-étale structural $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$. (Si $\mathcal{X} = X$ est un S -espace algébrique, on notera encore $\mathcal{C}_{X_{\text{lisse-ét}}}$ cet Anneau pour éviter toute confusion avec l'Anneau $\mathcal{C}_{X_{\text{ét}}}$.)

PROPOSITION (13.2.1). — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ -Module. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe une présentation $P : X \rightarrow \mathcal{X}$ de $\mathcal{X}$ telle que le Module lisse-étale $P^*\mathcal{M}$ sur X soit isomorphe au conoyau d'un homomorphisme de $\mathcal{C}_{X_{\text{lisse-ét}}}$ -Modules libres ;*

(ii) *$\mathcal{M}$ est cartésien et pour tout ouvert lisse-étale (U, u) de $\mathcal{X}$, le $\mathcal{C}_{U_{\text{ét}}}$ -Module $\mathcal{M}_{U, u}$ est quasi-cohérent ;*

(ii') *$\mathcal{M}$ est cartésien et il existe une présentation $P : X \rightarrow \mathcal{X}$ de $\mathcal{X}$ telle que le $\mathcal{C}_{X_{\text{ét}}}$ -Module $\mathcal{M}_{X, P}$ soit quasi-cohérent.*

Preuve : Commençons par l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit donc P une présentation de $\mathcal{X}$ telle que $P^*\mathcal{M}$ soit le conoyau d'un homomorphisme

$$\mathcal{C}_{X_{\text{lisse-ét}}}^{(B)} \xrightarrow{\xi} \mathcal{C}_{X_{\text{lisse-ét}}}^{(A)}$$

de $\mathcal{C}_{X_{\text{lisse-ét}}}$ -Modules libres. Alors, pour tout ouvert lisse-étale (V, v) de X , on a

$$\mathcal{M}_{V, P \circ v} = \text{Coker}(\mathcal{C}_{V_{\text{ét}}}^{(B)} \xrightarrow{\xi_{V_{\text{ét}}}} \mathcal{C}_{V_{\text{ét}}}^{(A)}),$$

et donc $P^*\mathcal{M}$ est cartésien et les $\mathcal{M}_{V, P \circ v}$ sont des Modules étales quasi-cohérents. Soit maintenant (U, u) un ouvert lisse-étale de $\mathcal{X}$. Notons (X_U, u_X) l'ouvert lisse-étale $P^{-1}(U, u)$ de X et considérons le diagramme à carrés 2-cartésiens

$$\begin{array}{ccc}
X'_U & \xrightarrow{u_{X'}} & X' \\
p_{1,U} \downarrow & \square & p_1 \downarrow p_2 \\
X_U & \xrightarrow{u_X} & X \\
P_U \downarrow & \square & \downarrow P \\
U & \xrightarrow{u} & \mathcal{X}
\end{array}$$

où $X' := X \times_{P, \mathcal{X}, P} X$ et p_1, p_2 sont les projections canoniques. Alors $\mathcal{M}_{X_U, P \circ u_X}$ est un module étale quasi-cohérent sur X_U muni d'une donnée de descente

$$p_{1,U}^* \mathcal{M}_{X_U, P \circ u_X} \cong \mathcal{M}_{X'_U, P \circ p_{1,U} \circ u_X} \cong \mathcal{M}_{X'_U, P \circ p_{2,U} \circ u_X} \cong p_{2,U}^* \mathcal{M}_{X_U, P \circ u_X}$$

relativement au morphisme lisse $P_U : X_U \rightarrow U$. Comme ce dernier morphisme admet des sections localement pour la topologie étale sur U , cette donnée de descente est effective et définit un Module étale quasi-cohérent $\widetilde{\mathcal{M}}_{U,u}$ sur U , muni d'un isomorphisme $P_U^* \widetilde{\mathcal{M}}_{U,u} \cong \mathcal{M}_{X_U, P \circ u_X}$. Ce Module quasi-cohérent n'est autre que le noyau

$$\text{Ker}(P_{U,*} \mathcal{M}_{X_U, u \circ P_U} \xrightarrow{\delta} P'_{U,*} \mathcal{M}_{X'_U, u \circ P'_U})$$

où $P'_U = P_U \circ p_{1,U} = P_U \circ p_{2,U}$ et où δ est la différence des homomorphismes de restriction induits par $p_{1,U}$ et $p_{2,U}$, et l'homomorphisme de transition $\mathcal{M}_{U,u} \rightarrow P_{U,*} \mathcal{M}_{X_U, u \circ P_U}$ définit donc un homomorphisme de Modules étales

$$\iota_{U,u} : \mathcal{M}_{U,u} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{U,u}.$$

Il est évident que pour (U, u) variable, les Modules étales $\widetilde{\mathcal{M}}_{U,u}$ s'organisent en un Module lisse-étale $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{X}$, et que les homomorphismes $\iota_{U,u}$ donnent lieu à un homomorphisme de Modules lisses-étales $\iota : \mathcal{M} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ tel que $P^* \iota$ soit un isomorphisme. Par construction $\mathcal{M}$ est cartésien et chaque Module étale $\mathcal{M}_{U,u}$ est quasi-cohérent. Il ne reste donc plus qu'à vérifier que ι est un isomorphisme. Notons $\mathcal{N}$ le noyau (resp. le conoyau) de ι . Pour voir que le Module étale $\mathcal{N}_{U,u}$ (qui est le noyau (resp. le conoyau) de $\iota_{U,u}$) est égal à (0), on peut remplacer U par un recouvrement étale de U et donc supposer que P_U admet une section σ . Mais on a alors des homomorphismes de transition $\theta : P_U^* \mathcal{N}_{U,u} \rightarrow \mathcal{N}_{X_U, u \circ P_U}$ et $\theta' : \sigma^* \mathcal{N}_{X_U, u \circ P_U} \rightarrow \mathcal{N}_{U,u}$ dont le « composé »

$$\theta' \circ \sigma^* \theta : \mathcal{N}_{U,u} \cong \sigma^* P_U^* \mathcal{N}_{U,u} \rightarrow \sigma^* \mathcal{N}_{X_U, u \circ P_U} \rightarrow \mathcal{N}_{U,u}$$

est l'identité, et on a

$$\mathcal{N}_{X_U, u \circ P_U} = (0)$$

puisque $\iota_{X_U, u \circ P_U}$ est un isomorphisme. Par suite, $\mathcal{N}_{U,u}$ est bien égal à (0) et la condition (ii) est vérifiée.

L'implication (ii) $\Rightarrow$ (ii') est évidente.

Montrons enfin que (ii') $\Rightarrow$ (i). Soit $P : X \rightarrow \mathcal{X}$ une présentation de $\mathcal{X}$. Quitte à remplacer X par un recouvrement étale, on peut supposer que le Module étale quasi-cohérent $\mathcal{M}_{X,P}$ est le conoyau d'un homomorphisme de $\mathcal{C}_{X_{\text{ét}}}$ -Modules libres

$$\mathcal{C}_{X_{\text{ét}}}^{(B)} \xrightarrow{\xi_{X,P}} \mathcal{C}_{X_{\text{ét}}}^{(A)}.$$

Mais alors, pour tout ouvert lisse-étale (V, v) de X , le Module étale $\mathcal{M}_{V,v} \cong v^* \mathcal{M}_{X,P}$ est isomorphe au conoyau de l'homomorphisme de $\mathcal{C}_{V_{\text{ét}}}$ -Modules libres

$$\mathcal{C}_{V_{\text{ét}}}^{(B)} \xrightarrow{\xi_{V,v}} \mathcal{C}_{V_{\text{ét}}}^{(A)}$$

où $\xi_{V,v} = v^* \xi_{X,P}$, et il s'ensuit que le faisceau lisse-étale $P^* \mathcal{M}$ est isomorphe au conoyau de l'homomorphisme de $\mathcal{C}_{X_{\text{lis-ét}}}$ -Modules libres

$$\mathcal{C}_{X_{\text{lis-ét}}}^{(B)} \xrightarrow{\xi} \mathcal{C}_{X_{\text{lis-ét}}}^{(A)}$$

défini par la collection des $\xi_{V,v}$, et la condition (i) est bien vérifiée. $\square$

DÉFINITION (13.2.2). — Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ -Module. On dira que $\mathcal{M}$ est quasi-cohérent s'il vérifie les conditions équivalentes de la proposition ci-dessus.

PROPOSITION (13.2.3). — Si $\mathcal{X}$ est un S -champ de Deligne-Mumford, l'équivalence de catégories de la proposition (12.7.4) pour $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ induit une équivalence de la catégorie des Modules lisses-étales quasi-cohérents sur $\mathcal{X}$ sur celle des Modules étales quasi-cohérents sur $\mathcal{X}$. $\square$

Soient $X \xrightarrow{P} \mathcal{X}$ une présentation et $X_{\bullet}$ le S -espace algébrique simplicial associé. Un Module étale simplicial quasi-cohérent sur $X_{\bullet}$ est un Module étale simplicial cartésien $\mathcal{M}_{\bullet}$ sur $X_{\bullet}$ tel que, pour chaque entier $n \geq 0$, le Module étale $\mathcal{M}_n$ sur X_n soit quasi-cohérent.

PROPOSITION (13.2.4). — L'équivalence de catégories de la proposition (12.8.2) pour $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ induit une équivalence de la catégorie des Modules lisses-étales quasi-cohérents sur $\mathcal{X}$ sur celle des Modules étales simpliciaux quasi-cohérents sur $X_{\bullet}$. $\square$

On notera $\text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$ la sous-catégorie strictement pleine de $\text{Mod}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$ dont les objets sont les $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ -Modules quasi-cohérents.

Il résulte des propriétés des Modules cartésiens (cf. (12.7)) et du lemme (13.1.3) que :

LEMME (13.2.5). — La sous-catégorie (strictement pleine) $\text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$ de $\text{Mod}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$ est stable par extensions, limites inductives arbitraires et limites projectives finies. En particulier, elle est stable par noyaux et conoyaux, et est une sous-catégorie abélienne épaisse de $\text{Mod}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$. $\square$

On notera $D_{\text{qcoh}}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$ la sous-catégorie strictement pleine de $D(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$ dont les objets sont les complexes de $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ -Modules à cohomologie quasi-cohérente. Enfin, pour tout symbole $\alpha \in \{[a, +\infty[, +,] - \infty, b], -, [a, b], b\}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$), on posera

$$D_{\text{qcoh}}^{\alpha}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}}) = D_{\text{qcoh}}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}}) \cap D^{\alpha}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}}).$$

D'après le lemme ci-dessus, la catégorie $D_{\text{qcoh}}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$ est une sous-catégorie triangulée de la catégorie $D(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$.

PROPOSITION (13.2.6). — (i) Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ -Modules quasi-cohérents, il en est de même de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{C}_{\mathcal{X}}} \mathcal{N}$; plus généralement le foncteur $(-)\otimes_{\mathcal{C}_{\mathcal{X}}} (-)$ envoie $D_{\text{qcoh}}^{-}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}}) \times D_{\text{qcoh}}^{-}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$ dans $D_{\text{qcoh}}^{-}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$.

(ii) Soit $\mathcal{Y} \xrightarrow{F} \mathcal{X}'$ un 1-morphisme de S -champs algébriques. Alors pour tout $\mathcal{C}_{\mathcal{X}'}$ -Module quasi-cohérent $\mathcal{M}$, le $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}}$ -Module $F^* \mathcal{M}$ est quasi-cohérent; plus généralement le foncteur LF^* envoie $D_{\text{qcoh}}^{-}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$ dans $D_{\text{qcoh}}^{-}(\mathcal{C}_{\mathcal{Y}})$.

(iii) Soit $\mathcal{Y} \xrightarrow{F} \mathcal{X}'$ un 1-morphisme quasi-compact de S -champs algébriques. Alors pour tout $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}}$ -Module quasi-cohérent $\mathcal{N}$, le $\mathcal{C}_{\mathcal{X}'}$ -Module $F_* \mathcal{N}$ est quasi-cohérent; plus généralement le foncteur RF_* envoie $D_{\text{qcoh}}^{+}(\mathcal{C}_{\mathcal{Y}})$ dans $D_{\text{qcoh}}^{+}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}'})$.

Preuve : Les assertions (i) et (ii) résultent immédiatement des définitions et des assertions (i) et (ii) de la proposition (13.1.6) pour les S -espaces algébriques (cf. (13.1.8)).

Montrons l'assertion (iii). Fixons une présentation $Q : Y \rightarrow \mathcal{Y}$ de $\mathcal{Y}$ et notons $Q_* : Y \rightarrow \mathcal{Y}$ la projection du S -espace simplicial correspondant sur $\mathcal{Y}$. Pour tout ouvert lisse-étale (U, u) de $\mathcal{X}'$ considérons le diagramme à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc} Y_{*,U} & \xrightarrow{u_{Y,*}} & Y \\ Q_{*,U} \downarrow & \square & \downarrow Q_* \\ \mathcal{Y}_U & \xrightarrow{u_{\mathcal{Y}}} & \mathcal{Y} \\ F_U \downarrow & \square & \downarrow F \\ U & \xrightarrow{u} & \mathcal{X}' \end{array}$$

Alors, si $\mathcal{V}'$ est un Module lisse-étale quasi-cohérent (et donc cartésien) sur $\mathcal{Y}$ le Module étale $(F_* \mathcal{V}')_{U,u}$ est canoniquement isomorphe (12.9.5) au noyau

$$\text{Ker}((F_{0,U})_* \mathcal{K}_{0,U} \xrightarrow{\partial} (F_{1,U})_* \mathcal{K}_{1,U})$$

où $F_{*,U} = F_U \circ Q_{*,U}$ et où ∂ est la différence des homomorphismes induits par les projections $p_{0,1}, p_{0,2} : Y_{1,U} \rightarrow Y_{0,U}$. Il en résulte d'une part que $(F_* \mathcal{V}')_{U,u}$ est un Module étale quasi-cohérent (13.1.8), et d'autre part que $F_* \mathcal{V}'$ est cartésien puisque pour tout entier $n \geq 0$ la formation de $(F_{n,U})_* \mathcal{K}_{n,U}$

commute aux changements de base lisses $\varphi : V \rightarrow U$ (13.1.9). L'assertion (iii) pour les Modules est donc démontrée. L'extension aux catégories dérivées est laissée au lecteur. $\square$

Remarque (13.2.7) : Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux Modules quasi-cohérents sur un S -champ algébrique $\mathcal{X}'$, le $\mathcal{C}_{\mathcal{X}'}$ -Module $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}_{\mathcal{X}'}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ n'est pas en général quasi-cohérent. Il l'est cependant si $\mathcal{M}$ est cohérent comme on le verra au paragraphe 15.

(13.3) Nous allons maintenant donner une autre description des Modules quasi-cohérents sur un S -champ algébrique, particulièrement utile quand le S -champ algébrique en question est une gerbe sur un S -espace algébrique.

Commençons par prolonger la famille des Modules étales $(\mathcal{M}_{U,u})_{(U,u) \in \text{ob Lis-ét}(\mathcal{X})}$ associés à un Module lisse-étale quasi-cohérent $\mathcal{M}$ sur un S -champs algébrique $\mathcal{X}$ à tous les couples (U, u) formés d'un S -espace algébrique U et d'un U -point u de $\mathcal{X}$ (on ne suppose plus que $U \xrightarrow{u} \mathcal{X}$ est lisse).

Soient donc $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ -Module quasi-cohérent. Pour tout S -espace algébrique U et tout point $u \in \text{ob } \mathcal{X}_U$ de $\mathcal{X}$ à valeurs dans U , on définit le $\mathcal{C}_{U,u}$ -Module quasi-cohérent

$$(13.3.1) \quad \mathcal{M}_{U,u} = u^* \mathcal{M}.$$

Ceci nous conduit tout naturellement à la notion de représentation d'un S -champ. Considérons la catégorie fibrée au-dessus de (Aff/S) ,

$$(13.3.2) \quad \text{Mod} \rightarrow (\text{Aff}/S),$$

définie comme suit. Pour tout $U = \text{Spec}(A)$ dans $\text{ob}(\text{Aff}/S)$, Mod_U est la catégorie opposée à celle des A -modules. Pour toute flèche $\varphi : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ dans (Aff/S) , le foncteur φ^* est le foncteur $B \otimes_A (-)$.

DÉFINITION (13.3.3). — Soit $\mathcal{X}$ un S -champ. Une représentation de $\mathcal{X}$ est un foncteur cartésien de catégories fibrées sur (Aff/S) de $\mathcal{X}$ vers Mod (cf. ([SGA 1] VI, 5.2)). On notera simplement $\text{Rep}(\mathcal{X})$ la catégorie des représentations de $\mathcal{X}$ (les flèches de $\text{Rep}(\mathcal{X})$ étant des 2-flèches dans la 2-catégorie des catégories fibrées au-dessus de (Aff/S)).

Plus concrètement, une représentation $\underline{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{X}$ est la donnée, pour tout $U = \text{Spec}(A) \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, d'un foncteur

$$\underline{\mathcal{M}}_U : \mathcal{X}_U \rightarrow \text{Mod}(A)^{\text{opp}}$$

et, pour toute flèche $V = \text{Spec}(B) \xrightarrow{\varphi} U = \text{Spec}(A)$ dans (Aff/S) , d'un isomorphisme de foncteurs ε_{φ} du foncteur composé

$$\mathcal{X}_U \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{X}_V \xrightarrow{\underline{\mathcal{M}}_V} \text{Mod}(B)^{\text{opp}}$$

sur le foncteur composé

$$\mathcal{X}_U \xrightarrow{\mathcal{M}_U} \text{Mod}(A)^{\text{opp}} \xrightarrow{B \otimes_A (-)} \text{Mod}(B)^{\text{opp}}$$

de telle sorte que, pour toute flèche $\psi : W = \text{Spec}(C) \rightarrow V = \text{Spec}(B)$ dans (Aff/S) on ait

$$(13.3.4) \quad \varepsilon_{\psi \circ \psi} = (C \otimes_B \varepsilon_{\psi}) \circ \varepsilon_{\psi}(\varphi^*)$$

(on a identifié de la manière usuelle les foncteurs $C \otimes_B (B \otimes_A (-))$ et $C \otimes_A (-)$).

Si $\mathcal{X}$ est algébrique, à tout $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ -Module quasi-cohérent $\mathcal{M}$ on attache la représentation $\underline{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{X}$ définie par

$$\mathcal{M}_U(x) = \Gamma(U_{\text{ét}}, \mathcal{M}_{U,x})$$

pour tout $U = \text{Spec}(A) \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et tout $x \in \text{ob}(\mathcal{X}_U)$, et avec les flèches de transition évidentes. Cette construction se prolonge évidemment en un foncteur

$$(13.3.5) \quad \text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}}) \rightarrow \text{Rep}(\mathcal{X}), \mathcal{M} \mapsto \underline{\mathcal{M}}.$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que :

PROPOSITION (13.3.6). — *Pour tout S -champ algébrique $\mathcal{X}$ le foncteur (13.3.5) est une équivalence de catégories.* $\square$

Exemple (13.3.7) : Si $\mathcal{X}$ est un S -champ de la forme $B(G/X)$ où $X = \text{Spec}(R)$ est un S -schéma affine et G un X -espace en groupes, une représentation de $B(G/X)$ n'est rien d'autre qu'un R -module M muni d'une action de G , i.e. d'une action du groupe $G(A)$ sur le A -module $A \otimes_R M$ pour chaque R -algèbre (commutative unitaire) A avec la condition de compatibilité évidente pour chaque homomorphisme $A \rightarrow B$ de R -algèbres.

DÉFINITION (13.4). — *Soit $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique et soit ξ un point de $\mathcal{X}$ de gerbe résiduelle $\mathcal{G}_{\xi}$ (cf. (11.1)). On appellera fibre d'un $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ -Module quasi-cohérent $\mathcal{M}$ en ξ et on notera $\mathcal{M}_{(\xi)}$ la représentation de $\mathcal{G}_{\xi}$, restriction de la représentation $\underline{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{X}$ associée à $\mathcal{M}$.*

Remarque (13.4.1) : Si le S -faisceau résiduel $\bar{\xi}$ du point ξ est le spectre d'un corps k et si $\mathcal{G}_{\xi}$ est une gerbe algébrique de type fini sur $\bar{\xi}$ (ce qui a lieu en particulier pour tout ξ si $\mathcal{X}$ est noethérien d'après (11.3)), alors $\mathcal{M}_{(\xi)}$ n'est autre qu'une représentation de la gerbe $\mathcal{G}_{\xi}$ au sens de ([Sa] III, 2.1.2) ou de ([De 2] 3.2) et s'obtient par « descente » à partir d'une représentation linéaire d'un schéma en groupes séparé et de type fini sur une extension finie de k .

DÉFINITION (13.4.2). — *Soient $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ -Module quasi-cohérent. Le support de $\mathcal{M}$ est le sous-champ (algébrique)*

fermé réduit de $\mathcal{X}$ complémentaire de la réunion des sous- S -champs (algébriques) ouverts $\mathcal{U}$ de $\mathcal{X}$ tels que $\mathcal{M}|_{\mathcal{U}} \equiv (0)$. On notera $\text{Supp}(\mathcal{M})$ ce sous- S -champ (algébrique) fermé réduit de $\mathcal{X}$.

DÉFINITION (13.4.3). — *Soit $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique. Un $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ -Module quasi-cohérent $\mathcal{M}$ est dit de type fini (resp. de présentation finie) si, pour une (et donc pour toute) présentation $X \xrightarrow{P} \mathcal{X}$, le $\mathcal{C}_{X_{\text{ét}}}$ -Module quasi-cohérent $\mathcal{M}_{X,P}$ est de type fini (resp. de présentation finie).*

Remarques (13.4.4) : (1) Avec les notations ci-dessus, pour que $\mathcal{M}$ soit de type fini (resp. de présentation finie) il faut et il suffit que, localement (au sens lisse) sur $\mathcal{X}$, $\mathcal{M}$ soit isomorphe à un quotient d'un $\mathcal{C}_{X_{\text{lisse-ét}}}$ -Module libre de rang fini (resp. au conoyau d'un homomorphisme de $\mathcal{C}_{X_{\text{lisse-ét}}}$ -Modules libres de rang fini).

(2) Si $\mathcal{X}$ est un champ de Deligne-Mumford, on a des notions correspondantes pour les Modules étales quasi-cohérents, que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter. Il vérifiera également sans peine que, dans ce cas, l'équivalence de catégories (13.2.3) préserve ces notions, en un sens évident.

(3) La propriété, pour un Module quasi-cohérent, d'être de type fini (resp. de présentation finie) est stable par image réciproque par tout 1-morphisme de S -champs algébriques, et par descente par tout morphisme fidèlement plat et quasi-compact de S -champs algébriques.

LEMME (13.4.5). — *Soient $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ -Module quasi-cohérent de type fini. Pour qu'un point ξ de $\mathcal{X}$ soit un point du support de $\mathcal{M}$ il faut et il suffit que la fibre $\mathcal{M}_{(\xi)}$ de $\mathcal{M}$ en ξ ne soit pas identiquement nulle.*

Preuve : On se ramène à ([EGA] 0, 5.2.2.1) en choisissant une présentation $P : X \rightarrow \mathcal{X}$ de $\mathcal{X}$ et en remarquant que $\text{Supp}(P^* \mathcal{M}) = P^{-1}(\text{Supp}(\mathcal{M}))$: si U est un ouvert de X tel que $(P^* \mathcal{M})|_U \equiv (0)$, $P(U)$ est un ouvert de $\mathcal{X}$ tel que $\mathcal{M}|_{P(U)} \equiv (0)$ (P est lisse et donc ouvert d'après ([EGA] IV, 2.4.6)). $\square$

(13.5) Terminons ce chapitre par la théorie de la descente fidèlement plate des Modules quasi-cohérents pour les 1-morphismes de S -champs algébriques.

Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ un 1-morphisme de S -champs algébriques. On notera

$$(13.5.1) \quad F_* : \mathcal{C}_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{Y}}$$

le S -champ algébrique simplicial augmenté cosquelette de F ([De 1] 5.1.4).

LEMME (13.5.2). — *Si F est plat (cf. (4.14)) le foncteur*

$$(F_*)^* : \text{Mod}(\mathcal{C}_{\mathcal{Y}}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$$

est exact et se dérive trivialement en un foncteur, noté encore $(F_*)^*$, de $D(\mathcal{C}_{\mathcal{Y}})$ dans $D(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$, qui envoie $D_{\text{qcoh}}(\mathcal{C}_{\mathcal{Y}})$ dans $D_{\text{qcoh}}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$. $\square$

Rappelons que ([SGA 4] Vbis, 2.4) :

DÉFINITION (13.5.3). — Un 1-morphisme plat $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ de S -champs algébriques est dit de descente cohomologique (pour les Modules quasi-cohérents) si, pour tout $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}}$ -Module quasi-cohérent $\mathcal{N}$, la flèche d'adjonction dans $D^+(\mathcal{C}_{\mathcal{Y}})$

$$F^* \rightarrow R(F)_*(F_*)^* \mathcal{N}$$

est un isomorphisme.

Un 1-morphisme plat $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ de S -champs algébriques est dit de descente cohomologique effective (pour les Modules quasi-cohérents) s'il est de descente cohomologique et si, pour tout $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ -Module quasi-cohérent cartésien $\mathcal{M}$, il existe un $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}}$ -Module quasi-cohérent $\mathcal{N}$ et un isomorphisme de $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ -Modules de $(F_*)^* \mathcal{N}$ sur $\mathcal{M}$. (rappelons que $\mathcal{M}$ est dit cartésien si pour toute flèche $[n] \rightarrow [m]$, la flèche correspondante de $\mathcal{C}_{\mathcal{X}_m}$ -Modules $(\mathcal{M}_n)_{| \mathcal{X}_m} \rightarrow \mathcal{M}_m$ est un isomorphisme).

PROPOSITION (13.5.4). — Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ un 1-morphisme de S -champs algébriques qui est de descente cohomologique effective. Alors, le foncteur

$$(F_*)^* : D_{\text{qcoh}}^+(\mathcal{C}_{\mathcal{Y}}) \rightarrow D_{\text{qcoh}}^+(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$$

est pleinement fidèle, d'image essentielle la sous-catégorie pleine de $D_{\text{qcoh}}^+(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$ dont les objets sont les complexes $M_\bullet$ de $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ -Modules tels que, pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$, le $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ -Module quasi-cohérent $\mathcal{H}^i(M_\bullet)$ soit cartésien.

Preuve : Il suffit de vérifier que les flèches d'adjonction

$$N \rightarrow R(F)_*(F_*)^* N \text{ et } (F_*)^* R(F)_*(M_\bullet) \rightarrow M_\bullet$$

sont des isomorphismes dans $D_{\text{qcoh}}^+(\mathcal{C}_{\mathcal{Y}})$ et $D_{\text{qcoh}}^+(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$ respectivement, pour tout $N \in \text{ob } D_{\text{qcoh}}^+(\mathcal{C}_{\mathcal{Y}})$ et tout $M_\bullet \in \text{ob } D_{\text{qcoh}}^+(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$ avec $\mathcal{H}^i(M_\bullet)$ cartésien quel que soit $i \in \mathbb{Z}$. Or c'est bien le cas si $N = \mathcal{N} \in \text{ob } \text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{C}_{\mathcal{Y}})$, et si $M_\bullet = \mathcal{M}_\bullet$ est un objet cartésien de $\text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$. D'où la conclusion par un argument standard de réduction à ces cas particuliers. $\square$

THÉORÈME (13.5.5). — Soit $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un 1-morphisme fidèlement plat de S -champs algébriques. On suppose vérifiée l'une des deux hypothèses suivantes :

- (i) F est quasi-compact,
- (ii) F est localement de présentation finie.

Alors, F est de descente cohomologique effective (pour les Modules quasi-cohérents).

Preuve : Comme l'assertion est locale pour la topologie lisse sur $\mathcal{Y}$, on peut supposer que $\mathcal{Y} = Y$ est un objet de (Aff/S) .

Commençons par traiter le cas où $\mathcal{X} = X$ est un S -schéma. Si le morphisme fidèlement plat de S -schémas $F = f$ est quasi-compact, l'assertion n'est autre que ([SGA 4] Vbis, 4.2.1). Si f est localement de présentation finie, il résulte de ([EGA] IV, 2.4.6) qu'il existe un changement de base $Y' \xrightarrow{h} Y$ avec $Y' \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et h fidèlement plat tel que le morphisme $X' \xrightarrow{f'} Y'$ déduit de f par ce changement de base admette une section (prendre pour Y' la somme disjointe d'une famille finie d'ouverts affines de X dont les images par f recouvrent Y). Alors f' est de descente cohomologique effective ([SGA 4] Vbis, 3.3.1) et comme $X' \xrightarrow{g} X$ et h sont de descente cohomologique effective d'après ce qui précède, il en est de même de f .

On étend facilement ce qui précède au cas où $\mathcal{X} = X$ est un S -espace algébrique, i.e. au cas où F est représentable.

Enfin, passons au cas général. Soient $X \xrightarrow{P} \mathcal{X}$ une présentation de $\mathcal{X}$, avec P quasi-compact si F l'est, et $X \xrightarrow{f} Y$ le morphisme de S -espaces algébriques $F \circ P$. Alors d'après ce qui précède f et P sont de descente cohomologique effective et par suite il en est de même de F . $\square$

14. Constructions locales

(14.1) Considérons la catégorie fibrée au-dessus de (Aff/S)

$$(14.1.1) \quad \mathcal{E}_S \rightarrow (\text{Aff}/S)$$

définie comme suit. Pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, $\mathcal{E}_{s_U}$ est la catégorie des U -espaces (cf. §0) et, pour toute flèche $V \xrightarrow{\varphi} U$ dans (Aff/S) , le foncteur φ^* est le foncteur $V \times_{\varphi, U} (-)$.

DÉFINITION (14.1.2). — Une construction locale sur un S -champ $\mathcal{X}$ est un foncteur cartésien

$$\underline{\mathcal{Y}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}_S.$$

(cf. ([SGA 1] VI, 5.2)).

En termes plus concrets, une construction locale $\underline{\mathcal{Y}}$ sur $\mathcal{X}$ est la donnée, pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, d'un foncteur

$$\underline{\mathcal{Y}}_U : \mathcal{X}_U \rightarrow \mathcal{E}_{s_U}$$

et, pour toute flèche $V \xrightarrow{\varphi} U$ dans (Aff/S) , d'un isomorphisme de foncteurs ε_{φ} du foncteur composé

$$\mathcal{X}_U \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{X}_V \xrightarrow{\underline{\mathcal{Y}}_V} \mathcal{E}_{s_V}$$

sur le foncteur composé

$$\mathcal{X}_U \xrightarrow{\underline{\mathcal{Y}}_U} \mathcal{E}_{s_U} \xrightarrow{V \times_{\varphi, U} (-)} \mathcal{E}_{s_V},$$

de telle sorte que, pour toute flèche $W \xrightarrow{\psi} V$ dans (Aff/S) , on ait la relation de cocycle

$$(14.1.3) \quad \varepsilon_{\varphi \circ \psi} = (W \times_{\psi, V} \varepsilon_{\varphi}) \circ \psi(\varphi^*),$$

où l'on a identifié de la manière habituelle les foncteurs $W \times_{\psi, V} (V \times_{\varphi, U} (-))$ et $W \times_{\varphi \circ \psi, U} (-)$.

À toute construction locale $\underline{\mathcal{Y}}$ sur $\mathcal{X}$, associons le S -groupoïde au-dessus de $\mathcal{X}$

$$(14.1.4) \quad F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$$

suivant. Pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, la catégorie fibre $\mathcal{Y}_U$ est la catégorie des couples (x, y) où $x \in \text{ob} \mathcal{X}_U$ et où y est une section globale du U -espace $\mathcal{Y}_U(x)$; pour toute flèche $V \xrightarrow{\varphi} U$ dans (Aff/S) et tout $(x, y) \in \text{ob} \mathcal{Y}_U$, $\varphi^*(x, y) = (\varphi^*x, y')$ où y' est la section globale du V -espace $\mathcal{Y}_V(\varphi^*x)$ induite par y via l'isomorphisme

$$\varepsilon(x) : \mathcal{Y}_V(\varphi^*x) \xrightarrow{\sim} V \times_{\varphi, U} \mathcal{Y}_U(x);$$

enfin, F est donné par $F(x, y) = x$ pour tout $(x, y) \in \text{ob} \mathcal{Y}_U$ et tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$.

PROPOSITION (14.1.5). — *Le S -groupoïde $\mathcal{Y}$ défini ci-dessus est un S -champ.*

Preuve : Cela résulte aussitôt des définitions. $\square$

DÉFINITION (14.1.6). — *Une construction locale $\mathcal{Y}$ sur $\mathcal{X}$ sera dite algébrique (resp. algébrique et possédant une propriété P comme en (3.10)) si, pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et tout $x \in \text{ob} \mathcal{X}_U$, le U -espace $\mathcal{Y}_U(x)$ est algébrique (resp. est algébrique et le morphisme structural $\mathcal{Y}_U(x) \rightarrow U$ possède la propriété P).*

PROPOSITION (14.1.7). — *Si $\mathcal{Y}$ est une construction locale algébrique (resp. algébrique et possédant la propriété P) sur $\mathcal{X}$, le 1-morphisme de S -champs $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ de (14.1.4) est représentable (resp. est représentable et possède la propriété P).* $\square$

Remarque (14.1.8) : En fait, le foncteur $\mathcal{Y} \mapsto (\mathcal{Y} \xrightarrow{F} \mathcal{X})$ est une équivalence de la catégorie des constructions locales algébriques (resp. algébriques et possédant la propriété P) sur la catégorie des 1-morphismes représentables (resp. représentables et possédant la propriété P) de S -champs de but $\mathcal{X}$. $\square$

Dans la suite de ce chapitre nous allons donner quelques exemples de constructions locales.

(14.2) Soit $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique.

À tout 1-morphisme schématique et affine $\mathcal{Y} \xrightarrow{F} \mathcal{X}$ de S -champs algébriques on associe la $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Algèbre quasi-cohérente

$$(14.2.1) \quad \mathcal{L}(\mathcal{Y}) = F_* \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$$

(cf. (13.2.6)(iii)).

Inversement, soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Algèbre (commutative et unitaire) quasi-cohérente. On associe à $\mathcal{A}$ la construction locale $\mathcal{Y}$ sur $\mathcal{X}$ définie par

$$(14.2.2) \quad \mathcal{Y}_U(x) = \text{Spec}(\Gamma(U, \mathcal{A}_{U,x})),$$

muni de sa structure de U -schéma évidente; c'est une construction locale algébrique et affine et donc, le 1-morphisme de S -champs associé à cette construction locale, noté

$$(14.2.3) \quad F : \mathcal{Y} = \text{Spec}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{X},$$

est schématique et affine (cf. (14.1.7)).

PROPOSITION (14.2.4). — *Les constructions (14.2.1) et (14.2.3) définissent une équivalence entre la catégorie des 1-morphismes schématiques et affines de S -champs algébriques de but $\mathcal{X}$ et la catégorie opposée à la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Algèbres (commutatives et unitaires) quasi-cohérentes.*

De plus, ces constructions commutent à tout changement de S -champ algébrique de base $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ et coïncident avec les constructions de ([EGA] I, 9.1) quand $\mathcal{X}$ est un S -schéma. $\square$

Remarque (14.2.5) : Pour toute $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Algèbre quasi-cohérente $\mathcal{A}$, on a une équivalence de catégories donnée par F_* de $\text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}})$ sur $\text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{A})$ (cf. ([EGA] I, 9.2)).

Application (14.2.6) : Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Module quasi-cohérent. On pose

$$\mathbb{V}(\mathcal{E}) = \text{Spec}(\text{Sym}(\mathcal{E}))$$

où $\text{Sym}(\mathcal{E})$ est la $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Algèbre symétrique sur le $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Module $\mathcal{E}$ (qui est clairement quasi-cohérente). La projection canonique

$$\Pi : \mathbb{V}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{X}$$

est schématique et affine.

Pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, la catégorie fibre $\mathbb{V}(\mathcal{E})_U$ du S -champ $\mathbb{V}(\mathcal{E})$ est la catégorie des paires (x, α) où $x \in \text{ob} \mathcal{X}_U$ et où α est un homomorphisme de $\mathcal{O}_{U, \text{ét}}$ -Modules

$$\mathcal{E}_{U, x} \rightarrow \mathcal{O}_{U, \text{ét}},$$

et le foncteur Π_U envoie (x, α) sur x . Par suite, sur $\mathbb{V}(\mathcal{E})$, on a un homomorphisme universel de $\mathcal{V}(\mathcal{E})$ -Modules

$$\Pi^* \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}(\mathcal{E}),$$

et, pour tout 1-morphisme $F : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ de S -champs algébriques, les (classes de 2-isomorphisme de) factorisations

$$\begin{array}{ccc}
& & \mathbb{V}(\mathcal{E}) \\
& \nearrow & \downarrow \Pi \\
\mathcal{X}' & \xrightarrow{F} & \mathcal{X}
\end{array}$$

sont en bijection avec les homomorphismes de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}$ -Modules

$$F^* \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}'}$$

Tout homomorphisme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -linéaire $\xi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ induit par fonctorialité un 1-morphisme schématique et affine

$$\mathbb{V}(\xi) : \mathbb{V}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{V}(\mathcal{E})$$

de S -champs au dessus de $\mathcal{X}$. Si ξ est un épimorphisme, $\mathbb{V}(\xi)$ est une immersion fermée. Pour tout $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Module quasi-cohérent $\mathcal{F}$, $\mathbb{V}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{F})$ s'identifie canoniquement à $\mathbb{V}(\mathcal{E}) \times_{\mathcal{X}} \mathbb{V}(\mathcal{F})$.

Le morphisme diagonal $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}$ induit un 1-morphisme d'addition

$$+ : \mathbb{V}(\mathcal{E}) \times_{\mathcal{X}} \mathbb{V}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{V}(\mathcal{E})$$

qui fait de $\mathbb{V}(\mathcal{E})$ un «schéma en groupes abéliens» au dessus de $\mathcal{X}$. En particulier, on a le *groupe additif* sur $\mathcal{X}$,

$$\mathbb{G}_{a, \mathcal{X}} = \mathbb{V}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}).$$

La structure de schéma en groupes abéliens de $\mathbb{G}_{a, \mathcal{X}}$ sur $\mathcal{X}$ se prolonge naturellement en une structure de schéma en anneaux commutatifs sur $\mathcal{X}$, et la structure de schéma en groupes abéliens de $\mathbb{V}(\mathcal{E})$ sur $\mathcal{X}$ se prolonge naturellement en une structure de schéma en $\mathbb{G}_{a, \mathcal{X}}$ -modules sur $\mathcal{X}$ (cf. ([EGA] I, 9.4.12 et 9.4.13)).

On dira que $\mathbb{V}(\mathcal{E})$, muni de cette structure de schéma en $\mathbb{G}_{a, \mathcal{X}}$ -modules sur $\mathcal{X}$, est le *fibré vectoriel généralisé associé au* $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Module quasi-cohérent $\mathcal{E}$.

La formation du fibré vectoriel généralisé $\mathbb{V}(\mathcal{E})$ commute à tout changement de S -champ algébrique de base $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ et coïncide avec celle de ([EGA] I, 9.4) si $\mathcal{X}$ est un S -schéma.

Application (14.2.7) : Il y a une bijection naturelle entre les sous- S -champs algébriques fermés $\mathcal{Y} \xrightarrow{I} \mathcal{X}$ et les Idéaux quasi-cohérents $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$: à $\mathcal{I}$ on associe

$$\mathcal{Y} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathcal{I}) \hookrightarrow \mathcal{X}$$

et à $\mathcal{Y} \xrightarrow{I} \mathcal{X}$ on associe l'Idéal $\text{Ker}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}} \rightarrow I_* \mathcal{O}_{\mathcal{Y}})$.

En particulier, on a (cf. (4.10))

$$\mathcal{X}_{\text{red}} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathcal{N}_{\mathcal{X}})$$

où $\mathcal{N}_{\mathcal{X}}$ est le nilradical de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, et, pour tout $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Module quasi-cohérent de type fini $\mathcal{M}$, on a (cf. (13.4.2))

$$\text{Supp}(\mathcal{M}) = \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathcal{I})_{\text{red}}$$

où $\mathcal{I}$ est l'Annulateur de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$.

Application (14.2.8) : Tout 1-morphisme représentable quasi-compact $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ de S -champs algébriques admet une factorisation de Stein, à savoir

$$\mathcal{Y} \xrightarrow{F'} \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X},$$

où $\mathcal{X}' = \text{Spec}(F_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \rightarrow \mathcal{X}$ est le 1-morphisme (schématique et affine) canonique. Le 1-morphisme $F' : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}'$ est représentable et quasi-compact et l'homomorphisme naturel $\mathcal{O}_{\mathcal{X}'} \rightarrow F'_* \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ est un isomorphisme.

(14.3) Soient $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique et $\mathcal{S}$ une $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Algèbre (commutative et unitaire) $(\mathbb{Z})$ -graduée (à degrés positifs) quasi-cohérente. On associe à $\mathcal{S}$ la construction locale $\underline{\mathcal{Y}}$ sur $\mathcal{X}$ définie par

$$(14.3.1) \quad \underline{\mathcal{Y}}_U(x) = \text{Proj}(\Gamma(U, \mathcal{A}_{U,x})),$$

muni de sa structure de U -schéma évidente; c'est une construction locale algébrique. On note

$$(14.3.2) \quad F : \underline{\mathcal{Y}} = \text{Proj}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{X}$$

le 1-morphisme schématique associé à cette construction locale.

Si le $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Module $\mathcal{A}$ engendre $\mathcal{S}$, on définit le $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ -Module (quasi-cohérent) *inverse* (i.e. localement libre de rang 1 pour la topologie lisse-étale sur $\mathcal{X}$) $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(1)$ comme dans ([EGA] II, 3.2.5.1) et on a une correspondance entre $\mathcal{S}$ -Modules gradués quasi-cohérents et $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ -Modules quasi-cohérents comme celle décrite dans ([EGA] II, 3.2 et II, 3.3).

La construction (14.3.2) commute à tout changement de S -champ algébrique de base $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ et coïncide avec la construction de ([EGA] II, 3.1) quand $\mathcal{X}$ est un S -schéma.

Application (14.3.3) : Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Module quasi-cohérent. On pose

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}) = \text{Proj}(\text{Sym}^*(\mathcal{E}))$$

où $\text{Sym}^*(\mathcal{E})$ est la $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Algèbre graduée symétrique sur le $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Module $\mathcal{E}$ (qui est clairement quasi-cohérente et engendrée par $\text{Sym}^1(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$). La projection canonique

$$\Pi : \mathbb{P}(\mathcal{Z}) \rightarrow \mathcal{K}$$

est schématique.

Pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, la catégorie fibre $\mathbb{P}(\mathcal{Z})_U$ du S -champ $\mathbb{P}(\mathcal{Z})$ est la catégorie des classes d'isomorphie de paires (x, α) où $x \in \text{ob} \mathcal{K}_U$ et où

$$\alpha : \mathcal{Z}_{U,x} \rightarrow \mathcal{Z}$$

est un épimorphisme de $\mathcal{C}_{U,\text{ét}}$ -Modules de $\mathcal{Z}_{U,x}$ sur un $\mathcal{C}_{U,\text{ét}}$ -Module inversible $\mathcal{Z}$ (cf. ([EGA] II, 4.2.3)), et le foncteur Π_U envoie (x, α) sur x . Par suite, sur $\mathbb{P}(\mathcal{Z})$, on a un $\mathcal{C}_{\mathbb{P}(\mathcal{Z})}$ -Module inversible universel $\mathcal{C}_{\mathbb{P}(\mathcal{Z})}(1)$ et un épimorphisme universel de $\mathcal{C}_{\mathbb{P}(\mathcal{Z})}$ -Modules

$$\Pi^* \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{P}(\mathcal{Z})}(1)$$

et, pour tout 1-morphisme $F : \mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}$ de S -champs algébriques, les (classes de 2-isomorphisme de) factorisations

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{P}(\mathcal{Z}) & \\ \nearrow & \downarrow \Pi & \\ \mathcal{K}' & \xrightarrow{F} & \mathcal{K} \end{array}$$

sont en bijection avec les classes d'isomorphie d'épimorphismes de $\mathcal{C}_{\mathcal{K}'}$ -Modules

$$F^* \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$$

où $\mathcal{Z}$ est inversible.

La formation de $\mathbb{P}(\mathcal{Z})$ commute à tout changement de S -champ algébrique de base $\mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}$ et coïncide avec la construction de ([EGA] I, 9.7.5) si $\mathcal{K}$ est un S -schéma.

Application (14.3.4) : Soit $G : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{K}'$ un 1-morphisme représentable de S -champs algébriques. On dira que G est projectif (resp. quasi-projectif) s'il existe une $\mathcal{C}_{\mathcal{K}'}$ -Algèbre graduée quasi-cohérente $\mathcal{S}$ telle que le $\mathcal{C}_{\mathcal{K}'}$ -Module quasi-cohérent $\mathcal{A}$ soit de type fini (cf. (13.4.3)) et engendre $\mathcal{S}$, et un 1-morphisme représentable $I : \mathcal{Y} \rightarrow \text{Proj}(\mathcal{S})$ qui est un isomorphisme (resp. une immersion ouverte quasi-compacte d'image dense) et qui rend 2-commutatif le triangle

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & \xrightarrow{I} & \text{Proj}(\mathcal{S}) \\ \searrow G & & \downarrow F \\ & & \mathcal{K}' \end{array}$$

de 1-morphismes de (Ch/S) , où F est la projection canonique.

Pour que G soit projectif (resp. quasi-projectif), il faut et il suffit qu'il existe un $\mathcal{C}_{\mathcal{K}'}$ -Module quasi-cohérent de type fini $\mathcal{Z}$ et un 1-morphisme représentable $I : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{Z})$, qui soit une immersion fermée (resp. une immersion quasi-compacte) et qui rend 2-commutatif le triangle

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & \xrightarrow{I} & \mathbb{P}(\mathcal{Z}) \\ \searrow G & & \downarrow F \\ & & \mathcal{K}' \end{array}$$

de 1-morphismes de (Ch/S) , où F est la projection canonique.

(14.4) Les définitions et les résultats de cette section sont dus à Deligne et Grothendieck (cf. ([SGA 4] XVIII, 1.4)).

Une *catégorie de Picard* (strictement commutative) est une catégorie non vide $\mathcal{V}$ dont tous les morphismes sont des isomorphismes, munie d'un foncteur *d'addition*

$$+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2,$$

d'un *isomorphisme d'associativité*

$$\sigma_{v_1, v_2, v_3} : (v_1 + v_2) + v_3 \xrightarrow{\sim} v_1 + (v_2 + v_3)$$

fonctoriel en v_1, v_2 et v_3 , et d'un *isomorphisme de commutativité*

$$\tau_{v_1, v_2} : v_1 + v_2 \xrightarrow{\sim} v_2 + v_1$$

fonctoriel en v_1 et v_2 , et vérifiant les axiomes suivants :

(o) pour tout objet v de $\mathcal{V}$ le foncteur $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, $w \mapsto v + w$, est une équivalence de catégories,

(i) (Axiome du pentagone)

$$(\text{Id}_{v_1} + \sigma_{v_2, v_3, v_4}) \circ \sigma_{v_1, v_2 + v_3, v_4} \circ (\sigma_{v_1, v_2, v_3} + \text{Id}_{v_4}) = \sigma_{v_1, v_2, v_3 + v_4} \circ \sigma_{v_1 + v_2, v_3, v_4}$$

pour tous objets v_1, v_2, v_3 et v_4 de $\mathcal{V}$,

(ii) $\tau_{v, v} = \text{Id}_{v+v}$ pour tout objet v de $\mathcal{V}$,

(iii) $\tau_{v_1, v_2} \circ \tau_{v_2, v_1} = \text{Id}_{v_2 + v_1}$ pour tous objets v_1 et v_2 de $\mathcal{V}$,

(iv) (Axiome de l'hexagone)

$$\sigma_{v_1, v_2, v_3} \circ \tau_{v_3, v_1 + v_2} \circ \sigma_{v_3, v_1, v_2} = (\text{Id}_{v_1} + \tau_{v_3, v_2}) \circ \sigma_{v_1, v_3, v_2} \circ (\tau_{v_3, v_1} + \text{Id}_{v_2})$$

pour tous objets v_1, v_2 et v_3 de $\mathcal{V}$.

LEMME (14.4.1). — (i) Une catégorie de Picard $\mathcal{V}$ admet toujours un objet neutre, i.e. un couple (e, ε) formé d'un objet e et d'un isomorphisme

$\varepsilon : e + e \xrightarrow{\sim} e$. De plus, cet objet neutre est unique à isomorphisme unique près, et pour tout objet v de $\mathcal{Z}$ il existe un et un seul isomorphisme

$$\alpha_v : e + v \xrightarrow{\sim} v$$

(resp.

$$\beta_v : v + e \xrightarrow{\sim} v)$$

tel que

$$(\text{Id}_e + \alpha_v) \circ \sigma_{e,e,v} = \varepsilon + \text{Id}_v$$

(resp.

$$(\beta_v + \text{Id}_e) \circ \sigma_{v,e,e} = \text{Id}_v + \varepsilon).$$

(ii) Soit (e, ε) un objet neutre d'une catégorie de Picard $\mathcal{Z}$. Alors, pour tout objet v de $\mathcal{Z}$, il existe toujours un inverse, i.e. un couple $(-v, \iota_v)$ formé d'un objet $-v$ de $\mathcal{Z}$ et d'un isomorphisme

$$\iota_v : v + (-v) \xrightarrow{\sim} e.$$

De plus, cet inverse est unique à isomorphisme unique près.

Preuve : Voir ([SGA 4] XVIII, 1.4.3 et 1.4.4). $\square$

DÉFINITION (14.4.2). — Un S -champ de Picard (strictement commutatif) est un S -champ $\mathcal{Z}$, muni d'un 1-morphisme de S -champs, dit d'addition,

$$+ : \mathcal{Z} \times_S \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}, (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2,$$

d'un 2-isomorphisme d'associativité

$$\sigma_{v_1, v_2, v_3} : (v_1 + v_2) + v_3 \xrightarrow{\sim} v_1 + (v_2 + v_3)$$

et d'un 2-isomorphisme de commutativité

$$\tau_{v_1, v_2} : v_1 + v_2 \xrightarrow{\sim} v_2 + v_1,$$

qui, pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, font de la catégorie $\mathcal{Z}_U$ une catégorie de Picard.

On laisse au lecteur le soin d'énoncer et de démontrer l'analogue du lemme (14.4.1) pour les S -champs de Picard. On a donc les notions de *section neutre* $e : S \rightarrow \mathcal{Z}$ et de 1-morphisme *inverse* $- : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ pour tout S -champ de Picard $\mathcal{Z}$.

Un morphisme *additif* $F : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}'$ de S -champs de Picard est un 1-morphisme entre les S -champs sous-jacents, muni d'un 2-isomorphisme entre 1-morphismes de $\mathcal{Z} \times_S \mathcal{Z}$ dans $\mathcal{Z}'$,

$$F(v_1 + v_2) \xrightarrow{\sim} F(v_1) + F(v_2).$$

On a une notion évidente d'isomorphismes entre tels morphismes additifs. Les S -champs de Picard forment une catégorie dont les morphismes sont les classes de 2-isomorphisme de morphismes additifs. Cette catégorie est clairement additive.

(14.4.3) Soit

$$V^\bullet = [V^{-1} \xrightarrow{\partial} V^0]$$

un complexe de longueur 1 de S -espaces en groupes abéliens, i.e. de faisceaux en groupes abéliens pour la topologie étale sur (Aff/S) .

On associe à $V^\bullet$ le S -groupoïde $\mathcal{Z}'$ suivant. Pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, les objets de $\mathcal{Z}'_U$ sont les sections de V^0 sur U et, pour tout couple (v^0, w^0) d'objets de $\mathcal{Z}'_U$, les flèches de v^0 vers w^0 dans $\mathcal{Z}'_U$ sont les sections v^{-1} de V^{-1} sur U telles que

$$\partial(v^{-1}) = w^0 - v^0,$$

la composition de ces flèches étant induite par l'addition de V^{-1} .

L'addition de V^0 induit un foncteur

$$+ : \mathcal{Z}' \times \mathcal{Z}' \rightarrow \mathcal{Z}'.$$

LEMME (14.4.4). — Le S -groupoïde $\mathcal{Z}'$ ci-dessus est un S -préchamp. Le S -champ $\mathcal{Z}$ associé à ce S -préchamp, muni du foncteur

$$+ : \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$$

induit par le foncteur $+'$, est de manière naturelle un S -champ de Picard.

De plus, le S -espace grossier attaché à $\mathcal{Z}'$ (cf. (3.19)) est de manière naturelle un S -espace en groupes abéliens et est canoniquement isomorphe au faisceau de cohomologie $\mathcal{H}^0(V^\bullet)$. En outre, pour toute section neutre $e \in \text{ob} \mathcal{Z}'_S$, le S -espace en groupes abéliens $\mathcal{Z}'_{\text{som}}(e, e)$ est canoniquement isomorphe au faisceau de cohomologie $\mathcal{H}^{-1}(V^\bullet)$.

Preuve : Voir ([SGA 4] XVIII, 1.4.11). $\square$

On dira que le S -champ de Picard $\mathcal{Z}'$ ci-dessus est le S -champ de Picard associé au complexe de longueur 1 (de S -espaces en groupes abéliens) $V^\bullet$.

THÉOREME (14.4.5). — La construction du S -champ de Picard associé à un complexe de longueur 1 induit une équivalence de la catégorie dérivée $D^{[-1,0]}(S, \mathbb{Z})$ des complexes de longueur 1 de S -espaces en groupes abéliens sur la catégorie des S -champs de Picard.

Preuve : Voir ([SGA 4] XVIII, 1.4.15). $\square$

Exemple (14.4.6) : Si, dans (14.4.3), ∂ est un monomorphisme (resp. un épimorphisme), alors le champ de Picard associé à $V^\bullet$ est canoniquement

équivalent au champ associé au S -espace $\mathcal{H}^0(V^*)$ (resp. au S -champ classifiant $B(\mathcal{H}^{-1}(V^*)/S)$).

Exemple (14.4.7) : Soit $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique. Notons $\mathcal{P}ic(\mathcal{X}/S)$ le S -champ des $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ -Modules (quasi-cohérents) inversibles, i.e. localement libres de rang 1 pour la topologie lisse-étale sur $\mathcal{X}$. Pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, la catégorie $\mathcal{P}ic(\mathcal{X}/S)_U$ est donc la catégorie dont les objets sont les $\mathcal{C}_{\mathcal{X} \times_S U}$ -Modules inversibles et dont les flèches sont les isomorphismes de $\mathcal{C}_{\mathcal{X} \times_S U}$ -Modules.

On peut alors « définir » le complexe de longueur 1

$$\tau_{\leq 0}(\text{Ra}_* \mathbb{G}_{\mathbf{m}, \mathcal{X}}[1]),$$

où $a : \mathcal{X} \rightarrow S$ est le morphisme structural, comme l'objet de $D^{[-1,0]}(S, \mathbb{Z})$ dont le S -champ de Picard associé est $\mathcal{P}ic(\mathcal{X}/S)$ (cf. ([SGA 4] XVIII, 1.5)).

Exemple (14.4.8) : Comme cas particulier utile de l'exemple précédent considérons le S -champ de Picard $\mathcal{P}ic(B(G/S)/S)$ où G est un S -schéma en groupes lisse de type fini. On sait que la catégorie des $\mathcal{C}_{B(G/S)}$ -Modules quasi-cohérents est équivalente à la catégorie des faisceaux de $\mathcal{C}_{S_{\text{ét}}}$ -Modules quasi-cohérents $\mathcal{M}$, munis d'une action de G , i.e. d'un homomorphisme

$$G \rightarrow \mathcal{A}ut(\mathcal{M})$$

de faisceaux étales en groupes sur S (cf. (12.4.6) et (13.3.7)). Bien entendu un $\mathcal{C}_{B(G/S)}$ -Module quasi-cohérent est inversible si et seulement si le $\mathcal{C}_{S_{\text{ét}}}$ -Module quasi-cohérent $\mathcal{M}$ correspondant est inversible et alors, $\mathcal{A}ut(\mathcal{M})$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{G}_{\mathbf{m}, S}$. Comme tout ceci vaut tout aussi bien après avoir remplacé S par n'importe quel $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, on a démontré que, pour tout tel U , la catégorie fibre $\mathcal{P}ic(B(G/S)/S)_U$ est équivalente à la catégorie des couples $(\mathcal{V}, \chi)$ où $\mathcal{V}$ est un $\mathcal{C}_{U_{\text{ét}}}$ -Module inversible et $\chi : U \times_S G \rightarrow \mathbb{G}_{\mathbf{m}, U}$ un caractère algébrique.

En d'autres termes, $\mathcal{P}ic(B(G/S)/S)$ est le quotient du S -espace en groupes $\widehat{G}$ des caractères de G par l'action triviale de $\mathbb{G}_{\mathbf{m}, S}$, ou encore le produit de $\widehat{G}$ par $B(\mathbb{G}_{\mathbf{m}, S}/S)$. Le complexe de longueur 1 correspondant est canoniquement isomorphe à $[\mathbb{G}_{\mathbf{m}, S} \rightarrow \widehat{G}]$ où la flèche est triviale.

DÉFINITION (14.4.9). — *Un S -champ algébrique de Picard est un S -champ de Picard dont le S -champ sous-jacent est algébrique.*

Exemple (14.4.10) : Soit

$$\mathcal{Z}^\bullet = [\mathcal{Z}^0 \xrightarrow{\partial} \mathcal{Z}^1]$$

un complexe de longueur 1 de $\mathcal{C}_S$ -Modules quasi-cohérents. La construction $\mathbb{V}$ de Grothendieck étudiée ci-dessus (cf. (14.2.6)) associe à ce complexe le complexe

$$[\mathbb{V}(\mathcal{Z}^1) \xrightarrow{\mathbb{V}(\partial)} \mathbb{V}(\mathcal{Z}^0)]$$

de S -fibrés vectoriels généralisés. On notera

$$(14.4.10.1) \quad \mathbb{V}(\mathcal{Z}^\bullet)$$

le S -champ de Picard associé au complexe sous-jacent de S -espaces en groupes abéliens.

Si l'on suppose de plus que $\mathcal{Z}^1$ est localement libre de type fini et que $\mathcal{Z}^0$ est de présentation finie, le S -champ de Picard $\mathbb{V}(\mathcal{Z}^\bullet)$ est algébrique. En effet, on applique (10.4) à la S -relation d'équivalence fppf

$$\mathbb{V}(\mathcal{Z}^0) \times_S \mathbb{V}(\mathcal{Z}^1) \xrightarrow[\partial \circ \text{pr}_2 + \text{pr}_1]{\text{pr}_1} \mathbb{V}(\mathcal{Z}^0)$$

(les hypothèses de (10.4) sont bien vérifiées d'après ([EGA] I, 9.4.11, I, 9.1.13, I, 9.1.3 et IV, 17.3.8)).

(14.5) Les définitions et les résultats de (14.4) gardent un sens et sont encore valables si l'on remplace le schéma S par un S -champ algébrique de base $\mathcal{X}$ arbitraire, et le site étale (Aff/S) par le site lisse-étale de $\mathcal{X}$. En particulier :

DÉFINITION (14.5.1). — *Un S -champ de Picard (relatif au dessus d'un S -champ algébrique $\mathcal{X}$ est un S -champ $\mathcal{V}$ muni d'un 1-morphisme de S -champs*

$$\Pi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{X},$$

d'un 1-morphisme de S -champs, dit d'addition,

$$+ : \mathcal{V} \times_{\Pi, \mathcal{X}, \Pi} \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, \quad (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2,$$

d'un 2-isomorphisme d'associativité

$$\sigma_{v_1, v_2, v_3} : (v_1 + v_2) + v_3 \xrightarrow{\sim} v_1 + (v_2 + v_3)$$

et d'un 2-isomorphisme de commutativité

$$\tau_{v_1, v_2} : v_1 + v_2 \xrightarrow{\sim} v_2 + v_1,$$

qui, pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et tout $x \in \text{ob} \mathcal{X}_U$, font du U -champ $U \times_{x, \mathcal{X}, \Pi} \mathcal{V}$ un U -champ de Picard.

Le théorème (14.4.5) se généralise en :

THÉORÈME (14.5.2). — *Soit $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique. La construction du $\mathcal{X}$ -champ de Picard associé à un complexe de longueur 1 induit une équivalence de la catégorie dérivée $D^{[-1,0]}(\mathcal{X}, \mathbb{Z})$ des complexes de longueur 1 de faisceaux en groupes abéliens (pour la topologie lisse-étale sur $\mathcal{X}$) sur la catégorie des S -champs de Picard relatifs au dessus de $\mathcal{X}$.*

15. Modules cohérents sur les S -champs algébriques localement noethériens

(15.1) Soit X un S -espace algébrique *localement noethérien*. Nous appellerons *cohérent* tout $\mathcal{O}_{X,\bullet}$ -Module (quasi-cohérent et) de type fini (cf. (13.4.3)).

On notera $\text{Mod}_{\text{coh}}(\mathcal{O}_{X,\bullet})$ la sous-catégorie strictement pleine de $\text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{X,\bullet})$ dont les objets sont les $\mathcal{O}_{X,\bullet}$ -Modules cohérents.

Les principales propriétés de la catégorie $\text{Mod}_{\text{coh}}(\mathcal{O}_{X,\bullet})$ sont les suivantes.

PROPOSITION (15.2). — (i) *Le $\mathcal{O}_{X,\bullet}$ -Module $\mathcal{O}_{X,\bullet}$ est cohérent.*

(ii) *Tout sous-quotient quasi-cohérent d'un $\mathcal{O}_{X,\bullet}$ -Module cohérent est aussi cohérent. La sous-catégorie $\text{Mod}_{\text{coh}}(\mathcal{O}_{X,\bullet})$ de $\text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{X,\bullet})$ est stable par noyaux, conoyaux et extensions, et plus généralement par limites inductives et projectives finies. En particulier, c'est une sous-catégorie abélienne épaisse de $\text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{X,\bullet})$.*

(iii) *Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{X,\bullet}$ -Module cohérent et $\mathcal{V}$ est un $\mathcal{O}_{X,\bullet}$ -Module quasi-cohérent, alors $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,\bullet}}(\mathcal{M}, \mathcal{V})$ est quasi-cohérent.*

(iv) *Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux $\mathcal{O}_{X,\bullet}$ -Modules cohérents, il en est de même de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{X,\bullet}} \mathcal{N}$ et de $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,\bullet}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.*

Preuve : Il suffit de recopier ([EGA] 0, 5.3). □

PROPOSITION (15.3). — *Si $X = X$ est un S -espace algébrique localement noethérien l'équivalence de catégories*

$$\text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}) \xrightarrow{\sim} \text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{X_{\text{lis-ét}}})$$

de (13.2.3) induit une équivalence de catégories

$$\text{Mod}_{\text{coh}}(\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}) \xrightarrow{\sim} \text{Mod}_{\text{coh}}(\mathcal{O}_{X_{\text{lis-ét}}}).$$

Si de plus X est un S -schéma l'équivalence de catégories

$$\text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{X_{\text{Zar}}}) \xrightarrow{\sim} \text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{X_{\text{lis-ét}}})$$

déduite de (13.2.3) et (13.1.2) induit une équivalence de catégories

$$\text{Mod}_{\text{coh}}(\mathcal{O}_{X_{\text{Zar}}}) \xrightarrow{\sim} \text{Mod}_{\text{coh}}(\mathcal{O}_{X_{\text{lis-ét}}}).$$

□

PROPOSITION (15.4). — Soit $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique noethérien. Alors tout $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Module quasi-cohérent est limite inductive filtrante de ses sous- $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Modules cohérents.

Preuve : Soit $X \xrightarrow{P} \mathcal{X}$ une présentation de $\mathcal{X}$ où X est un schéma affine et noethérien de sorte que P est quasi-compact. Pour tout $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Module quasi-cohérent $\mathcal{M}$, le $\mathcal{O}_{X_{\text{zar}}}$ -Module sous-jacent au $\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}$ -Module $\mathcal{M}_{X,P}$ et noté encore $\mathcal{M}_{X,P}$, est quasi-cohérent. Par suite, si $(\mathcal{V}_{\alpha})_{\alpha \in A}$ est la famille ordonnée filtrante des sous- $\mathcal{O}_{X_{\text{zar}}}$ -Modules cohérents de $\mathcal{M}_{X,P}$, $\mathcal{M}_{X,P}$ est limite inductive (filtrante) des $\mathcal{V}_{\alpha}$.

Il s'ensuit que le $\mathcal{O}_{X_{\text{lis-ét}}}$ -Module $P^*\mathcal{M}$ est limite inductive (filtrante) des $\mathcal{O}_{X_{\text{lis-ét}}}$ -Modules cohérents déduits des $\mathcal{O}_{X_{\text{zar}}}$ -Modules cohérents $\mathcal{V}_{\alpha}$ (cf. (15.3)) et que l'on notera encore $\mathcal{N}_{\alpha}$, et, comme P_* commute aux limites inductives filtrantes, on a

$$P_*P^*\mathcal{M} = \varinjlim_{\alpha} P_*\mathcal{N}_{\alpha}.$$

Soit $\iota : \mathcal{M} \rightarrow P_*P^*\mathcal{M}$ la flèche d'adjonction et, pour tout $\alpha \in A$, soit $\mathcal{M}_{\alpha}$ le sous- $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Module image inverse du sous- $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Module $P_*\mathcal{N}_{\alpha}$ de $P_*P^*\mathcal{M}$ par ι . On a encore

$$\mathcal{M} = \varinjlim_{\alpha} \mathcal{M}_{\alpha}$$

et il suffit de montrer que chaque $\mathcal{M}_{\alpha}$ est cohérent. Or chaque $\mathcal{M}_{\alpha}$ est clairement quasi-cohérent (P est quasi-compact et donc $P_*P^*\mathcal{M}$ et les $P_*\mathcal{V}_{\alpha}$ sont quasi-cohérents, d'après (13.2.6) (iii)) et donc il suffit de montrer que chaque $P^*\mathcal{M}_{\alpha}$ est un sous- $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Module d'un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Module cohérent. Comme par définition de $\mathcal{M}_{\alpha}$ on a le carré commutatif (et même cartésien)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\alpha} & \longrightarrow & P_*\mathcal{V}_{\alpha} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M} & \longrightarrow & P_*P^*\mathcal{M} \end{array}$$

on a par adjonction le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} P^*\mathcal{M}_{\alpha} & \longrightarrow & \mathcal{N}_{\alpha} \\ \downarrow & & \downarrow \\ P^*\mathcal{M} & \longrightarrow & P^*\mathcal{M} \end{array}$$

et comme P est une flèche de localisation et donc que la flèche $P^*\mathcal{M}_{\alpha} \rightarrow P^*\mathcal{M}$ est injective, on voit que $P^*\mathcal{M}_{\alpha}$ est un sous- $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Module de $\mathcal{V}_{\alpha}$, d'où la proposition. $\square$

COROLLAIRE (15.5). — Soient $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique noethérien et $\mathcal{U}$ un sous- S -champ (algébrique) ouvert de $\mathcal{X}$; on note $I : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ le 1-morphisme d'inclusion. Soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Module quasi-cohérent et $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}$

un sous- $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ -Module cohérent de $I^*\mathcal{M}$. Alors il existe un sous- $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Module cohérent $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{N}_{\mathcal{U}} = I^*\mathcal{N}$.

Preuve : Soit $\widetilde{\mathcal{N}}$ le sous- $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Module quasi-cohérent de $\mathcal{M}$ image réciproque du sous- $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ -Module quasi-cohérent $I_*\mathcal{N}_{\mathcal{U}}$ de $I_*I^*\mathcal{M}$ par la flèche d'adjonction $\mathcal{M} \rightarrow I_*I^*\mathcal{M}$ (I est quasi-compact puisque $\mathcal{X}$ est noethérien). On a clairement $I^*\widetilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N}_{\mathcal{U}}$. Comme

$$\widetilde{\mathcal{N}} = \varinjlim_{\alpha} \widetilde{\mathcal{V}_{\alpha}},$$

où $(\widetilde{\mathcal{V}_{\alpha}})_{\alpha \in A}$ est la famille ordonnée filtrante des sous- $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Modules cohérents de $\mathcal{N}$ d'après (15.4), il existe $\alpha \in A$ tel que $\mathcal{N} = \widetilde{\mathcal{V}_{\alpha}}$ réponde à la question. $\square$

On notera $D_{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ la sous-catégorie (strictement) pleine de $D_{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ dont les objets sont les complexes de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Modules à cohomologie cohérente. Enfin, pour tout symbole $\alpha \in \{\pm, [a, b], [a, +\infty[, -\infty, b]\}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$, $a \leq b$), on posera

$$D_{\text{coh}}^{\alpha}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}) = D_{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \cap D_{\text{qcoh}}^{\alpha}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}).$$

THÉORÈME (15.6). — Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux S -champs algébriques localement noethériens et $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ un 1-morphisme de S -champs. Alors :

- (i) le foncteur $(-)\otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}(-)$ envoie $D_{\text{coh}}^{-}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \times D_{\text{coh}}^{-}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ dans $D_{\text{coh}}^{-}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$,
- (ii) le foncteur $R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}(-, -)$ envoie $D_{\text{coh}}^{-}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})^{\text{opp}} \times D_{\text{qcoh}}^{+}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ dans $D_{\text{qcoh}}^{+}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$, et $D_{\text{coh}}^{-}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})^{\text{opp}} \times D_{\text{coh}}^{+}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ dans $D_{\text{coh}}^{+}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$,
- (iii) le foncteur LF^* envoie $D_{\text{coh}}^{-}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}})$ dans $D_{\text{coh}}^{-}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$,
- (iv) si l'on suppose de plus que F est propre (cf. (7.11)) et vérifie la condition $(*)$ de (7.12), le foncteur RF_* envoie $D_{\text{coh}}^{+}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ dans $D_{\text{coh}}^{+}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}})$.

Remarque (15.6.1) : L'assertion (iv) s'applique notamment lorsque F est propre et relativement de Deligne-Mumford, cf. remarque (7.12.3) et plus bas, théorème (16.6). $\square$

Preuve des parties (i), (ii) et (iii) de (15.6) : En choisissant des présentations on ramène ces énoncés aux énoncés analogues pour les schémas ([EGA] III, 6.5.13 et III, 13.3.3), ([Har] I, 7.3). $\square$

Avant d'aborder la preuve de la partie (iv) de (15.6) nous allons établir le lemme technique suivant :

LEMME (15.7). — Soit $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique noethérien et soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie pleine de $D_{\text{coh}}^{+}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ ayant les propriétés suivantes :

- (i) $0 \in \text{ob } \mathcal{C}$ et, pour tout triangle distingué

$$M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow M'[1]$$

dans $D_{\text{coh}}^+(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$, si deux des sommets sont dans $\mathcal{C}$, il en est de même du troisième ;

(ii) si $M \in D_{\text{coh}}^+(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$ et si $\tau_{\leq n} M \in \text{ob } \mathcal{C}$ pour tout entier n (truncation canonique), on a $M \in \text{ob } \mathcal{C}$;

(iii) pour tout sous- S -champ (algébrique) fermé intègre $\mathcal{Y} \xrightarrow{I} \mathcal{X}$ et tout $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}}$ -Module cohérent $\mathcal{N}$, de support $\mathcal{Y}$, il existe $N \in \text{ob } D_{\text{coh}}^{[0, +\infty[}(\mathcal{C}_{\mathcal{Y}})$ et une flèche $\alpha : \mathcal{M} \rightarrow N$ dans $D(\mathcal{C}_{\mathcal{Y}})$ tels que $I_* N \in \text{ob } \mathcal{C}$ et que α soit un isomorphisme sur un sous- S -champ (algébrique) ouvert dense de $\mathcal{Y}$.

Alors, on a en fait $\mathcal{C} = D_{\text{coh}}^+(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$.

Preuve : Pour tout sous- S -champ (algébrique) fermé $\mathcal{Y} \xrightarrow{I} \mathcal{X}$, considérons la propriété $P(\mathcal{Y})$ suivante : la sous-catégorie pleine $I_* D_{\text{coh}}^+(\mathcal{C}_{\mathcal{Y}})$ de $D_{\text{coh}}^+(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$ est contenue dans $\mathcal{C}$. Par induction noethérienne, il suffit de montrer que $P(\mathcal{Z})$ est vérifiée dès que $P(\mathcal{Z})$ l'est pour tout sous- S -champ (algébrique) fermé $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{Y}$, distinct de $\mathcal{Y}$. De plus, pour montrer $P(\mathcal{Y})$, il suffit clairement de montrer que la sous-catégorie pleine $I_* \text{Mod}_{\text{coh}}(\mathcal{C}_{\mathcal{Y}})$ de $D_{\text{coh}}^+(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$ est contenue dans $\mathcal{C}$ (propriétés (i) et (ii) de $\mathcal{C}$).

Soit donc $\mathcal{N}$ un $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}}$ -Module cohérent et posons $\mathcal{M} = I_* \mathcal{N}$. Si $\mathcal{Y}_{\text{red}} \hookrightarrow \mathcal{X}$ est défini par l'idéal cohérent $\mathcal{I}$ de $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ (cf. (14.1.8)), il existe un entier $m > 0$ tel que $\mathcal{I}^m \mathcal{M} = (0)$. Comme on a les suites exactes

$$0 \rightarrow \frac{\mathcal{I}^{k-1} \mathcal{M}}{\mathcal{I}^k \mathcal{M}} \rightarrow \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{I}^k \mathcal{M}} \rightarrow \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{I}^{k-1} \mathcal{M}} \rightarrow 0$$

dans $\text{Mod}_{\text{coh}}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$, la propriété (i) de $\mathcal{C}$ assure que $\mathcal{M} \in \text{ob } \mathcal{C}$ dès que, pour $k = 1, \dots, n$, $\mathcal{I}^{k-1} \mathcal{M} / \mathcal{I}^k \mathcal{M} \in \text{ob } \mathcal{C}$. Par suite, on peut supposer que $\mathcal{I} \mathcal{M} = 0$ ou, ce qui revient au même, que $\mathcal{Y}$ est réduit.

Distinguons maintenant deux cas.

a) $\mathcal{Y}$ est réductible, soit $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2$ où $\mathcal{Y}_i \xrightarrow{I_i} \mathcal{X}$ ($i = 1, 2$) est un sous- S -champ (algébrique) fermé réduit de $\mathcal{X}$, contenu dans $\mathcal{Y}$ et distinct de $\mathcal{Y}$. Alors, si l'on pose

$$\mathcal{M}_i = (I_i)_* (I_i)^* \mathcal{M} \quad (i = 1, 2),$$

on a un homomorphisme canonique

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$$

qui est un isomorphisme sur $\mathcal{X} - (\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2)$, de sorte que $\text{Ker}(\alpha)$ et $\text{Coker}(\alpha)$ sont des objets de $\mathcal{C}$ par hypothèse d'induction noethérienne. Comme $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont eux aussi des objets de $\mathcal{C}$ par hypothèse d'induction noethérienne, la propriété (i) de $\mathcal{C}$ assure que $\mathcal{M} \in \text{ob } \mathcal{C}$ et on a terminé dans ce cas.

b) $\mathcal{Y}$ est intègre. Il existe alors par la propriété (iii) de $\mathcal{C}$ une flèche $\mathcal{N} \xrightarrow{\alpha} N$ dans $D_{\text{coh}}^{[0, +\infty[}(\mathcal{C}_{\mathcal{Y}})$, avec $I_* N \in \text{ob } \mathcal{C}$, telle que α soit un isomorphisme au-dessus d'un sous- S -champ (algébrique) ouvert dense de $\mathcal{Y}$. Alors, si K est un cône dans $D(\mathcal{C}_{\mathcal{Y}})$ de la flèche α , pour tout entier n , $\mathcal{H}^n(I_* K) \in \text{ob } \mathcal{C}$ par hypothèse d'induction noethérienne et donc

$I_* K \in \text{ob } \mathcal{C}$ (propriétés (i) et (ii) de c). Par suite $\mathcal{M} \in \text{ob } \mathcal{C}$ (propriété (i) de $\mathcal{C}$) et le lemme est démontré. $\square$

Preuve de la partie (iv) de (15.6) : Le problème est local (pour la topologie lisse-étale) sur $\mathcal{Y}$. En particulier le cas où F est représentable se déduit du cas des morphismes propres d'espaces algébriques noethériens ([Kn] IV, 4.1). Dans le cas général, on peut supposer, vu l'hypothèse de (7.12), que $\mathcal{Y} = Y$ est un S -schéma affine noethérien et qu'il existe un S -espace algébrique X (lui aussi noethérien), un morphisme propre de S -espaces algébriques $X \xrightarrow{f} Y$ et un 1-morphisme représentable, propre et surjectif $X \xrightarrow{A} \mathcal{X}$ de S -champs algébriques tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{A} & \mathcal{X} \\ f \searrow & & \nearrow F \\ & Y & \end{array}$$

soit 2-commutatif.

Soit $\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine de $D_{\text{coh}}^+(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$ dont les objets sont les complexes M tels que $RF_* M \in \text{ob } D_{\text{coh}}^+(\mathcal{C}_Y)$. $\mathcal{C}$ vérifie clairement les propriétés (i) et (ii) de (15.7) et, pour achever la preuve de la partie (iv) de (15.6), il ne reste plus qu'à montrer que $\mathcal{C}$ vérifie aussi la propriété (iii) de (15.7).

Quitte à remplacer $\mathcal{X}$ par un de ses sous- S -champs (algébriques) fermés intègres et A et F par leurs restrictions, on est ramené finalement à prouver l'assertion suivante : supposons $\mathcal{X}$ intègre et soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ -Module cohérent, alors il existe $M \in D_{\text{coh}}^{[0, +\infty[}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$ et une flèche $\mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} M$ dans $D(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$ tels que $RF_* M \in \text{ob } D_{\text{coh}}^+(\mathcal{C}_Y)$ et que α soit un isomorphisme sur un sous- S -champ (algébrique) ouvert dense de $\mathcal{X}$.

Pour prouver cette dernière assertion considérons le S -espace algébrique simplicial

$$X_\bullet = \text{cosq}_0(X \xrightarrow{A} \mathcal{X})$$

([De 1] 5.1.4) et notons $X_\bullet \xrightarrow{A_\bullet} \mathcal{X}$ l'augmentation naturelle. On a la flèche d'adjonction

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} R(A_\bullet)_* (A_\bullet)^* \mathcal{M} = M$$

et la suite spectrale de ([De 1] 5.2.7.1), jointe au fait déjà remarqué que le théorème est démontré pour les 1-morphismes représentables, assure que $M \in \text{ob } D_{\text{coh}}^+(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$ et que $RF_* M \in \text{ob } D_{\text{coh}}^+(\mathcal{C}_Y)$. Maintenant, on applique le théorème de platitude générique ([EGA] IV, 6.9.1), qui s'étend tel quel pour les 1-morphismes représentables de S -champs algébriques, au 1-morphisme représentable et surjectif $X \xrightarrow{A} \mathcal{X}$. On en déduit qu'il existe un sous- S -champ (algébrique) ouvert dense $\mathcal{U}$ de $\mathcal{X}$ au-dessus duquel A est fidèlement plat. Alors, α est un isomorphisme au-dessus de $\mathcal{U}$ par descente fidèlement plate (13.5.5), d'où la conclusion. $\square$

16. Le théorème principal de Zariski. Applications à la structure globale des champs de Deligne-Mumford

(16.1) *Fermeture intégrale.* Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ sont deux Anneaux commutatifs d'un topos T , on sait, suivant ([EGA] II, 6.3.1), ce qu'est la *fermeture intégrale* de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$: c'est la sous- $\mathcal{A}$ -Algèbre de $\mathcal{B}$ dont les sections au-dessus de U sont les $s \in \Gamma(U, \mathcal{B})$ telles que $\mathcal{A}[s]$ (le sous- $\mathcal{A}$ -Module de $\mathcal{B}$ engendré par les s^n ($n \geq 0$)) soit de type fini. Il revient au même d'exiger que s soit localement racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathcal{A}$.

Lorsque T est le topos zariskien d'un schéma X , et que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des $\mathcal{O}_X$ -Algèbres *quasi-cohérentes*, alors on sait (loc. cit., 6.3.4) que la fermeture intégrale $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ est encore une $\mathcal{O}_X$ -Algèbre quasi-cohérente, et que si U est un ouvert affine de X , alors $\Gamma(U, \mathcal{A}')$ est la fermeture intégrale de $\Gamma(U, \mathcal{A})$ dans $\Gamma(U, \mathcal{B})$. En fait, ces résultats ne sont explicitement donnés dans loc. cit. que lorsque $\mathcal{A} = \mathcal{O}_X$; mais le cas plus général présenté ici se démontre de la même manière, et repose essentiellement sur le fait qu'au niveau des anneaux, l'opération de fermeture intégrale commute à la localisation par rapport à une partie multiplicative.

Pour obtenir des résultats analogues sur les champs (et même les espaces) algébriques, nous avons besoin de la compatibilité, moins immédiate, de cette opération avec la localisation étale ou lisse :

PROPOSITION (16.2). — *Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme lisse de schémas, et soient $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ deux $\mathcal{O}_X$ -Algèbres quasi-cohérentes. Désignons par $\mathcal{A}'$ la fermeture intégrale de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$. Alors $f^* \mathcal{A}'$ est la fermeture intégrale de $f^* \mathcal{A}$ dans $f^* \mathcal{B}$.*

Preuve : La question étant locale sur X et Y , on peut supposer que X et Y sont affines. On peut aussi remplacer X par le X -schéma $\text{Spec}(\mathcal{A})$ et ainsi supposer que $\mathcal{A} = \mathcal{O}_X$; comme tous les faisceaux considérés sont quasi-cohérents, on est ramené à montrer le

LEMME (16.2.1). — *Soient A un anneau, B une A -algèbre de type fini lisse sur A , C une A -algèbre, A' la fermeture intégrale de A dans C . Alors $B \otimes_A A'$ est la fermeture intégrale de B dans $B \otimes_A C$.*

Preuve : Quitte à localiser, on peut supposer que B est étale sur une A -algèbre de polynômes $A[X_1, \dots, X_n]$, ce qui nous ramène à deux cas :

- (i) $B = A[X]$: cf. ([Bou] chap. V, §1 n° 3, prop. 13).
- (ii) B est étale sur A : nous suivons alors fidèlement ([Ra 3] VII, §2, prop. 2). (On trouvera une autre démonstration dans ([EGA] IV, 18.12.15); elle procède par réduction au cas noethérien, où l'on a l'énoncé plus fort ([EGA] IV, 6.14.4) dans lequel le morphisme $\text{Spec}(A') \rightarrow \text{Spec}(A)$ est seulement supposé normal).

Il suffit de traiter le cas où B est une A -algèbre étale « standard » $(B_1)_g$ où $B_1 = A[X]/(f)$, avec $f \in A[X]$ unitaire de degré n , et $g = f'(x)$ où $x \in B_1$ est la classe de X . On définit des éléments $b_i \in B_1$ par la relation $f(X) = (X - x)(\sum_{i=0}^{n-1} b_i X^i)$ dans $B_1[X]$, et l'on a, pour tout $z \in B_1$:

$$(16.2.1.1) \quad gz = \sum_{i=0}^{n-1} \text{Tr}_{B_1/A}(b_i z) x^i$$

d'après ([Ra 3] VII, §1, cor. de la prop. 0). La même relation est évidemment satisfaite pour $z \in B_1 \otimes_A C$, en remplaçant $\text{Tr}_{B_1/A}$ par $\text{Tr}_{B_1 \otimes_A C/C}$.

Soit B' (resp. B'_1) la fermeture intégrale de B (resp. B_1) dans $B \otimes_A C$ (resp. $B_1 \otimes_A C$) : il est clair que $B \otimes_A A' \subset B'$, et d'autre part on a $B' = (B'_1)_g$ par localisation. Il suffit donc de voir que $B'_1 \subset (B_1 \otimes_A A')_g$. Soit donc $z \in B'_1$. Alors les $b_i z$ sont aussi entiers sur B_1 , donc sur A , et leurs traces sont donc entières sur A (et sont donc dans A') : il suffit en effet d'appliquer ([Bou] chap. 5, §1, n° 6, cor. 2 de la prop. 17) aux $b_i z$ vus comme endomorphismes du C -module libre $B_1 \otimes_A C$. La relation (16.2.1.1) montre alors que $gz \in B_1 \otimes_A A'$, cqfd. $\square$

COROLLAIRE (16.3). — *Sous les hypothèses de (16.2), considérons le foncteur $\varepsilon^* : \text{Mod}(\mathcal{C}_{X_{\text{lis-ét}}}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{C}_{X_{\text{lis-ét}}})$ déduit de (13.1) et (12.7.4). Alors la fermeture intégrale de $\varepsilon^* \cdot \mathcal{C}$ dans $\varepsilon^* \cdot \mathcal{B}$ est $\varepsilon^* \cdot \mathcal{C}'$. En particulier, d'après (13.1.2) et (13.2.3), c'est une $\mathcal{C}_{X_{\text{lis-ét}}}$ -Algèbre quasi-cohérente, dont l'image par ε_* est $\mathcal{C}'$.* $\square$

COROLLAIRE (16.4). — *Soient $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique, $\cdot \mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ deux $\mathcal{C}_X$ -Algèbres quasi-cohérentes. Alors la fermeture intégrale $\cdot \mathcal{C}'$ de $\cdot \mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$ est une $\mathcal{C}_X$ -Algèbre quasi-cohérente, dont la formation commute à tout changement de base lisse. De plus, si $(U, u) \in \text{ob Lis-ét}(\mathcal{X})$, $\cdot \mathcal{C}'(U, u)$ est la fermeture intégrale de $\cdot \mathcal{C}(U, u)$ dans $\mathcal{B}(U, u)$.* $\square$

Le théorème ci-dessous étend partiellement aux champs algébriques le « Main Theorem » de Zariski :

THÉORÈME (16.5). — *Soit $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un 1-morphisme de S -champs algébriques. On suppose que $\mathcal{Y}$ est quasi-compact et que F est représentable, quasi-fini, séparé et de présentation finie. Alors :*

(i) *Il existe un diagramme 2-commutatif*

$$(16.5.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{I} & \mathcal{X}' \\ & \searrow F & \downarrow F' \\ & & \mathcal{Y} \end{array}$$

où I est une immersion ouverte et F' un 1-morphisme représentable et entier.

(ii) *On suppose de plus que tout $\mathcal{C}_\mathcal{Y}$ -Module quasi-cohérent est limite inductive de ses sous- $\mathcal{C}_\mathcal{Y}$ -Modules quasi-cohérents et de type fini. Alors il existe un diagramme comme ci-dessus, où de plus F' est fini.*

Remarque (16.5.2) : La condition supplémentaire de (ii) est notamment vérifiée dans les cas suivants (on rappelle que $\mathcal{Y}$ est toujours supposé quasi-séparé) :

- (a) $\mathcal{Y}$ est un schéma quasi-compact ([EGA] IV, 1.7.9);
- (b) $\mathcal{Y}$ est noethérien (cf. (15.4)).

Preuve de (16.5) (cf. ([EGA] IV, 8.12)) : (i) Posons $\mathcal{B} = F_* \mathcal{C}_\mathcal{X}$: c'est une $\mathcal{C}_\mathcal{Y}$ -Algèbre quasi-cohérente (13.2.6 (iii)). Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ la fermeture intégrale de $\mathcal{C}_\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{B}$: c'est encore une $\mathcal{C}_\mathcal{Y}$ -Algèbre quasi-cohérente (16.4) et si l'on pose $\mathcal{X}' = \text{Spec}(\mathcal{C})$, alors F se décompose canoniquement en $\mathcal{X} \xrightarrow{I} \mathcal{X}' \xrightarrow{F'} \mathcal{Y}$. Il est clair que F' est entier. Fixons une présentation $P : U \rightarrow \mathcal{Y}$: pour voir que I est une immersion ouverte on peut remplacer $\mathcal{Y}$ par U et $\mathcal{X}$ par le U -schéma quasi-fini $\mathcal{X}_U = U \times_{P, \mathcal{Y}, F} \mathcal{X}$, et l'assertion résulte alors du « Main Theorem » classique ([EGA] IV, 8.12.6) et de ([EGA] IV, 8.12.3), compte tenu du fait que, d'après (16.4), la $\mathcal{C}_U$ -Algèbre $P^* \mathcal{C}$ est la fermeture intégrale de $\mathcal{C}_U$ dans $P^* \mathcal{B} = (F_U)_*(\mathcal{C}_{\mathcal{X}_U})$.

(ii) Gardant les notations précédentes, soit de plus $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda \in I}$ la famille des sous- $\mathcal{C}_\mathcal{Y}$ -Algèbres quasi-cohérentes de type fini de $\mathcal{C}$. D'après l'hypothèse, $\mathcal{C}$ est limite inductive des $\mathcal{C}_\lambda$. Pour tout λ , F se décompose en $\mathcal{X} \xrightarrow{I_\lambda} \mathcal{X}'_\lambda \xrightarrow{F'_\lambda} \mathcal{Y}$ où $\mathcal{X}'_\lambda = \text{Spec}(\mathcal{C}_\lambda)$. Comme F'_λ est évidemment fini, il suffit de voir que, pour λ assez grand, le morphisme naturel $\mathcal{X}_U \rightarrow (\mathcal{X}'_\lambda)_U = \text{Spec}(P^* \mathcal{C}_\lambda)$ est une immersion ouverte. Or il résulte encore de ([EGA] loc. cit.), qu'il existe une sous- $\mathcal{C}_U$ -Algèbre finie $\mathcal{C}_0$ de $P^* \mathcal{C}$ telle que, pour toute $\mathcal{C}_U$ -Algèbre finie $\mathcal{C}'$ telle que $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}' \subset P^* \mathcal{C}$, le morphisme naturel $\mathcal{X}_U \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{C}')$ soit une immersion ouverte; comme $P^* \mathcal{C}$ est limite inductive des $P^* \mathcal{C}_\lambda$ et que $\mathcal{C}$ est de type fini, on a $\mathcal{C}_0 \subset P^* \mathcal{C}_\lambda$ pour λ assez grand, cqfd. $\square$

Voici une application de (16.5) à la structure globale des champs de Deligne-Mumford.

THÉORÈME (16.6). — *Soit $\mathcal{X}$ un S -champ de Deligne-Mumford noethérien. Il existe un S -schéma Z et un 1-morphisme (représentable) de Z dans $\mathcal{X}$*

qui est fini, surjectif, et génériquement étale (c'est-à-dire étale au-dessus d'un ouvert dense de $\mathcal{X}$).

Remarque : Ce résultat – où le schéma de base S ne joue en fait aucun rôle – généralise ([Vi] Prop. 2.6), où l'existence de Z est établie (sans le complément étale), lorsque Z admet un «schéma de modules» en un sens convenable. D'autre part, il implique le «lemme de Chow» énoncé sans démonstration dans ([De-Mu] 4.12) :

COROLLAIRE (16.6.1) («lemme de Chow» pour les champs de Deligne-Mumford). — *On suppose le schéma S noethérien. Soit $\mathcal{X}$ un S -champ de Deligne-Mumford de type fini. Il existe alors un S -schéma quasi-projectif X et un 1-morphisme propre, surjectif et génériquement étale de X sur $\mathcal{X}$.*

Preuve : Il suffit de combiner (16.6) avec le lemme de Chow ([EGA] II, 5.6.1) appliqué à Z . $\square$

Bien entendu, (16.6) s'applique en particulier aux espaces algébriques. On en déduit par exemple :

COROLLAIRE (16.6.2). — *Soit X un S -espace algébrique noethérien et normal. Il existe un S -schéma normal X' et un groupe fini G agissant sur X' , tels que X soit isomorphe à l'espace algébrique quotient X'/G .*

Preuve (détails laissés au lecteur) : On peut supposer X intègre. D'après (16.6), il existe un morphisme fini, surjectif et génériquement étale $Z \rightarrow X$, où Z est un S -schéma que l'on peut également supposer intègre. Le corps des fonctions L de Z est une extension finie séparable du corps des fonctions K de X (on rappelle que X est «génériquement un schéma», cf. ([Kn] II.6.7). Il suffit alors de prendre pour X' le normalisé de X dans une clôture galoisienne K' de l'extension L/K , et pour G le groupe de Galois de K' sur K , qui agit évidemment sur X' . Ainsi X' est fini sur X (car l'extension K'/K est séparable), et aussi sur Z , donc est un schéma. La propriété de «quotient» de l'énoncé signifie que si $\pi : X' \rightarrow X$ est le morphisme naturel, $\mathcal{C}_X$ s'identifie au faisceau des G -invariants de $\pi_* \mathcal{C}_{X'}$ (ceci, bien entendu, après tout changement de base étale) ; cette dernière propriété est conséquence du fait que X est normal. $\square$

(16.6.3) *Preuve de (16.6)* : On peut remplacer $\mathcal{X}$ par n'importe quel champ fini, surjectif, et génériquement étale sur $\mathcal{X}$. En particulier, nous pouvons supposer que $\mathcal{X}$ est somme de ses composantes irréductibles, et même, en raisonnant sur chacune de celles-ci, que $\mathcal{X}$ est irréductible.

Par hypothèse il existe un S -schéma affine X_1 et un 1-morphisme étale, séparé et surjectif $\pi : X_1 \rightarrow \mathcal{X}$. Ce morphisme induit au-dessus d'un ouvert dense $\mathcal{U}$ de $\mathcal{X}$ un morphisme fini étale $\pi_{\mathcal{U}} : U_1 \rightarrow \mathcal{U}$ de degré constant

$n > 0$; noter que U_1 est un ouvert de X_1 donc un schéma. D'autre part $\pi_{\mathcal{U}}$ devient trivial après un changement de base fini étale $V \rightarrow \mathcal{U}$ (par exemple $V = \text{SEC}_n(U_1/\mathcal{U})$, cf. (6.6)), où V est un schéma (comme revêtement étale de U_1). D'après (16.5), le morphisme composé $V \rightarrow \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ se factorise en une immersion ouverte $V \rightarrow \mathcal{W}$ suivie d'un morphisme fini (et nécessairement surjectif par densité) $\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{X}$. Remplaçant $\mathcal{X}$ par $\mathcal{W}$, $\mathcal{U}$ par V , et X_1 par $X_1 \times_{\mathcal{X}} \mathcal{W}$ (qui est fini sur X_1 donc encore un schéma), nous sommes ramenés au cas où $\mathcal{U} = U$ est représentable et où π est trivial de degré $n > 0$ au-dessus de U . Ainsi, on a un diagramme 2-cartésien

$$(16.6.3.1) \quad \begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{u_1} & X_1 \\ \pi_U \downarrow & \square & \downarrow \pi \\ U & \xrightarrow{u} & \mathcal{X} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(trivial)} \\ \text{(étale, surjectif)} \end{array}$$

où u et u_1 sont des immersions ouvertes denses (quoique non nécessairement schématiquement denses). Dans ces conditions, nous allons construire un schéma Z répondant aux conditions de l'énoncé et induisant de plus un isomorphisme au-dessus de U .

Comme π_U est trivial, il admet n sections disjointes $s^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, \dots, n$) et U_1 est somme de leurs images $U_1^{(\alpha)}$. Pour chaque α , soit $e^{(\alpha)} \in \Gamma(U_1, \mathcal{C}_{U_1})$ l'idempotent correspondant à l'ouvert fermé $U_1^{(\alpha)}$.

Posons $\mathcal{C} = u_* \mathcal{C}_U$: c'est une $\mathcal{C}_X$ -Algèbre quasi-cohérente d'après (13.2.6 (iii)) (u est quasi-compact puisque $\mathcal{X}$ est noethérien et quasi-séparé). Notons $\mathcal{C}$ la fermeture intégrale de $\mathcal{C}$ dans $\pi^* \mathcal{C}$, qui est encore quasi-cohérente. Comme $\mathcal{X}$ est noethérien, $\mathcal{C}$ est limite inductive filtrante de la famille $(\mathcal{C}_\lambda)$ de ses sous-Algèbres quasi-cohérentes de type fini (et donc finies sur $\mathcal{C}_X$), ceci en vertu de (15.4).

On peut voir $e^{(\alpha)}$ comme une section globale sur X_1 de $u_{1,*} \mathcal{C}_{U_1} = \pi^* \mathcal{C}$. Comme $e^{(\alpha)}$ est idempotent il est évidemment entier sur $\mathcal{C}_{X_1}$. Or d'après (16.4) la fermeture intégrale de $\mathcal{C}_{X_1}$ dans $\pi^* \mathcal{C}$ est $\pi^* \mathcal{C}$. Il s'ensuit que $e^{(\alpha)}$ appartient à $\Gamma(X_1, \pi^* \mathcal{C}) = \varinjlim_{\lambda} \Gamma(X_1, \pi^* \mathcal{C}_\lambda)$ et il existe donc λ tel que

$e^{(\alpha)} \in \Gamma(X_1, \pi^* \mathcal{C}_\lambda)$ pour chaque α . Mais cela signifie, posant $Z = \text{Spec}(\mathcal{C}_\lambda)$ (qui est fini sur $\mathcal{X}$, et surjectif car U est dense dans $\mathcal{X}$ et $\mathcal{C}_{\lambda|U} = \mathcal{C}_U$), que la décomposition de U_1 en somme des $U_1^{(\alpha)}$ se prolonge en une décomposition de $Z_1 := Z \times_{\mathcal{X}} X_1$ en somme d'ouverts fermés $Z_1^{(\alpha)}$. Chaque $Z_1^{(\alpha)}$ est un schéma (Z_1 étant fini sur X_1), et les morphismes canoniques $Z_1^{(\alpha)} \rightarrow Z$ sont étales, séparés et birationnels et sont donc des immersions ouvertes ([EGA] IV, 18.10.18). Puisque Z_1 est surjectif sur Z , on a construit un recouvrement ouvert de Z par des schémas, cqfd. $\square$

17. Le complexe cotangent d'un 1-morphisme de champs algébriques

(17.1) Pour tout morphisme de topos annelés $X \xrightarrow{f} Y$, Illusie a défini dans ([II] II, 1.2) le *complexe cotangent de X sur Y* . Rappelons qu'il s'agit du complexe de chaînes

$$(17.1.1) \quad L_{X/Y} \in \text{ob } C^{[-\infty, 0]}(\mathcal{C}_X)$$

associé au $\mathcal{C}_X$ -Module simplicial

$$\Omega_{\mathcal{A}/f^{-1}(\mathcal{C}_Y)}^1 \otimes_{f^{-1}(\mathcal{C}_Y)} \mathcal{C}_X,$$

où

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{f^{-1}(\mathcal{C}_Y)}(\mathcal{C}_X)$$

est la $f^{-1}(\mathcal{C}_Y)$ -Algèbre simpliciale, augmentée vers $\mathcal{C}_X$ par un quasi-isomorphisme, résolution libre standard de la $f^{-1}(\mathcal{C}_Y)$ -Algèbre $\mathcal{C}_X$ ([II] I, 1.2.2, I, 1.5.5.6 et II, 1.1.4). Ce complexe de chaînes est muni d'une augmentation naturelle

$$(17.1.2) \quad L_{X/Y} \rightarrow \Omega_{X/Y}^1,$$

où

$$\Omega_{X/Y}^1 = \Omega_{\mathcal{C}_X/f^{-1}(\mathcal{C}_Y)}^1,$$

et cette augmentation induit un isomorphisme de $\mathcal{A}^0(L_{X/Y})$ sur $\Omega_{X/Y}^1$.

Pour tout carré commutatif de morphismes de topos annelés

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{a} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xleftarrow{b} & Y' \end{array}$$

on a un morphisme de complexes de chaînes de $\mathcal{C}_{X'}$ -Modules

$$(17.1.3) \quad a^* L_{X/Y} \rightarrow L_{X'/Y'}$$

compatible à l'homomorphisme canonique de $\mathcal{C}_{X'}$ -Modules $a^* \Omega_{X/Y}^1 \rightarrow \Omega_{X'/Y'}^1$, via les augmentations naturelles (17.1.2).

Si $Y \xrightarrow{g} Z$ est un autre morphisme de topos annelés, composable avec f , la functorialité (17.1.3) donne des morphismes de complexes de chaînes $f^*L_{Y/Z} \rightarrow L_{X/Z}$ et $L_{X/Z} \rightarrow L_{X/Y}$. Dans ([II] II, 2.1.5), Illusie définit une flèche

$$(17.1.4) \quad L_{X/Y} \rightarrow f^*L_{Y/Z}[1]$$

dans $D(\mathcal{C}_X)$ de sorte que le triangle

$$(17.1.5) \quad f^*L_{Y/Z} \rightarrow L_{X/Z} \rightarrow L_{X/Y} \rightarrow f^*L_{Y/Z}[1]$$

soit distingué et fonctoriel en $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$.

(17.2) Soit maintenant $X \xrightarrow{f} Y$ un morphisme de S -espaces algébriques. On lui associe le morphisme de topos annelés $f_{\text{ét}} : X_{\text{ét}} \rightarrow Y_{\text{ét}}$ et donc le complexe cotangent $L_{X_{\text{ét}}/Y_{\text{ét}}}$, que l'on appellera encore le complexe cotangent de X sur Y et que l'on notera plus simplement $L_{X/Y}$.

Si X et Y sont en fait des S -schémas, on a aussi un morphisme de topos annelés $f_{\text{Zar}} : X_{\text{Zar}} \rightarrow Y_{\text{Zar}}$ et donc un complexe cotangent $L_{X_{\text{Zar}}/Y_{\text{Zar}}}$. Il est facile de vérifier que le morphisme de complexes, déduit des functorialités (17.1.3) pour les morphismes de topos $\varepsilon : X_{\text{ét}} \rightarrow X_{\text{Zar}}$ et $\varepsilon : Y_{\text{ét}} \rightarrow Y_{\text{Zar}}$,

$$(17.2.1) \quad \varepsilon^*L_{X_{\text{Zar}}/Y_{\text{Zar}}} \rightarrow L_{X_{\text{ét}}/Y_{\text{ét}}}$$

est un isomorphisme dans $D(\mathcal{C}_{X_{\text{ét}}})$.

Pour tout morphisme de S -espaces algébriques $X \xrightarrow{f} Y$, il résulte de (17.2.1) et ([II] II, 2.3.7) que $L_{X/Y}$ est à cohomologie quasi-cohérente, et même cohérente si Y est localement noethérien et f localement de type fini. De plus, il résulte de (17.2.1) et ([II] II, 2.3.11) que la formation de $L_{X/Y}$ commute (dans $D(\mathcal{C}_X)$) aux changements de base $Y' \rightarrow Y$ tor-indépendants de f (par exemple, aux changements de base plats, ou à tout changement de base si f est plat).

Pour tout morphisme de S -espaces algébriques $X \xrightarrow{f} Y$, on notera $L_{X/Y, \text{lis-ét}}$, ou encore plus simplement $L_{X/Y}$ si aucune confusion n'en résulte, l'image inverse de $L_{X/Y}$ par le morphisme de topos annelés $X_{\text{lis-ét}} \rightarrow X_{\text{ét}}$. On ne confondra pas $L_{X/Y, \text{lis-ét}}$ avec le complexe cotangent du morphisme de topos annelés $X_{\text{lis-ét}} \rightarrow Y_{\text{lis-ét}}$ induit par f : par functorialité (17.1.3), on a un morphisme canonique de complexes de Modules sur $X_{\text{lis-ét}}$

$$(17.2.2) \quad L_{X/Y, \text{lis-ét}} \rightarrow L_{X_{\text{lis-ét}}/Y_{\text{lis-ét}}}$$

mais ce morphisme n'est pas en général un isomorphisme. Par exemple, si f est lisse, $L_{X_{\text{lis-ét}}/Y_{\text{lis-ét}}} = (0)$ car f est une flèche de localisation dans $Y_{\text{lis-ét}}$ (cf. [II] II, 2.3.0), alors qu'en général $L_{X/Y} = \Omega_{X/Y}^1 \neq (0)$.

On se propose maintenant d'étendre aux 1-morphismes de S -champs algébriques la théorie du complexe cotangent.

THÉOREME-DÉFINITION (17.3). — Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ un 1-morphisme de S -champs algébriques. On peut associer à F un système projectif

$$L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} = (\cdots \rightarrow L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}^{\geq -n-1} \rightarrow L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}^{\geq -n} \rightarrow \cdots \rightarrow L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}^{\geq 0})$$

où chaque $L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}^{\geq -n}$ est un ind-objet essentiellement constant (voir ([SGA 4] XVII, 1.2) pour la terminologie) dans $D_{\text{qcoh}}^{[-n, 1]}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$, et donc aussi dans $D_{\text{qcoh}}^{[-\infty, 1]}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$, et où les morphismes de transition sont des morphismes (de ind-objets) dans $D_{\text{qcoh}}^{[-\infty, 1]}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$, de telle sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées :

(0) pour chaque entier $n \geq 0$, le morphisme

$$\tau_{\geq -n} L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}^{\geq -n-1} \rightarrow L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}^{\geq -n}$$

de $D_{\text{qcoh}}^{[-n, 1]}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$, induit par le morphisme de transition, est un isomorphisme :

(1) si $\mathcal{X}' = X$ et $\mathcal{Y}' = Y$ sont des S -espaces algébriques, alors $L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}$ admet comme représentant le système projectif $(\tau_{\geq -n} L_{X/Y, \text{lis-ét}})_{n \geq 0}$ avec les flèches de transition évidentes ;

(2) si

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xleftarrow{A} & \mathcal{X}' \\ F \downarrow & & \downarrow F' \\ \mathcal{Y} & \xleftarrow{B} & \mathcal{Y}' \end{array}$$

est un carré 2-commutatif dans $(\text{Ch.alg}/S)$, on a un morphisme de functorialité

$$LA^*L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} \rightarrow L_{\mathcal{X}'/\mathcal{Y}'};$$

(3) si $\mathcal{Y} \xrightarrow{G} \mathcal{Z}$ est un autre 1-morphisme de S -champs algébriques composable avec F , il existe une flèche

$$L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} \rightarrow (LF^*L_{\mathcal{Y}/\mathcal{Z}})[1]$$

telle que le triangle

$$LF^*L_{\mathcal{Y}/\mathcal{Z}} \rightarrow L_{\mathcal{X}/\mathcal{Z}} \rightarrow L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} \rightarrow (LF^*L_{\mathcal{Y}/\mathcal{Z}})[1]$$

soit distingué ;

(4) si le carré de (2) est 2-cartésien et si F , ou B , est plat, le morphisme de functorialité

$$LA^*L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} \rightarrow L_{\mathcal{X}'/\mathcal{Y}'}$$

est un isomorphisme ;

(5) si le carré de 1-morphismes de S -champs algébriques

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}' & \xrightarrow{F_2} & \mathcal{Y}'_2 \\ F_1 \downarrow & \square & \downarrow G_2 \\ \mathcal{Y}'_1 & \xrightarrow{G_1} & \mathcal{Z} \end{array}$$

est 2-cartésien et si G_1 , ou G_2 , est plat, la somme des morphismes de fonctorialité

$$LF_1^* L_{\mathcal{Y}'_1/\mathcal{Z}} \oplus LF_2^* L_{\mathcal{Y}'_2/\mathcal{Z}} \rightarrow L_{\mathcal{X}'/\mathcal{Z}}$$

est un isomorphisme.

Le système projectif $L_{\mathcal{X}'/\mathcal{Y}'}$ est appelé le complexe cotangent au 1-morphisme de S -champs $F : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{Y}'$.

Remarques (17.4) : (1) Dans (17.3)(2), $LA^* L_{\mathcal{X}'/\mathcal{Y}'}$ est bien défini car, pour tout entier $n \geq 0$, la flèche canonique

$$\tau_{\geq -n} LA^* \rightarrow \tau_{\geq -n} LA^* \tau_{\geq -n}$$

est un isomorphisme de foncteurs de $D^-(\mathcal{C}_{\mathcal{X}'})$ dans $D^{[-n, +\infty]}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}'})$: $LA^* L_{\mathcal{X}'/\mathcal{Y}'}$ est le système projectif

$$(\tau_{\geq -n} LA^* L_{\mathcal{X}'/\mathcal{Y}'}^{\geq -n})_{n \geq 0}.$$

(2) De même, dans (17.3)(3), on définit comme ci-dessus le système projectif $(LF^* L_{\mathcal{Y}'/\mathcal{Z}})[1]$ (on a $\tau_{\geq -n}(M[1]) = (\tau_{\geq -n+1} M)[1]$, fonctoriellement par rapport à $M \in \text{ob } D(\mathcal{C}_{\mathcal{X}'})$).

(3) Soit $D = D^+(A)$ la catégorie dérivée des complexes bornés inférieurement d'une catégorie abélienne A . Soit D' la catégorie des systèmes projectifs

$$K = (\cdots \rightarrow K^{\geq -n-1} \rightarrow K^{\geq -n} \rightarrow \cdots \rightarrow K^{\geq 0})$$

dans D tels que, pour tout entier $n \geq 0$, la flèche canonique

$$K^{\geq -n} \rightarrow \tau_{\geq -n} K^{\geq -n}$$

et la flèche

$$\tau_{\geq -n} K^{\geq -n-1} \rightarrow \tau_{\geq -n} K^{\geq -n},$$

déduite par fonctorialité de la flèche de transition $K^{\geq -n-1} \rightarrow K^{\geq -n}$, soient toutes les deux des isomorphismes. On identifie D à une sous-catégorie pleine de D' par le foncteur

$$K \mapsto (\cdots \rightarrow \tau_{\geq -n-1} K \rightarrow \tau_{\geq -n} K \rightarrow \cdots \rightarrow \tau_{\geq 0} K)$$

où les flèches de transition sont les flèches canoniques. On prolonge à D' le foncteur de décalage $(\cdot)[1] : D \rightarrow D$ en posant

$$K[1] = (\cdots \rightarrow K^{\geq -n}[1] \rightarrow K^{\geq 1-n}[1] \rightarrow \cdots \rightarrow K^{\geq 0}[1] \rightarrow (\tau_{\geq 1} K^{\geq 0})[1])$$

et on prolonge à D' les foncteurs de troncature $\tau_{\leq i}$ et $\tau_{\geq i}$ ($i \in \mathbb{Z}$) en posant

$$\tau_{\leq i} K = (\cdots \rightarrow \tau_{\leq i} K^{\geq -n-1} \rightarrow \tau_{\leq i} K^{\geq -n} \rightarrow \cdots \rightarrow \tau_{\leq i} K^{\geq 0})$$

et

$$\tau_{\geq i} K = (\cdots \rightarrow \tau_{\geq i} K^{\geq -n-1} \rightarrow \tau_{\geq i} K^{\geq -n} \rightarrow \cdots \rightarrow \tau_{\geq i} K^{\geq 0})$$

(bien entendu, pour tout entier i , $\tau_{\geq i} K$ est un système projectif essentiellement constant, i.e. dans l'image essentielle de D).

Un triangle

$$K_1 \xrightarrow{u} K_2 \xrightarrow{v} K_3 \xrightarrow{w} K_1[1]$$

de morphismes de D' est dit distingué si, pour tout entier $n \geq 0$ et tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} K_1 & \xrightarrow{u} & K_2 & \xrightarrow{v} & K_3 & \xrightarrow{w} & K_1[1] \\ \alpha_1 \downarrow & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \beta_3 & & \downarrow \alpha_1[1] \\ K_1^{\geq -n} & \xrightarrow{u^{\geq -n}} & K_2^{\geq -n} & \longrightarrow & L_3 & \longrightarrow & K_1^{\geq -n}[1] \end{array}$$

où α_1 et α_2 sont les flèches canoniques et où la ligne du bas est un triangle distingué dans D , la flèche

$$K_3^{\geq -n} \rightarrow \tau_{\geq -n} L_3$$

induite par β_3 est un isomorphisme dans D .

En particulier, si

$$K_1 \xrightarrow{u} K_2 \xrightarrow{v} K_3 \xrightarrow{w} K_1[1]$$

est un triangle distingué de D' et si toutes les flèches de transition du système projectif K_3 sont des isomorphismes (de sorte que K_3 est isomorphe à $K_3^{\geq 0}$), le triangle

$$K_1^{\geq 0} \xrightarrow{u^{\geq 0}} K_2^{\geq 0} \xrightarrow{v^{\geq 0}} K_3^{\geq 0} \xrightarrow{w^{\geq 0}} K_1^{\geq 0}[1]$$

est distingué dans D et la flèche

$$\tau_{\leq -1} u : \tau_{\leq -1} K_1 \rightarrow \tau_{\leq -1} K_2$$

est un isomorphisme dans D' .

(17.5) *Preuve de (17.3) dans le cas représentable* : Supposons que 1-morphisme $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{Y}'$ soit représentable et considérons la catégorie filtrante des carrés 2-cartésiens dans $(\text{Ch.alg}/S)$

$$(17.5.1) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{P} & \mathcal{X} \\ f \downarrow & \square & \downarrow F \\ Y & \xrightarrow{Q} & \mathcal{Y} \end{array}$$

où $X \xrightarrow{f} Y$ est un morphisme de S -espaces algébriques et Q une présentation de $\mathcal{Y}$ (P est alors automatiquement une présentation de $\mathcal{X}$). Si

$$(17.5.2) \quad \begin{array}{ccccc} X_1 & & \xrightarrow{P_1} & & \mathcal{X} \\ & \searrow A & & \nearrow P & \\ & X & & & \\ & \downarrow f & & & \downarrow \\ Y_1 & & \xrightarrow{Q_1} & & \mathcal{Y} \\ & \searrow B & & \nearrow Q & \\ & Y & & & \end{array}$$

est une flèche dans cette catégorie, on a par functorialité (17.1.3) un morphisme de complexes de chaînes de $\mathcal{C}_{X_1}$ -Modules

$$(17.5.3) \quad A^* L_{X_1/Y_1, \text{lis-ét}} \rightarrow L_{X/Y, \text{lis-ét}}$$

et, comme les foncteurs A^* et $\tau_{\geq -n}$ commutent, on a aussi un morphisme dans $C^{[-n, 0]}(\mathcal{C}_{X_1})$,

$$(17.5.4) \quad A^* \tau_{\geq -n} L_{X_1/Y_1, \text{lis-ét}} \rightarrow \tau_{\geq -n} L_{X/Y, \text{lis-ét}},$$

pour tout entier $n \geq 0$.

LEMME (17.5.5). — Les morphismes (17.5.3) et (17.5.4) sont des isomorphismes dans $D^{[-\infty, 0]}(\mathcal{C}_{X_1, \text{lis-ét}})$ et $D^{[-n, 0]}(\mathcal{C}_{X_1, \text{lis-ét}})$ respectivement.

Preuve : Il suffit de vérifier que les morphismes B et f sont tor-indépendants et ceci est laissé au lecteur. $\square$

Cela étant, soit

$$\begin{array}{ccc} X. & \xrightarrow{P.} & \mathcal{X}. \\ f. \downarrow & \square & \downarrow F \\ Y. & \xrightarrow{Q.} & \mathcal{Y}. \end{array}$$

le cosquelette du diagramme (17.5.1) (cf. [De 1] 5.1.4). Sur le S -espace algébrique simplicial $X.$, on a un complexe de chaînes de $\mathcal{C}_{X.}$ -Modules, $L_{X./Y.}$, dont la restriction à l'étage X_i n'est autre que L_{X_i/Y_i} , et, pour tout entier $n \geq 0$, on a son tronqué canonique $\tau_{\geq -n} L_{X./Y.}$, dont la restriction à l'étage X_i n'est autre que $\tau_{\geq -n} L_{X_i/Y_i}$. D'après (17.5.5), (13.5.4) et (13.5.5), pour tout entier $n \geq 0$, $\tau_{\geq -n} L_{X./Y.}$,_{lis-ét} se descend en un objet de $D_{\text{qcoh}}^{[-n, 0]}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}.})$ unique à isomorphisme unique près. Si l'on fixe $n \geq 0$ et on fait varier (17.5.1), ces objets de $D_{\text{qcoh}}^{[-n, 0]}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}.})$ définissent le ind-objet $L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}^{\geq -n}$ (qu'il soit essentiellement constant résulte de (17.5.5)). Si l'on fait varier n , on obtient le système projectif $L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}$ cherché.

Il est clair que les propriétés (17.3)(1) à (17.3)(4) sont vérifiées si on se limite à des 1-morphismes représentables de S -champs algébriques.

Toujours pour $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ représentable, le ind-objet $\mathcal{H}^0(L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}})$ dans $\text{Mod}_{\text{qcoh}}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}.})$ admet une limite que l'on notera

$$(17.5.6) \quad \Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}^1,$$

et on a une augmentation canonique

$$(17.5.7) \quad L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} \rightarrow \Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}^1.$$

LEMME (17.5.8). — Si le 1-morphisme représentable $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ est lisse, le système projectif $L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}$ est essentiellement constant et peut être représenté par le $\mathcal{C}_{\mathcal{X}.}$ -Module quasi-cohérent $\Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}^1$ placé en degré 0 (autrement dit, l'augmentation (17.5.7) est un isomorphisme de $L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}$ sur le système projectif constant de valeur $\Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}^1$). $\square$

(17.6) Preuve de (17.3) dans le cas général : Considérons la catégorie filtrante des diagrammes 2-commutatifs à carré 2-cartésien dans $(\text{Ch.alg}/S)$

$$(17.6.1) \quad \begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{P'} & \mathcal{X}' & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ & \searrow f & \downarrow & \square & \downarrow F \\ & & Y & \xrightarrow{Q} & \mathcal{Y} \end{array}$$

où P' et Q sont des présentations de $\mathcal{X}'$ et de $\mathcal{Y}$ respectivement. Pour chaque objet (17.6.1) de cette catégorie, considérons le complexe de $\mathcal{C}_{X'_{\text{lis-ét}}}$ -Modules

$$(17.6.2) \quad [L_{X'/Y, \text{lis-ét}} \xrightarrow{d^0} \Omega_{X'/\mathcal{X}'}^1]$$

déduit de $L_{X'/Y} \in \text{ob } C^{[-n, 0]}(\mathcal{C}_{X'})$ par restriction au site lisse-étale de X' et par adjonction de la composante $\Omega_{X'/\mathcal{X}'}^1$ en degré 1, la différentielle d^0

n'étant autre que l'homomorphisme de fonctorialité $L_{X'/Y, \text{lis-ét}} \rightarrow L_{X'/X'}$, compte tenu de (17.5.8), ou encore le composé

$$L_{X'/Y, \text{lis-ét}} \rightarrow \tau_{\geq 0} L_{X'/Y, \text{lis-ét}} = \Omega_{X'/Y, \text{lis-ét}}^1 \rightarrow \Omega_{X'/X'}^1.$$

Le complexe de $\mathcal{C}_{X', \text{lis-ét}}'$ -Modules (17.6.2) est concentré en degré ≤ 1 et ses $\mathcal{C}_{X', \text{lis-ét}}'$ -Modules de cohomologie sont clairement quasi-cohérents. Pour tout entier $n \geq 0$, son tronqué canonique $\tau_{\geq -n}$ n'est autre que le complexe de $\mathcal{C}_{X', \text{lis-ét}}'$ -Modules

$$(17.6.3) \quad [\tau_{\geq -n} L_{X'/Y, \text{lis-ét}} \xrightarrow{d^0} \Omega_{X'/X'}^1]$$

concentré en degrés compris entre $-n$ et 1. Pour toute flèche d'un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X'_1 & \xrightarrow{P'_1} & \mathcal{X}'_1 & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ & \searrow f_1 & \downarrow & \square & \downarrow F \\ & & Y_1 & \xrightarrow{Q_1} & \mathcal{Y} \end{array}$$

vers le diagramme (17.6.1), incluant notamment le diagramme commutatif

$$(17.6.4) \quad \begin{array}{ccc} X'_1 & \xrightarrow{A} & X' \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f \\ Y_1 & \xrightarrow{B} & Y \end{array}$$

on a un morphisme

$$(17.6.5) \quad A^*[L_{X'/Y, \text{lis-ét}} \rightarrow \Omega_{X'/X'}^1] \rightarrow [L_{X'_1/Y_1, \text{lis-ét}} \rightarrow \Omega_{X'_1/X'_1}^1]$$

dans $C^{[-\infty, 1]}(\mathcal{C}_{X'_1, \text{lis-ét}}')$, et comme les foncteurs A^* et $\tau_{\geq -n}$ commutent, on a aussi un morphisme

$$(17.6.6) \quad A^*[\tau_{\geq -n} L_{X'/Y, \text{lis-ét}} \rightarrow \Omega_{X'/X'}^1] \rightarrow [\tau_{\geq -n} L_{X'_1/Y_1, \text{lis-ét}} \rightarrow \Omega_{X'_1/X'_1}^1]$$

dans $C^{[-n, 1]}(\mathcal{C}_{X'_1, \text{lis-ét}}')$, pour tout entier $n \geq 0$.

LEMME (17.6.7). — *Les morphismes (17.6.5) et (17.6.6) sont des isomorphismes dans $D^{[-\infty, 1]}(\mathcal{C}_{X'_1, \text{lis-ét}}')$ et $D^{[-n, 1]}(\mathcal{C}_{X'_1, \text{lis-ét}}')$ respectivement.*

Preuve : Il suffit clairement de prouver le lemme dans les deux cas particuliers suivants :

- (i) B est l'identité,
- (ii) le carré (17.6.4) dans $(\text{Es.alg}/S)$ est cartésien.

Le cas particulier (i) résulte aussitôt de la version catégorique dérivée du «lemme des 9» appliquée au morphisme de triangles distingués

$$\begin{array}{ccccccc} A^* L_{X'/Y, \text{lis-ét}} & \longrightarrow & L_{X'_1/Y, \text{lis-ét}} & \longrightarrow & L_{X'_1/X', \text{lis-ét}} & \longrightarrow & \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ A^* \Omega_{X'/X'}^1 & \longrightarrow & \Omega_{X'_1/X'}^1 & \longrightarrow & L_{X'_1/X', \text{lis-ét}} & \longrightarrow & . \end{array}$$

Quant au cas particulier (ii), il suit facilement de la tor-indépendance des morphismes de S -espaces algébriques f et B (que le lecteur vérifiera sans peine). $\square$

Cela étant, soit

$$\begin{array}{ccccc} X'_i & \xrightarrow{P'_i} & \mathcal{X}'_i & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ & \searrow f_i & \downarrow & \square & \downarrow F \\ & & Y_i & \xrightarrow{Q_i} & \mathcal{Y} \end{array}$$

le cosquelette du diagramme (17.6.1) (cf. [De 1] 5.1.4). Sur le S -espace algébrique simplicial X'_i on a un complexe de $\mathcal{C}_{X'_i, \text{lis-ét}}'$ -Modules,

$$[L_{X'_i/Y_i, \text{lis-ét}} \rightarrow \Omega_{X'_i/X'_i}^1],$$

dont la restriction à l'étage X_i n'est autre que $[L_{X'_i/Y_i, \text{lis-ét}} \rightarrow \Omega_{X'_i/X'_i}^1]$, et, pour tout entier $n \geq 0$, on a son tronqué canonique $[\tau_{\geq -n} L_{X'_i/Y_i, \text{lis-ét}} \rightarrow \Omega_{X'_i/X'_i}^1]$, dont la restriction à l'étage X_i n'est autre que $[\tau_{\geq -n} L_{X'_i/Y_i, \text{lis-ét}} \rightarrow \Omega_{X'_i/X'_i}^1]$. D'après (17.6.7), (13.5.4) et (13.5.5), $[\tau_{\geq -n} L_{X'_i/Y_i, \text{lis-ét}} \rightarrow \Omega_{X'_i/X'_i}^1]$ se descend en un objet unique à isomorphisme unique près de $D_{\text{qcoh}}^{[-n, 1]}(\mathcal{C}_{X'}')$ pour tout entier $n \geq 0$. Si l'on fixe $n \geq 0$ et fait varier (17.6.1), ces objets définissent le ind-objet $L_{X'/\mathcal{Y}}^{\geq -n}$ (que celui-ci soit essentiellement constant résulte de (17.6.7)). Si l'on fait varier n , on obtient le système projectif $L_{X'/\mathcal{Y}}$ cherché.

Si $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ est représentable, on obtient a priori une autre définition de $L_{X'/\mathcal{Y}}$ que celle donnée précédemment (il y a plus de diagrammes (17.6.1) que de diagrammes (17.5.1)), mais en fait ces deux constructions sont canoniquement isomorphes.

On laisse au lecteur la vérification des propriétés (17.3)(1) à (17.3)(5). $\square$

Comme conséquence de la preuve de (17.3), on a :

PROPOSITION (17.7). — *Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ un 1-morphisme de S -champs algébriques. Pour toute présentation $X \xrightarrow{P} \mathcal{X}$ de $\mathcal{X}$, on a un isomorphisme canonique*

$$P^* L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}^{\geq 0} \xrightarrow{\sim} [\Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}^1 \xrightarrow{d^0} \Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}^1]$$

de ind-objets dans $D_{\text{qcoh}}^{[0,1]}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$, où d^0 est la flèche de fonctorialité pour Ω^1 .

Preuve : D'après (17.5.8), appliqué au 1-morphisme représentable lisse $P : X \rightarrow \mathcal{X}$, le système projectif $L_{X/\mathcal{X}}$ est essentiellement constant de valeur $\Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{X}}^1$. Par suite, d'après la fin de la remarque (17.4.3), on a le triangle distingué

$$P^* L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}^{\geq 0} \rightarrow \Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}^1 \rightarrow \Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{X}}^1 \rightarrow$$

et la proposition est démontrée. $\square$

Si le 1-morphisme $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ est plat, le calcul du complexe cotangent de F se ramène à celui du calcul du complexe cotangent d'un 1-morphisme représentable. Plus précisément :

PROPOSITION (17.8). — Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ un 1-morphisme plat de S -champs algébriques. Alors $L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}$ est canoniquement isomorphe à $L_{\mathcal{X}/\mathcal{X} \times_{F,\mathcal{Y},F} \mathcal{X}}[-1]$ où le 1-morphisme représentable $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_{F,\mathcal{Y},F} \mathcal{X}$ est le 1-morphisme diagonal Δ .

En particulier, si l'on suppose de plus que $\mathcal{X} = X$ est un espace algébrique, $L_{X/\mathcal{Y}}$ est canoniquement isomorphe à l'image inverse de $L_{X/X \times_{F,\mathcal{Y},F} X}[-1]$ par le morphisme de topos annelés $X_{\text{liss-ét}} \rightarrow X_{\text{ét}}$, où $L_{X/X \times_{F,\mathcal{Y},F} X}$ est le complexe cotangent au morphisme de S -espaces algébriques $\Delta : X \rightarrow X \times_{F,\mathcal{Y},F} X$.

Preuve : Appliquons (17.3)(3) à

$$\mathcal{X} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}.$$

On obtient le triangle distingué

$$L\Delta^* L_{\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}/\mathcal{Y}} \rightarrow L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} \rightarrow L_{\mathcal{X}/\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}} \rightarrow.$$

Or, d'après (17.3)(5), on a un isomorphisme canonique

$$L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} \oplus L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} \xrightarrow{\sim} L\Delta^* L_{\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}/\mathcal{Y}}$$

et la première flèche du triangle ci-dessus composée avec cet isomorphisme n'est autre que la somme

$$L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} \oplus L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} \xrightarrow{+} L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}.$$

D'où la proposition. $\square$

Sans hypothèse de platitude sur F , l'argument ci-dessus montre au moins que :

PROPOSITION (17.9). — Pour tout 1-morphisme $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ de S -champs algébriques, le $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ -Module $\mathcal{H}^1(L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}})$ s'identifie canoniquement à $\Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{X} \times_{F,\mathcal{Y},F} \mathcal{X}}^1$ pour le 1-morphisme représentable diagonal $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_{F,\mathcal{Y},F} \mathcal{X}$.

Preuve : La flèche canonique

$$L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} \oplus L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} \rightarrow L\Delta^* L_{\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}/\mathcal{Y}}$$

induit un isomorphisme sur les faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^1$ (cela résulte facilement de ([EGA] IV, 16.4.23)). $\square$

COROLLAIRE (17.9.1). — Soient $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique, U un objet de (Aff/S) et x un objet de $\mathcal{X}_U$. Considérons le U -espace algébrique en groupes (séparé et de type fini) $\mathcal{T}\text{som}(x, x) \rightarrow U$ et sa section unité $U \xrightarrow{e} \mathcal{T}\text{som}(x, x)$. Alors, le $\mathcal{C}_U$ -Module (étale) $\mathcal{H}^1(L_{\mathcal{X}/S})_{U,x}$ est canoniquement isomorphe au $\mathcal{C}_U$ -Module $e^* \Omega_{\mathcal{T}\text{som}(x,x)/U}^1$.

Preuve : On a le diagramme 2-commutatif à carré 2-cartésien dans $(\text{Ch.alg}/S)$

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{e} \mathcal{T}\text{som}(x, x) & \longrightarrow U \\ & \searrow x & \downarrow \square \quad \downarrow (x, x) \\ & & \mathcal{X} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{X} \times_S \mathcal{X} \end{array}$$

$\square$

COROLLAIRE (17.9.2). — Soit $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\mathcal{X}$ est un champ de Deligne-Mumford,
- (ii) $\mathcal{H}^1(L_{\mathcal{X}/S}) = (0)$.

Preuve : D'après la proposition (17.9), on a $\mathcal{H}^1(L_{\mathcal{X}/S}) = \Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{X} \times_S \mathcal{X}}^1$ et, d'après le théorème (8.1), $\mathcal{X}$ est de Deligne-Mumford si et seulement si le 1-morphisme diagonal $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ est non ramifié, d'où le corollaire. $\square$

PROPOSITION (17.10). — Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ un 1-morphisme localement de présentation finie de S -champs algébriques. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) F est lisse;
- (ii) pour tout entier $n \geq 0$, $L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}^{\geq -n}$ est d'amplitude parfaite contenue dans l'intervalle $[0, 1]$ (cf. [SGA 6] I, 4.8).

En particulier, pour tout 1-morphisme lisse $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ de S -champs algébriques les flèches de transition du système projectif

$$L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} = (\cdots \rightarrow L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}^{\geq -n-1} \rightarrow L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}^{\geq -n} \rightarrow \cdots \rightarrow L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}^{\geq 0})$$

sont toutes des isomorphismes.

Preuve : Fixons un diagramme 2-commutatif à carré 2-cartésien dans $(\text{Ch.alg}/S)$

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{P'} & \mathcal{X}' & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ & \searrow x & \downarrow & \square & \downarrow F \\ & & Y & \xrightarrow{Q} & \mathcal{Y} \end{array}$$

où P' et Q sont des présentations de $\mathcal{X}'$ et $\mathcal{Y}$ respectivement.

Alors F est lisse si et seulement si f est lisse. D'autre part, la restriction de $L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}^{\geq -n}$ à X' n'est autre que

$$[\tau_{\geq -n} L_{X'/Y, \text{lis-ét}} \xrightarrow{d^0} \Omega_{X'/Y}^1]$$

(cf. (17.6.3)), $\Omega_{X'/Y}^1$ est un $\mathcal{C}_{X', \text{lis-ét}}$ -Module localement libre de type fini et dire que cette restriction de $L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}^{\geq -n}$ à X' est d'amplitude parfaite contenue dans $[0, 1]$ c'est dire que $\tau_{\geq -n} L_{X'/Y}$ n'a de cohomologie qu'en degré 0 et que $\Omega_{X'/Y}^1 = \mathcal{H}^0(\tau_{\geq -n} L_{X'/Y})$ est localement libre de type fini (cf. [SGA 6] I, 4.16).

Par suite, la proposition résulte de ([I] III, 3.1.2). $\square$

(17.11) Terminons ce chapitre par la définition du S -champ tangent à un S -champ et par son calcul en termes du complexe cotangent quand le S -champ est algébrique.

On note $(-)[\varepsilon]$ le foncteur de (Ch/S) dans (Ch/S) défini par

$$(17.11.1) \quad (-)[\varepsilon] = (-) \times \text{Spec}(\mathbb{Z}[\varepsilon]/(\varepsilon)^2).$$

Pour tout $\mathcal{T} \in \text{ob}(\text{Ch}/S)$, on a l'immersion fermée

$$\mathcal{T} \xrightarrow{i_{\mathcal{T}}} \mathcal{T}[\varepsilon]$$

définie par $\varepsilon = 0$ et sa rétraction canonique

$$\mathcal{T}[\varepsilon] \xrightarrow{r_{\mathcal{T}}} \mathcal{T}$$

(la première projection) et $i_{\mathcal{T}}$, $r_{\mathcal{T}}$ sont fonctorielles en $\mathcal{T}$.

Pour tout S -groupeïde $\mathcal{X}'$, on définit le S -groupeïde

$$(17.11.2) \quad T(\mathcal{X}'/S)$$

comme suit. Pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, la catégorie fibre $T(\mathcal{X}'/S)_U$ est la catégorie fibre $\mathcal{X}'_{U[\varepsilon]}$ et, pour tout flèche $V \xrightarrow{\varphi} U$ dans (Aff/S) , le foncteur $\varphi^* : T(\mathcal{X}'/S)_U \rightarrow T(\mathcal{X}'/S)_V$ est par définition le foncteur $(\varphi[\varepsilon])^* : \mathcal{X}'_{U[\varepsilon]} \rightarrow \mathcal{X}'_{V[\varepsilon]}$. On a des 1-morphismes canoniques de S -groupeïdes

$$(17.11.3) \quad T(\mathcal{X}'/S) \xrightarrow{\tau_{\mathcal{X}'}} \mathcal{X}'$$

et

$$(17.11.4) \quad \mathcal{X}' \xrightarrow{\sigma_{\mathcal{X}'}} T(\mathcal{X}'/S)$$

définis par

$$\tau_{\mathcal{X}'}(\xi) = i_U^* \xi$$

et

$$\sigma_{\mathcal{X}'}(x) = r_U^* x$$

pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et tous les $\xi \in \text{ob} T(\mathcal{X}'/S)_U$ et $x \in \text{ob} \mathcal{X}'_U$.

LEMME (17.12). — Si $\mathcal{X}'$ est un S -champ, il en est de même de $T(\mathcal{X}'/S)$.

Preuve : Le foncteur $(-)[\varepsilon]$ est continu et $T(\mathcal{X}'/S)$ est une « image directe » de $\mathcal{X}'$. $\square$

DÉFINITION (17.13). — Si $\mathcal{X}'$ est un S -champ, on appellera $T(\mathcal{X}'/S)$ le S -champ tangent à $\mathcal{X}'$ et on dira que $\tau_{\mathcal{X}'}$ est sa projection canonique et que $\sigma_{\mathcal{X}'}$ est sa section nulle.

Le morphisme de S -champs

$$(17.13.1) \quad \xi_{\mathcal{X}'} : T(\mathcal{X}'/S)[\varepsilon] \rightarrow \mathcal{X}'$$

qui envoie

$$(\xi : U[\varepsilon] \rightarrow \mathcal{X}', \alpha : U \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}[\varepsilon]/(\varepsilon^2))) \in (T(\mathcal{X}'/S)[\varepsilon])_U$$

sur le composé

$$U \xrightarrow{(\text{Id}_U, \alpha)} U[\varepsilon] \xrightarrow{\xi} \mathcal{X}',$$

est appelé le *vecteur tangent universel*. On a évidemment

$$\xi_{\mathcal{X}'} \circ i_{T(\mathcal{X}'/S)} = \tau_{\mathcal{X}'} : T(\mathcal{X}'/S) \rightarrow \mathcal{X}'.$$

(17.14) Chaque 1-morphisme de S -champs $\mathcal{X}' \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ induit canoniquement un 1-morphisme de S -champs

$$(17.14.1) \quad T(\mathcal{X}'/S) \xrightarrow{TF} T(\mathcal{Y}/S)$$

défini par $(TF)_U = F_{U[\varepsilon]}$. On posera

$$(17.14.2) \quad T(\mathcal{X}'/\mathcal{Y}) = T(\mathcal{X}'/S) \times_{TF, T(\mathcal{Y}/S), \sigma_{\mathcal{Y}}} \mathcal{Y}$$

et on dira que $T(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$ est le S -champ tangent relatif de $\mathcal{X}'$ sur $\mathcal{Y}$. On a une projection canonique

$$(17.14.3) \quad \tau_{\mathcal{X}'/\mathcal{Y}} = \tau_{\mathcal{X}'} \circ \text{pr}_1 : T(\mathcal{X}'/\mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{X}',$$

une section nulle

$$(17.14.4) \quad \sigma_{\mathcal{X}'/\mathcal{Y}} = (\sigma_{\mathcal{X}'}, F) : T(\mathcal{X}'/\mathcal{Y}) \rightarrow T(\mathcal{X}'/S)$$

et un 1-morphisme canonique

$$(17.14.5) \quad \text{pr}_1 : T(\mathcal{X}'/\mathcal{Y}) \rightarrow T(\mathcal{X}'/S).$$

LEMME (17.14.6). — Si le 1-morphisme de S -champs $\mathcal{X}' \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ est représentable, il en est de même du 1-morphisme de S -champs $TF : T(\mathcal{X}'/S) \rightarrow T(\mathcal{Y}/S)$ et des 1-morphismes de S -champs $\tau_{\mathcal{X}'/\mathcal{Y}} : T(\mathcal{X}'/\mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{X}'$ et $\sigma_{\mathcal{X}'/\mathcal{Y}} : \mathcal{X}' \rightarrow T(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$.

Preuve : Pour montrer la représentabilité de TF , il suffit clairement de démontrer que, pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et tout S -espace algébrique X , muni d'un morphisme de S -espaces algébriques $f : X \rightarrow U[\varepsilon]$, le U -espace Z défini par

$$Z(V \xrightarrow{\varphi} U) = \{\xi \in X(V[\varepsilon]) \mid f(\xi) = \varphi[\varepsilon]\}$$

est algébrique. Or, on a un 1-morphisme de S -champs, fonctoriel en $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$,

$$j : U \rightarrow T(U[\varepsilon]/S),$$

défini par

$$j(\varphi) = \varphi[\varepsilon]$$

pour tous les $\varphi \in U(V)$ et $V \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, et il est clair que

$$Z = U_{j, T(U[\varepsilon]/S), Tf} T(X/S).$$

Il ne reste plus qu'à rappeler que, pour tout S -espace algébrique X , le S -champ $T(X/S)$, qui est bien entendu un S -espace, est en fait un S -espace algébrique (cf. [EGA] IV, 16.5).

Maintenant $F \circ \tau_{\mathcal{X}'/\mathcal{Y}}$ est représentable car déduit de TF par le changement de base $\sigma_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \rightarrow T(\mathcal{Y}/S)$ (cf. (3.11)). Par suite, $\tau_{\mathcal{X}'/\mathcal{Y}}$ l'est aussi. Enfin, $\tau_{\mathcal{X}'/\mathcal{Y}} \circ \sigma_{\mathcal{X}'/\mathcal{Y}} = \text{Id}_{\mathcal{X}'}$ est représentable et comme on vient de voir qu'il en est de même de $\tau_{\mathcal{X}'/\mathcal{Y}}$, $\sigma_{\mathcal{X}'/\mathcal{Y}}$ est représentable. $\square$

On peut préciser le lemme (17.14.6) quand F est un 1-morphisme de S -champs algébriques :

PROPOSITION (17.15). — Soit $F : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{Y}$ un 1-morphisme représentable de S -champs algébriques. Alors, les S -champs algébriques $T(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$ et $\mathbb{V}(\Omega^1_{\mathcal{X}'/\mathcal{Y}})$ (cf. (17.5.6) et (14.2.6)) sont canoniquement 1-isomorphes par un 1-isomorphisme qui envoie respectivement $\tau_{\mathcal{X}'/\mathcal{Y}}$ et $\sigma_{\mathcal{X}'/\mathcal{Y}}$ sur la projection canonique et la section nulle de $\mathbb{V}(\Omega^1_{\mathcal{X}'/\mathcal{Y}})$ sur $\mathcal{X}'$.

Preuve : On définit un 1-morphisme de S -champs

$$T(\mathcal{X}'/\mathcal{Y}) \rightarrow \mathbb{V}(\Omega^1_{\mathcal{X}'/\mathcal{Y}})$$

en envoyant, pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, l'objet $\xi : U[\varepsilon] \rightarrow \mathcal{X}'$ de $\mathcal{X}'_{U[\varepsilon]}$, d'image $x = \xi \circ i : U \rightarrow \mathcal{X}'$ dans $\mathcal{X}'_U$, sur l'homomorphisme de $\mathcal{C}_U$ -Modules

$$(\Omega^1_{\mathcal{X}'/\mathcal{Y}})_{U, x} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{C}_U$$

défini comme suit : on identifie $\mathcal{C}_U$ à $\Omega^1_{U[\varepsilon]/U}$ par $1 \mapsto d\varepsilon$ et alors $\alpha = i^* \beta$ où

$$\beta : (\Omega^1_{\mathcal{X}'/\mathcal{Y}})_{U[\varepsilon], \xi} \rightarrow \Omega^1_{U[\varepsilon]/U}$$

est la flèche de fonctorialité pour Ω^1 attachée au carré 2-commutatif de 1-morphismes représentables de S -champs algébriques

$$\begin{array}{ccc} U[\varepsilon] & \xrightarrow{\xi} & \mathcal{X}' \\ \tau \downarrow & & \downarrow F \\ U & \xrightarrow{F(x)} & \mathcal{Y}. \end{array}$$

Pour vérifier que ce 1-morphisme de S -champs algébriques $T(\mathcal{X}'/\mathcal{Y}) \rightarrow \mathbb{V}(\Omega^1_{\mathcal{X}'/\mathcal{Y}})$ est un 1-isomorphisme, il suffit de le faire après changement de base par une présentation $Q : Y \rightarrow \mathcal{Y}$ de $\mathcal{Y}$ (le 1-morphisme $T(\mathcal{X}'/\mathcal{Y}) \rightarrow \mathbb{V}(\Omega^1_{\mathcal{X}'/\mathcal{Y}})$ est automatiquement représentable car c'est un 1-morphisme au-dessus de $\mathcal{X}'$ et que $T(\mathcal{X}'/\mathcal{Y})$ et $\mathbb{V}(\Omega^1_{\mathcal{X}'/\mathcal{Y}})$ sont représentables au-dessus de $\mathcal{X}'$, cf. (17.14.6) et (14.2.6)).

Or la proposition résulte de ([EGA] IV, 16.5.17) quand $\mathcal{X}' = X$ et $\mathcal{Y} = Y$ sont des S -espaces algébriques. Par suite, en général elle résulte de ce qui précède et du lemme suivant :

LEMME (17.15.1). — Soit

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}' & \xrightarrow{A} & \mathcal{X} \\ F' \downarrow & \square & \downarrow F \\ \mathcal{Y}' & \xrightarrow{B} & \mathcal{Y} \end{array}$$

un carré 2-cartésien dans (Ch/S) . Alors, le carré correspondant

$$\begin{array}{ccc} T(\mathcal{X}'/S) & \xrightarrow{TA} & T(\mathcal{X}'/S) \\ TF' \downarrow & & \downarrow TF \\ T(\mathcal{X}'/S) & \xrightarrow{TB} & T(\mathcal{X}'/S) \end{array}$$

est aussi 2-cartésien et le 1-morphisme canonique

$$T(\mathcal{X}'/\mathcal{X}') \rightarrow T(\mathcal{X}'/\mathcal{X}') \times_{\text{pr}_2, \mathcal{X}, B} \mathcal{X}'$$

est un 1-isomorphisme.

Preuve : La première assertion résulte de la définition du S -champ tangent à un S -champ («exactitude à gauche de l'image directe»). La seconde résulte aussitôt de la première. $\square$

THÉOREME (17.16). — Soit $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique. Alors, $T(\mathcal{X}/S)$ est aussi un S -champ algébrique et les S -champs algébriques $\mathbb{V}(L_{\mathcal{X}/S}^{\geq 0})$ et $T(\mathcal{X}/S)$ au dessus de $\mathcal{X}$ sont canoniquement 1-isomorphes.

Preuve : Soit $X \xrightarrow{P} \mathcal{X}$ une présentation de $\mathcal{X}$, de sorte que le complexe de $\mathcal{C}_{X/\text{lis-ét}}$ -Modules quasi-cohérents

$$[\Omega_{X/S, \text{lis-ét}}^1 \xrightarrow{d^0} \Omega_{X/\mathcal{X}}^1]$$

représente le ind-objet $P^* L_{\mathcal{X}/S}^{\geq 0}$ (cf. (17.7)). Alors, il suffit essentiellement de démontrer que les S -champs

$$\mathcal{Z} = \mathbb{V}([\Omega_{X/S, \text{lis-ét}}^1 \xrightarrow{d^0} \Omega_{X/\mathcal{X}}^1])$$

(cf. (14.3.7)) et

$$\mathcal{T} = T(\mathcal{X}/S) \times_{\tau_{\mathcal{X}}, \mathcal{X}, P} X$$

sont canoniquement 1-isomorphes par un 1-isomorphisme qui échange les projections sur X .

On a $\mathbb{V}(\Omega_{X/S}^1) = T(X/S)$ et $\mathbb{V}(\Omega_{X/\mathcal{X}}^1) = T(X/\mathcal{X})$ (cf. (17.15)), de sorte que le S -champ $\mathcal{Z}$ est le S -champ associé au S -espace algébrique en groupoïdes

$$T(X/S) \times_{\tau_{\mathcal{X}}, X, \tau_{X/\mathcal{X}}} T(X/\mathcal{X}) \xrightarrow[b]{s} T(X/S)$$

avec $s = \text{pr}_1$ et $b = \text{pr}_1 + f \circ \text{pr}_2$, f désignant le morphisme (17.14.5) pour $\mathcal{X}' := X$ et $\mathcal{X} := \mathcal{X}$.

On considère alors le 1-morphisme représentable

$$(TP, \tau_X) : T(X/S) \rightarrow \mathcal{T}$$

(cf. (17.14.6)). Comme $TP \circ f$ se factorise par $\sigma_{\mathcal{X}}$ par définition de $T(X/\mathcal{X})$, les 1-morphismes $(TP, \tau_X) \circ s$ et $(TP, \tau_X) \circ b$ sont 2-isomorphes et (TP, τ_X) définit en fait un 1-morphisme de S -champs

$$\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{T}.$$

Il reste à vérifier que ce 1-morphisme est un 1-isomorphisme.

Comme P est représentable lisse et surjectif, (TP, τ_X) est un épimorphisme : tout carré 2-commutatif dans (Ch/S)

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & \downarrow P \\ U[\varepsilon] & \longrightarrow & \mathcal{X} \end{array}$$

avec $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ peut se compléter en un diagramme 2-commutatif

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow & \downarrow P \\ U[\varepsilon] & \longrightarrow & \mathcal{X} \end{array}$$

dans (Ch/S) .

On conclut alors en remarquant que le 1-morphisme

$(s, b) : T(\mathcal{X}/S) \times_{\tau_{\mathcal{X}}, X, \tau_{X/\mathcal{X}}} T(X/\mathcal{X}) \rightarrow T(X/S) \times_{(TP, \tau_X), \mathcal{T}, (TP, \tau_X)} T(X/S)$ est un 1-isomorphisme (les détails sont laissés au lecteur). $\square$

(17.17) Si $\mathcal{X}$ est un S -champ algébrique, il résulte du théorème (17.16) que le S -champ tangent $T(\mathcal{X}/S)$ est naturellement muni d'une structure de S -champ de Picard relatif au-dessus de $\mathcal{X}$ pour la projection canonique $\tau_{\mathcal{X}}$ (cf. (14.4)), et que la section nulle $\sigma_{\mathcal{X}}$ est une section neutre pour cette structure. On peut introduire plus directement cette structure de S -champ de Picard relatif. Nous nous contenterons d'esquisser la définition du 1-morphisme d'addition

$$(17.17.1) \quad + : T(\mathcal{X}/S) \times_{\tau_{\mathcal{X}}, \mathcal{X}, \tau_{\mathcal{X}}} T(\mathcal{X}/S) \rightarrow T(\mathcal{X}/S)$$

sur les objets, les définitions du 1-morphisme d'addition sur les morphismes et des 2-isomorphismes d'associativité et de commutativité, ainsi que la vérification des axiomes de S -champ de Picard relatif, étant laissées au lecteur.

Pour tout S -champ $\mathcal{T}$, considérons le S -champ

$$\mathcal{T}[\varepsilon_1, \varepsilon_2] = \mathcal{T} \times \text{Spec}(\mathbb{Z}[\varepsilon_1, \varepsilon_2]/(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_1 \varepsilon_2))$$

et les immersions fermées naturelles

$$i_{1,\mathcal{T}}, i_{2,\mathcal{T}} : \mathcal{T}[\varepsilon] \hookrightarrow \mathcal{T}[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$$

ayant pour images respectives les sous-champs fermés définis par les Idéaux (ε_2) et (ε_1) .

PROPOSITION (17.17.2). — *Avec les hypothèses et notations ci-dessus, soit de plus $\mathcal{V}$ un S -champ algébrique. Alors le diagramme de catégories*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_S(\mathcal{T}[\varepsilon_1, \varepsilon_2], \mathcal{V}) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_S(i_{1,\mathcal{T}}, \mathcal{V})} & \mathrm{Hom}_S(\mathcal{T}[\varepsilon], \mathcal{V}) \\ \mathrm{Hom}_S(i_{2,\mathcal{T}}, \mathcal{V}) \downarrow & \square & \downarrow \mathrm{Hom}_S(i_{\mathcal{T}}, \mathcal{V}) \\ \mathrm{Hom}_S(\mathcal{T}[\varepsilon], \mathcal{V}) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_S(i_{\mathcal{T}}, \mathcal{V})} & \mathrm{Hom}_S(\mathcal{T}, \mathcal{V}) \end{array}$$

est 2-cartésien, où $\mathrm{Hom}_S(\cdot, \cdot)$ désigne la catégorie des 1-morphismes de S -champs de $\cdot$ dans $\cdot$.

Preuve (détails laissés au lecteur) : Le cas où $\mathcal{T}$ et $\mathcal{V}$ sont des schémas affines est élémentaire. D'autre part on se ramène, pour $\mathcal{V}$ fixé, au cas où $\mathcal{T}$ est un schéma affine par des arguments similaires à ceux de la démonstration de (4.18) : si $U \rightarrow \mathcal{V}$ est un morphisme lisse et surjectif d'un S -espace algébrique U vers un S -champ algébrique $\mathcal{V}$, et si le théorème est démontré pour $\mathcal{T} = U$, $\mathcal{T} = U \times_{\mathcal{V}} U$ et $\mathcal{T} = U \times_{\mathcal{V}} U \times_{\mathcal{V}} U$, alors il est vrai pour $\mathcal{T} = \mathcal{V}$. On traite ensuite, par descentes successives le long d'une présentation convenable de $\mathcal{V}$, le cas où $\mathcal{V}$ est un espace algébrique, puis le cas général. $\square$

Pour construire le morphisme d'addition (17.17.1), posons

$$\mathcal{T} = T(\mathcal{X}/S) \times_{\tau_{\mathcal{X}}, \mathcal{X}, \tau_{\mathcal{X}}} T(\mathcal{X}/S).$$

Du vecteur tangent universel $\xi_{\mathcal{X}} : T(\mathcal{X}/S)[\varepsilon] \rightarrow \mathcal{X}$ on déduit deux 1-morphismes

$$\xi_{\mathcal{X}} \circ \mathrm{pr}_1, \xi_{\mathcal{X}} \circ \mathrm{pr}_2 : \mathcal{T}[\varepsilon] \rightarrow \mathcal{X}$$

dont les composés avec l'immersion naturelle $i_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \hookrightarrow \mathcal{T}[\varepsilon]$ sont tous deux canoniquement 2-isomorphes à la projection canonique $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{X}$. La proposition (17.17.2) permet d'en déduire un 1-morphisme $\mathcal{T}[\varepsilon_1, \varepsilon_2] \rightarrow \mathcal{X}$; en composant avec le 1-morphisme «diagonal»

$$\delta : \mathcal{T}[\varepsilon] \rightarrow \mathcal{T}[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$$

(défini par $\varepsilon_1 \mapsto \varepsilon, \varepsilon_2 \mapsto \varepsilon$) on obtient un 1-morphisme $\mathcal{T}[\varepsilon] \rightarrow \mathcal{X}$, c'est-à-dire un 1-morphisme $\mathcal{T} \rightarrow T(\mathcal{X}/S)$ qui est le morphisme d'addition cherché.

18. Faisceaux constructibles sur un S -champ algébrique

(18.1) Soit Λ un anneau noethérien de torsion. Rappelons tout d'abord la définition de ([SGA 4] IX, 2.3) des faisceaux étales constructibles d'ensembles (resp. de Λ -modules) sur les schémas.

DÉFINITION (18.1.1). — (i) *Un faisceau étale d'ensembles (resp. de Λ -modules) $\mathcal{F}$ sur un schéma X est dit localement constant s'il existe un recouvrement étale $X' \rightarrow X$ tel que la restriction de $\mathcal{F}$ à X' soit un faisceau constant d'ensembles (resp. de Λ -modules).*

(ii) *Un faisceau étale d'ensembles (resp. de Λ -modules) $\mathcal{F}$ sur un schéma X est dit constructible si, pour tout ouvert de Zariski affine U de X , il existe une décomposition de U en réunion d'un nombre fini de sous-schémas réduits localement fermés constructibles U_i telle que la restriction de $\mathcal{F}$ à chaque U_i soit localement constante de valeur un ensemble fini (resp. un Λ -module de type fini).*

Remarque (18.1.2) : (1) On peut remplacer dans (18.1.1)(ii) l'expression «pour tout ouvert de Zariski affine de X » par «pour tout ouvert affine de X pour la topologie étale», ou encore par «pour chacun des ouverts d'un recouvrement étale affine de X » (cf. ([SGA 4] IX, 2.8)), et la définition (18.1.1) ainsi modifiée s'applique aux faisceaux étales sur les espaces algébriques.

(2) On peut même remplacer les recouvrements étales par des recouvrements lisses; en d'autres termes, si $\pi : X' \rightarrow X$ est un morphisme lisse et surjectif d'espaces algébriques et $\mathcal{F}$ un faisceau étale sur X , alors $\mathcal{F}$ est localement constant (resp. constructible) si et seulement si $\pi^{-1}\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{F}$ l'est. Ceci résulte immédiatement de l'existence de sections de π , localement pour la topologie étale.

PROPOSITION (18.1.3). — *Soient $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique et $\mathcal{T}$ un faisceau lisse-étale cartésien d'ensembles sur $\mathcal{X}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *pour tout ouvert lisse-étale (U, u) de $\mathcal{X}$, le faisceau étale d'ensembles $\mathcal{T}_{U,u}$ est localement constant (resp. constructible);*

(ii) il existe une présentation $P : X \rightarrow \mathcal{X}$ de $\mathcal{X}$ telle que le faisceau étale d'ensembles $\mathcal{F}_{X,P}$ soit localement constant (resp. constructible).

En outre, l'énoncé analogue est valable pour les faisceaux de Λ -modules.

Preuve : L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est triviale. La réciproque est une conséquence facile de la remarque (18.1.2)(2). $\square$

DÉFINITION (18.1.4). — Un faisceau lisse-étale d'ensembles (ou de Λ -modules) $\mathcal{F}$ sur un S -champ algébrique $\mathcal{X}$ est dit localement constant (resp. constructible) s'il est cartésien et vérifie les conditions équivalentes de la proposition ci-dessus.

Remarque (18.1.5) : Si $\mathcal{X} = X$ est un S -espace algébrique, les notions de faisceau lisse-étale cartésien et de faisceau étale coïncident (cf. (12.3.2)), et par suite celles de faisceau lisse-étale constructible et de faisceau étale constructible coïncident aussi. Plus précisément, le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{X, \text{Id}_X}$ est une équivalence de la catégorie des faisceaux lisses-étales constructibles sur $\mathcal{X}$ sur celle des faisceaux étales constructibles sur X .

LEMME (18.1.6). — La sous-catégorie strictement pleine de la catégorie des faisceaux lisses-étales de Λ -modules sur $\mathcal{X}$ dont les objets sont les faisceaux constructibles est stable par limites projectives et inductives finies (et en particulier par noyaux et conoyaux). De plus elle est stable par extensions, et c'est donc une sous-catégorie abélienne épaisse. $\square$

PROPOSITION (18.1.7). — Soit $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique noethérien. Alors un faisceau lisse-étale d'ensembles (resp. de Λ -modules) $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{X}$ est constructible si et seulement si $\mathcal{X}$ est réunion d'une famille finie de sous- S -champs réduits localement fermés constructibles $\mathcal{X}_i$ telle que la restriction de $\mathcal{F}$ à chaque $\mathcal{X}_i$ soit localement constante de valeur un ensemble fini (resp. un Λ -module de type fini).

Preuve : La partie «si» est évidente. Montrons la partie «seulement si». On procède par récurrence noethérienne sur $\mathcal{X}$. Soient $P : X \rightarrow \mathcal{X}$ une présentation de $\mathcal{X}$ et U un ouvert non vide de X au-dessus duquel le faisceau constructible $\mathcal{F}_{X,P}$ est localement constant. Alors, si $\mathcal{U}$ est le sous- S -champ ouvert de $\mathcal{X}$ image de U par P , $P|_U : U \rightarrow \mathcal{U}$ est une présentation de $\mathcal{U}$ et la restriction de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{U}$ est donc localement constante. Il ne reste plus qu'à appliquer l'hypothèse de récurrence au fermé complémentaire de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{X}$. $\square$

(18.2) Soit $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un 1-morphisme de S -champs algébriques. Il résulte des définitions que l'image inverse $F^{-1}\mathcal{F}$ d'un faisceau lisse-étale d'ensembles (ou de Λ -modules) cartésien $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{X}$ est cartésienne sur $\mathcal{Y}$. Voyons ce qu'il en est pour les images directes.

Le lemme suivant généralise le lemme (12.6.2).

LEMME (18.2.1). — (i) Si $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ est représentable, pour tout faisceau lisse-étale de Λ -modules cartésien $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{Y}$ et tout ouvert lisse-étale (U, u) de $\mathcal{X}$, on a canoniquement

$$(R^i F_* \mathcal{S})_{U,u} = R^i (F_U)_* \mathcal{S}_{V,v}$$

quel que soit l'entier i , où $(V, v) = (U \times_{u, \mathcal{X}, F} \mathcal{Y}, \text{pr}_{\mathcal{Y}})$ est l'ouvert lisse-étale de $\mathcal{Y}$ image réciproque de (U, u) par F et où $F_U : V \rightarrow U$ est la projection canonique sur U de $U \times_{u, \mathcal{X}, F} \mathcal{Y}$.

(ii) Soient $Q : Y \rightarrow \mathcal{Y}$ une présentation de $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{S}$ un faisceau lisse-étale de Λ -modules cartésien sur $\mathcal{Y}$. Alors, pour tout ouvert lisse-étale (U, u) de $\mathcal{X}$, on a une suite spectrale canonique de Λ -modules

$$(18.2.1.1) \quad E_1^{pq} = R^q (F_{p,U})_* \mathcal{S}_{p,U} \Rightarrow (R^{p+q} F_* \mathcal{S})_{U,u}$$

où $Q_* : Y_* \rightarrow \mathcal{Y}_*$ est l'espace algébrique simplicial associé à Q , $F_* = F \circ Q_* : Y_* \rightarrow \mathcal{X}_*$, $\mathcal{S}_*$ est le faisceau étale (de Λ -modules) simplicial sur Y_* associé à $\mathcal{S}$ (cf. (12.4.5)) et $F_{*,U} : Y_{*,U} \rightarrow U$ et $\mathcal{S}_{*,U}$ sont les restrictions de F_* et $\mathcal{S}_*$ au-dessus de U .

Preuve : Commençons par démontrer l'assertion (i). La question étant locale pour la topologie lisse-étale sur $\mathcal{X}$, on peut supposer que $\mathcal{X} = U$ et $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_U = V$ sont des espaces algébriques et que u et v sont les identités de U et V respectivement. Il s'agit alors de démontrer que les restrictions au site étale de U des images directes supérieures par $F : V \rightarrow U$ du faisceau lisse-étale cartésien $\mathcal{S}$ sont égales aux images directes supérieures par F de la restriction de $\mathcal{S}$ au site étale de V . Or on a un diagramme commutatif de morphismes de topos

$$\begin{array}{ccc} V_{\text{lisse-ét}} & \xrightarrow{\iota_V} & V_{\text{ét}} \\ F_{\text{lisse-ét}} \downarrow & & \downarrow F_{\text{ét}} \\ U_{\text{lisse-ét}} & \xrightarrow{\iota_U} & U_{\text{ét}} \end{array}$$

où les morphismes ι_U et ι_V sont induits par les inclusions des sites étales dans les sites lisses-étales. Par suite, il ne reste plus qu'à démontrer que les images directes supérieures $R^p(\iota_U)_* \mathcal{F}$ et $R^p(\iota_V)_* \mathcal{S}$ sont nulles pour tout entier $p > 0$ et tous faisceaux lisses-étales $\mathcal{F}$ sur U et $\mathcal{S}$ sur V , ce qui résulte aussitôt de l'exactitude des foncteurs ι_U et ι_V (tout recouvrement lisse-étale d'un espace algébrique peut être raffiné en un recouvrement étale).

Montrons maintenant l'assertion (ii) comme conséquence de l'assertion (i). Pour cela considérons le topos $(Y_*)_{\text{lisse-ét}}$ des faisceaux d'ensembles lisses-étales simpliciaux sur l'espace algébrique simplicial Y_* . Comme (Y, Q) est un ouvert lisse-étale de $\mathcal{Y}$, la théorie de la descente cohomologique (cf. [De 1])

5.3) nous fournit une suite spectrale de faisceaux lisses-étales de Λ -modules sur $\mathcal{X}'$,

$$E_1^{pq} = R^q(F_p)_* Q_p^{-1} \mathcal{S} \Rightarrow R^{p+q} F_* \mathcal{S},$$

et donc, par application du foncteur exact u_U ci-dessus, une suite spectrale de faisceaux étales de Λ -modules sur U ,

$$E_1^{pq} = (R^q(F_p)_* Q_p^{-1} \mathcal{S})_{U,u} \Rightarrow (R^{p+q} F_* \mathcal{S})_{U,u}.$$

Il ne reste plus qu'à invoquer l'assertion (i) pour chacun des 1-morphismes représentables $F_p : Y_p \rightarrow \mathcal{X}'$ et chacun des faisceaux lisses-étales (évidemment cartésiens) $Q_p^{-1} \mathcal{S}$ sur Y_p . $\square$

PROPOSITION (18.2.2). — *Supposons que le 1-morphisme de S -champs algébriques $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}'$ soit quasi-compact. Alors le foncteur*

$$F_* : \mathcal{Y}_{\text{lis-ét}} \rightarrow \mathcal{X}'_{\text{lis-ét}}$$

envoie tout faisceau d'ensembles cartésien sur un faisceau d'ensembles lui aussi cartésien.

Supposons de plus que l'anneau noethérien de torsion Λ soit annulé par un entier inversible sur S . Alors, pour tout entier $i \geq 0$, le foncteur dérivé $R^i F_$ envoie tout faisceau de Λ -modules cartésien sur un faisceau de Λ -modules lui aussi cartésien.*

Preuve : Soient $\mathcal{S}$ un faisceau lisse-étale d'ensembles sur $\mathcal{Y}$ et $(\varphi, \alpha) : (U', u') \rightarrow (U, u)$ un morphisme entre ouverts lisses-étales de $\mathcal{X}'$ avec φ lisse. On doit montrer que la flèche canonique

$$\varphi^{-1}(F_* \mathcal{S})_{U,u} \rightarrow (F_* \mathcal{S})_{U',u'}$$

est un isomorphisme.

Soit $Q : Y \rightarrow \mathcal{Y}$ une présentation de $\mathcal{Y}$ avec $F \circ Q : Y \rightarrow \mathcal{X}'$ (représentable et) *quasi-compact*. On note $Q_* : Y_* \rightarrow \mathcal{Y}$ le S -espace algébrique simplicial correspondant et $\mathcal{S}$ le faisceau étale simplicial cartésien associé à $\mathcal{S}$ (cf. (12.4.5)). Le morphisme composé $F \circ Q_1 : Y_1 \rightarrow \mathcal{X}'$ est aussi (représentable et) quasi-compact, et d'après le lemme (12.6.2), les faisceaux étales $(F_* \mathcal{S})_{U,u}$ et $(F_* \mathcal{S})_{U',u'}$ sont isomorphes aux noyaux des doubles flèches

$$(F_{0,U})_* \mathcal{S}_{0,U} \rightrightarrows (F_{1,U})_* \mathcal{S}_{1,U}$$

et

$$(F_{0,U'})_* \mathcal{S}_{0,U'} \rightrightarrows (F_{1,U'})_* \mathcal{S}_{1,U'}$$

respectivement, avec les notations de loc. cit..

Notons $\psi_* : Y_{*,U'} \rightarrow Y_{*,U}$ le morphisme de S -espaces algébriques simpliciaux induit par φ . Pour $n = 0, 1$, on a une flèche de changement de base

$$\varphi^{-1}(F_{n,U})_* \mathcal{S}_{n,U} \rightarrow (F_{n,U'})_* \psi_n^{-1} \mathcal{S}_{n,U} \cong (F_{n,U'})_* \mathcal{S}_{n,U'},$$

et la flèche canonique $\varphi^{-1}(F_* \mathcal{S})_{U,u} \rightarrow (F_* \mathcal{S})_{U',u'}$ est clairement induite par ces flèches de changement de base. Pour prouver la proposition, il ne reste plus qu'à montrer que pour $n = 0, 1$, la flèche de changement de base ci-dessus est un isomorphisme.

Mais si

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{\psi} & Y \\ f' \downarrow & \square & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow[\varphi]{} & X \end{array}$$

est un carré cartésien de S -espaces algébriques avec f , et donc f' , quasi-compact, et si $\mathcal{S}$ est un faisceau étale d'ensembles sur Y , la flèche de changement de base

$$\varphi^{-1} f_* \mathcal{S} \rightarrow f'_* \psi^{-1} \mathcal{S}$$

est un isomorphisme. Cela résulte directement du théorème d'Artin ([SGA 4] XVI, 1.2) si f , et donc f' , est schématique. Le cas général s'en déduit en calculant $f_* \mathcal{S}$ à l'aide d'une présentation étale $Y_0 \rightarrow Y$ où Y_0 est un schéma, et du schéma simplicial associé. D'où la première assertion de la proposition.

La preuve de la seconde assertion est similaire. Pour chaque ouvert lisse-étale (U, u) de $\mathcal{X}'$, on peut calculer les faisceaux étales de Λ -modules $(R^i F_* \mathcal{S})_{U,u}$, $i \geq 0$, par la suite spectrale (18.2.1.1),

$$E_1^{pq} = R^q(F_{p,U})_* \mathcal{S}_{p,U} \Rightarrow (R^{p+q} F_* \mathcal{S})_{U,u},$$

et, si

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{\psi} & Y \\ f' \downarrow & \square & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow[\varphi]{} & X \end{array}$$

est un carré cartésien de S -espaces algébriques avec f , et donc f' , quasi-compact, et si $\mathcal{S}$ est un faisceau étale de Λ -modules sur Y , la flèche de changement de base

$$\varphi^{-1} R^i f_* \mathcal{S} \rightarrow R^i f'_* \psi^{-1} \mathcal{S}$$

est un isomorphisme (cf. ([SGA 4] XVI, 1.2), du moins si f est schématique). $\square$

Dans toute la suite nous supposons que l'anneau noethérien de torsion Λ est annulé par un entier inversible sur S .

(18.3) Soit $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}'$ un 1-morphisme de S -champs algébriques. Il résulte des définitions que l'image inverse $F^{-1} \mathcal{T}$ d'un faisceau lisse-étale d'ensembles, ou de Λ -modules, constructible $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{X}'$ est constructible sur $\mathcal{Y}$.

Étudions maintenant la préservation de la constructibilité par images directes.

THÉOREME (18.3.1). — Soient $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un morphisme de S -champs algébriques de type fini et $\mathcal{F}$ un faisceau lisse-étale de Λ -modules constructible sur $\mathcal{Y}$. Alors, pour tout entier $i \geq 0$, il existe un ouvert dense $S^\circ \subset S$ avec les propriétés suivantes :

- (i) la restriction de $R^i F_* \mathcal{F}$ à l'ouvert $S^\circ \times_S \mathcal{X}$ de $\mathcal{X}$ est constructible,
- (ii) la formation de $R^i F_* \mathcal{F}$ est compatible à tout changement de base $S' \rightarrow S^\circ \subset S$, i.e., si l'on note

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}' & \xrightarrow{B} & \mathcal{Y} \\ F' \downarrow & \square & \downarrow F \\ \mathcal{X}' & \xrightarrow{A} & \mathcal{X} \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ S' & \longrightarrow & S \end{array}$$

le changement de base de F par le morphisme de schémas $S' \rightarrow S$, la flèche canonique

$$A^{-1} R^i F_* \mathcal{F} \rightarrow R^i F'_* B^{-1} \mathcal{F}$$

est un isomorphisme.

Preuve : Il suffit de démontrer que, pour tout ouvert lisse-étale (U, u) de $\mathcal{X}$ et tout entier $i \geq 0$, il existe un ouvert dense S° de S au-dessus duquel le faisceau étale de Λ -modules $(R^i F_* \mathcal{F})_{U,u}$ est constructible et de formation compatible à tout changement de base $S' \rightarrow S^\circ \subset S$. Or, après avoir fixé une présentation $Q : Y \rightarrow \mathcal{Y}$ de $\mathcal{Y}$ avec $F \circ Q : Y \rightarrow \mathcal{X}$ de type fini, $(R^i F_* \mathcal{F})_{U,u}$ se calcule à l'aide de la suite spectrale (18.2.1.1), et en fait ne dépend que des termes de degré total $\leq 2i$ de cette suite spectrale. On est donc ramené à démontrer que, pour tous entiers $p, q \geq 0$ fixés il existe un ouvert dense S° de S au-dessus duquel le faisceau étale de Λ -modules $R^q(F_{p,U})_* \mathcal{F}_{Y_{p,U}}$ est constructible et de formation compatible à tout changement de base $S' \rightarrow S^\circ \subset S$.

Si le morphisme $F_{p,U} : Y_{p,U} \rightarrow U$ est en fait un morphisme de S -schémas cette assertion n'est autre que le théorème de finitude générique et de changement de base générique de Deligne (cf. ([SGA 4 $\frac{1}{2}$] [Th. Finitude], 1.9)).

En général, on se ramène à ce cas particulier en considérant une présentation étale de $Y_{p,U}$ qui est schématique de type fini au-dessus de U et en calculant $R^q(F_{p,U})_* \mathcal{F}_{Y_{p,U}}$ par la suite spectrale (18.2.1.1) correspondante. $\square$

COROLLAIRE (18.3.2). — Supposons que S soit le spectre d'un corps k (de caractéristique inversible dans Λ). Alors, pour tout morphisme $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ de S -champs algébriques de type fini et tout faisceau lisse-étale $\mathcal{F}$ de Λ -modules constructible sur $\mathcal{Y}$, les faisceaux $R^i F_* \mathcal{F}$, $i \geq 0$, sont constructibles sur $\mathcal{X}$ et de formation compatible à tout changement de base $S' \rightarrow S = \text{Spec}(k)$.

En particulier, pour tout champ algébrique $\mathcal{X}$ de type fini sur un corps séparablement clos k et tout faisceau lisse-étale $\mathcal{F}$ de Λ -modules constructible sur $\mathcal{X}$, les Λ -modules $H^i(\mathcal{X}, \mathcal{F})$, $i \geq 0$, sont de type fini. De plus, pour toute extension séparablement close k' de k , les morphismes de restriction

$$H^i(\mathcal{X}, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(k' \otimes_k \mathcal{X}, \mathcal{F}),$$

$i \geq 0$, sont des isomorphismes. $\square$

Ce corollaire est dû à Behrend (cf. [Be] 1.1.6).

Remarque (18.3.3) : On fera cependant attention au fait que, contrairement au cas des schémas, la cohomologie d'un champ algébrique de type fini sur un corps séparablement clos peut être non nulle pour une infinité de degrés i .

Par exemple, si G est un groupe fini agissant trivialement sur un corps séparablement clos k (de caractéristique inversible dans Λ), la cohomologie lisse-étale de $B(G/k)$ à valeur dans Λ coïncide avec la cohomologie du groupe fini G à valeurs dans Λ qui, mis à part le cas trivial où l'ordre de G est inversible dans Λ , n'est pas bornée supérieurement.

Par exemple encore, pour tout corps séparablement clos (de caractéristique inversible dans Λ), le Λ -module

$$H^{2i}(B(\mathbb{G}_{m,k}/k), \Lambda) = H^{2i}(\mathbb{P}_k^i, \Lambda)$$

est libre de rang 1 et

$$H^{2i+1}(B(\mathbb{G}_{m,k}/k), \Lambda) = (0),$$

quel que soit l'entier $i \geq 0$ (cf. [De 1] Preuve du théorème (9.1.1)).

(18.4) Soit S un trait strictement local, i.e. le spectre d'un anneau de valuation discrète hensélien à corps résiduel séparablement clos. On note s le point fermé de S , η son point générique et $\bar{\eta}$ un point géométrique localisé en η . On pose

$$I = \pi_1(\eta, \bar{\eta}) = \text{Gal}(\kappa(\bar{\eta})/\kappa(\eta)).$$

Si $\mathcal{X}$ est un S -champ algébrique, on note $\mathcal{X}_s$, $\mathcal{X}_\eta$ et $\mathcal{X}_{\bar{\eta}}$ les fibres du morphisme structural $\mathcal{X} \rightarrow S$ en s , η et $\bar{\eta}$ respectivement.

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau lisse-étale de Λ -modules sur $\mathcal{X}$, on définit les *faisceaux de cycles proches*

$$(18.4.1) \quad R^q \Psi_\eta(\mathcal{F}), \quad q \geq 0,$$

sur la fibre spéciale $\mathcal{X}_s$ de $\mathcal{X}$ de la manière suivante. On note

$$\mathcal{X}_{\eta} \xleftarrow{j} \mathcal{X} \xleftarrow{i} \mathcal{X}_s$$

les inclusions et

$$\pi : \mathcal{X}_{\bar{\eta}} \rightarrow \mathcal{X}_{\eta}$$

la projection canonique, et on pose

$$R^q \Psi_{\eta}(\mathcal{F}) = i^{-1} R^q j_{*} \pi^{-1} j^{-1} \mathcal{F}.$$

Les faisceaux de cycles proches ainsi définis sont des faisceaux lisses-étales de Λ -modules cartésiens (cf. (18.2.2)). Ils sont en outre naturellement munis d'une action *continue* de I , i.e d'une action de I telle que, pour tout ouvert lisse-étale affine (U, u) de $\mathcal{X}_s$, l'action induite de I sur $R^q \Psi_{\eta}(\mathcal{F})(U, u)$ se factorise à travers un quotient fini de I , et on a la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{pq} = \mathcal{H}^p(I, R^q \Psi_{\eta}(\mathcal{F})) \Rightarrow i^{-1} R^{p+q} j_{*} \mathcal{F}.$$

Pour tout ouvert lisse-étale (U, u) de $\mathcal{X}$, on a des isomorphismes canoniques de faisceaux lisses-étales de $\Lambda[I]$ -modules

$$(18.4.2) \quad R^q \Psi_{\eta}(\mathcal{F})_{U,u} \cong R^q \Psi_{\eta}(\mathcal{F}_{U,u}), \quad q \geq 0,$$

où les cycles proches du second membre sont ceux de ([SGA 7 II] XIII, 2.1) et de ([SGA 4 $\frac{1}{2}$] [Thm. finitude], 3.1). Cela résulte essentiellement de ([SGA 4] XVI, 1.2) (cf. ([SGA 7 II] XIII, 2.1.7.2)).

En particulier, il résulte immédiatement de ([SGA 4 $\frac{1}{2}$], [Thm. finitude], 3.2 et 3.7) que :

THÉOREME (18.4.3). — *On suppose que le S -champ algébrique $\mathcal{X}$ est localement de type fini sur S et que $\mathcal{F}$ est constructible. Alors les faisceaux de cycles proches $R^q \Psi_{\eta}(\mathcal{F})$, $q \geq 0$, sont des faisceaux lisses-étales de Λ -modules constructibles. De plus, leur formation est compatible aux changements de traits strictement locaux $S' \rightarrow S$.* $\square$

En raisonnant comme dans ([SGA 4 $\frac{1}{2}$] [Thm. finitude], 3.10), on déduit de ce théorème que :

COROLLAIRE (18.4.4). — *Si S est un schéma régulier de dimension 0 ou 1, pour tout morphisme $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ de S -champs algébriques de type fini et tout faisceau lisse-étale $\mathcal{G}$ de Λ -modules constructible sur $\mathcal{Y}$, les faisceaux $R^q F_{*} \mathcal{G}$, $q \geq 0$, sont constructibles sur $\mathcal{X}$.* $\square$

(18.5) Soit $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un 1-morphisme de S -champs algébriques propre (cf. (7.11)). Par analogie avec le cas des schémas on peut espérer que les images directes supérieures par F d'un faisceau lisse-étale de Λ -modules constructible

sont aussi constructibles et de formation compatible à tout changement de base. Nous ne savons pas démontrer un tel énoncé. Néanmoins il n'est pas difficile d'établir le résultat partiel suivant :

THÉOREME (18.5.1). — *Supposons que le 1-morphisme propre de S -champs algébriques $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ vérifie la condition (*) de (7.12). Alors, pour tout faisceau lisse-étale de Λ -modules constructible $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{Y}$, les faisceaux lisses-étales de Λ -modules $R^i F_{*} \mathcal{G}$ sont eux aussi constructibles et de formation compatible à tout changement de S -champ algébrique de base $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$.*

Preuve : La question étant clairement locale au sens lisse sur $\mathcal{X}$, on peut supposer qu'il existe un S -champ algébrique $\mathcal{Y}'$ et un 1-morphisme propre et surjectif $B : \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Y}$ tel que $F \circ B : \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{X}$ soit représentable.

Considérons alors le S -champ algébrique simplicial augmenté $B_{*} : \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Y}$ associé à B et le morphisme $F' = F \circ B_{*} : \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{X}$. Comme tout morphisme propre et surjectif de schémas (ou d'espaces algébriques) est de *descente cohomologique universelle* (cf. [De 1] 5.3.5), on a une suite spectrale canonique de faisceaux lisses-étales

$$E_1^{pq} = R^q (F'_p)_{*} B_p^{-1} \mathcal{G} \Rightarrow R^{p+q} F_{*} \mathcal{G}.$$

On est donc ramené au cas d'un morphisme $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ représentable et propre. Dans ce cas, le théorème résulte de l'énoncé analogue pour les espaces algébriques (cf. [Ar 5] Ch. VII) et de l'assertion (i) du lemme (18.2.1). $\square$

(18.6) Pour tout S -espace algébrique X , notons

$$D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$$

la catégorie dérivée des complexes de faisceaux *étales* de Λ -modules sur X et

$$D_c(X_{\text{ét}}, \Lambda)$$

sa sous-catégorie (strictement) pleine des complexes à faisceaux de cohomologie constructibles. Pour tout S -champ algébrique $\mathcal{X}$, notons

$$D(\mathcal{X}, \Lambda)$$

la catégorie dérivée des complexes de faisceaux *lisses-étales* de Λ -modules sur $\mathcal{X}$,

$$D_{\text{cart}}(\mathcal{X}, \Lambda)$$

sa sous-catégorie (strictement) pleine formée des complexes à faisceaux de cohomologie cartésiens (cf. (12.10)) et

$$D_c(\mathcal{X}, \Lambda)$$

la sous-catégorie (strictement) pleine de $D_{\text{cart}}(\mathcal{X}, \Lambda)$ formée des complexes à faisceaux de cohomologie constructibles.

Il est facile de voir que la sous-catégorie $D_c(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ de $D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ et les sous-catégories $D_{\text{cart}}(\mathcal{X}, \Lambda)$ et $D_c(\mathcal{X}, \Lambda)$ de $D(\mathcal{X}, \Lambda)$ sont épaisses (si deux des sommets d'un triangle distingué sont dans la sous-catégorie, il en est de même du troisième). Ce sont donc des sous-catégories triangulées.

Rappelons que, dans le cas où le S -champ algébrique $\mathcal{X}$ est représentable par un espace algébrique X , le foncteur de restriction du site lisse-étale de $\mathcal{X}$ au site étale de X induit une équivalence de catégories triangulées

$$D_{\text{cart}}(\mathcal{X}, \Lambda) \xrightarrow{\sim} D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$$

(cf. (12.10.1)). Cette équivalence de catégories induit évidemment une équivalence de catégories triangulées

$$D_c(\mathcal{X}, \Lambda) \xrightarrow{\sim} D_c(X_{\text{ét}}, \Lambda).$$

Pour chaque expression $\alpha \in \{[a, +\infty[, +,] - \infty, b], -, [a, b], b\}$, nous utiliserons aussi les variantes habituelles

$$D_c^\alpha(X_{\text{ét}}, \Lambda) \subset D^\alpha(X_{\text{ét}}, \Lambda)$$

et

$$D_c^\alpha(\mathcal{X}, \Lambda) \subset D_{\text{cart}}^\alpha(\mathcal{X}, \Lambda) \subset D^\alpha(\mathcal{X}, \Lambda)$$

des catégories triangulées ci-dessus.

Soit $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un 1-morphisme de S -champs algébriques.

Il résulte des définitions que le foncteur image inverse

$$F^{-1} : D(\mathcal{X}, \Lambda) \rightarrow D(\mathcal{Y}, \Lambda)$$

envoie la sous-catégorie $D_{\text{cart}}(\mathcal{X}, \Lambda)$ dans la sous-catégorie $D_{\text{cart}}(\mathcal{Y}, \Lambda)$ et la sous-catégorie $D_c(\mathcal{X}, \Lambda)$ dans la sous-catégorie $D_c(\mathcal{Y}, \Lambda)$.

Il résulte de (18.2.2) que le foncteur image directe

$$RF_* : D^+(\mathcal{Y}, \Lambda) \rightarrow D^+(\mathcal{X}, \Lambda)$$

envoie la sous-catégorie $D_{\text{cart}}^+(\mathcal{Y}, \Lambda)$ dans la sous-catégorie $D_{\text{cart}}^+(\mathcal{X}, \Lambda)$.

Si l'on suppose de plus que S est le spectre d'un corps k et que $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont de type fini sur k , il résulte de (18.3.2) que ce foncteur image directe envoie la sous-catégorie $D_c^+(\mathcal{Y}, \Lambda)$ dans la sous-catégorie $D_c^+(\mathcal{X}, \Lambda)$.

(18.7) On aimerait compléter le formalisme de la section précédente en un formalisme des «six opérations» à la Grothendieck, analogue à celui dont on dispose pour les schémas. Ceci ne semble pas possible en général. Cependant, si k est un corps algébriquement clos de caractéristique 0 ou de caractéristique $p > 0$ inversible dans Λ , Bernstein et Lunts (cf. [Ber-Lu]) ont construit, pour chaque schéma X de type fini sur k et chaque groupe algébrique linéaire G sur k agissant sur X , une catégorie dérivée G -équivariante

$$D_G^+(X, \Lambda)$$

et ils ont établi un formalisme (partiel) des «six opérations» à la Grothendieck entre ces catégories dérivées équivariantes. Ils ont aussi montré que les catégories triangulées $D_G^+(X, \Lambda)$ et $D_{\text{cart}}^+([X/G], \Lambda)$ sont équivalentes (cf. Appendice B, à la fin du chapitre 2 de loc. cit.).

Leur construction est fondée sur une propriété remarquable des k -champs de la forme $\mathcal{X} = [X/G]$ avec G linéaire (cf. (18.7.5) ci-dessous) : ces k -champs admettent, pour chaque entier $n \geq 0$, une présentation $P : X \rightarrow \mathcal{X}$ qui est *universellement n -acyclique* (relativement à Λ) au sens de la définition suivante.

DÉFINITION (18.7.1). — *Un 1-morphisme représentable $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ de S -champs algébriques est dit universellement n -acyclique (relativement à Λ) si, pour tout $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$, tout $x \in \text{ob} \mathcal{X}_U$ et tout faisceau étale $\mathcal{F}$ de Λ -modules sur U , la flèche d'adjonction*

$$\mathcal{F} \rightarrow R^0(f_U)_* f_U^{-1} \mathcal{F}$$

est un isomorphisme et on a

$$R^i(f_U)_* f_U^{-1} \mathcal{F} = (0)$$

pour $i = 1, \dots, n$, où

$$f_U : U \times_{x, \mathcal{X}, F} \mathcal{Y} \rightarrow U$$

est la première projection canonique.

On renvoie à ([SGA 4] XVI, 1) pour les propriétés de base des morphismes universellement acycliques entre schémas. On laisse au lecteur le soin de les étendre aux morphismes entre espaces algébriques et aux 1-morphismes représentables entre S -champs algébriques. En particulier, il est facile de vérifier que :

- le composé de deux 1-morphismes représentables et universellement n -acycliques est encore universellement n -acyclique ;
- tout 1-morphisme déduit par changement de base d'un 1-morphisme représentable et universellement n -acyclique est aussi (représentable et) universellement n -acyclique ;
- pour un 1-morphisme représentable $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$, la propriété d'être universellement n -acyclique est locale pour la topologie lisse sur $\mathcal{X}$.

La propriété suivante des morphismes universellement acycliques est la clé des constructions de Bernstein et Lunts.

PROPOSITION (18.7.2). — *Soient $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un 1-morphisme représentable de S -champs algébriques et $[a, b] \subset \mathbb{Z}$ un intervalle. Supposons que F soit universellement $(b - a)$ -acyclique. Alors :*

(i) *le foncteur*

$$F^{-1} : D_{\text{cart}}^{[a, b]}(\mathcal{X}, \Lambda) \rightarrow D_{\text{cart}}^{[a, b]}(\mathcal{Y}, \Lambda)$$

est pleinement fidèle, et donc une équivalence de catégories de $D_{\text{cart}}^{[a,b]}(\mathcal{X}', \Lambda)$ sur son image essentielle, notée

$$D_{\text{cart}}^{[a,b]}(\mathcal{Y}|\mathcal{X}', \Lambda);$$

un quasi-inverse du foncteur F^{-1} est donné par la restriction du foncteur

$$\tau_{\leq b} \circ \text{RF}_* : D_{\text{cart}}^{[a,b]}(\mathcal{Y}, \Lambda) \rightarrow D_{\text{cart}}^{[a,b]}(\mathcal{X}', \Lambda)$$

à cette image essentielle;

(ii) un triangle de $D_{\text{cart}}^{[a,b]}(\mathcal{X}', \Lambda)$ est distingué si et seulement si son image par F^{-1} l'est dans $D_{\text{cart}}^{[a,b]}(\mathcal{Y}, \Lambda)$;

(iii) $D_{\text{cart}}^{[a,b]}(\mathcal{Y}|\mathcal{X}', \Lambda)$ est une sous-catégorie épaisse de $D_{\text{cart}}^{[a,b]}(\mathcal{Y}, \Lambda)$ et stable par facteur direct.

Preuve : Si $\mathcal{X}'$ et $\mathcal{Y}$ sont des schémas, ce n'est autre que la proposition de la section 1.9.2 de [Ber-Lu] et une démonstration en est donnée dans l'appendice A.2 au chapitre 1 de loc. cit.. Le cas général se démontre de manière similaire. $\square$

Fixons de plus une présentation $P : X \rightarrow \mathcal{X}'$ de $\mathcal{X}'$. Posons $Y = \mathcal{Y} \times_{F, \mathcal{X}', P} X$ et notons $Q : Y \rightarrow \mathcal{Y}$ et $f : Y \rightarrow X$ les deux projections canoniques, de sorte que l'on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ Q \downarrow & \square & \downarrow P \\ \mathcal{Y} & \xrightarrow{F} & \mathcal{X}'. \end{array}$$

Considérons alors la catégorie $D^{[a,b]}(F, P; \Lambda)$ des triplets

$$(K, L, \alpha)$$

où K est un objet de $D^{[a,b]}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, L est un objet de $D_{\text{cart}}^{[a,b]}(\mathcal{Y}, \Lambda)$ et α est un isomorphisme

$$\alpha : f^{-1}K \xrightarrow{\sim} L_{Y,Q}$$

dans $D^{[a,b]}(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$. Cette catégorie est munie d'une structure de catégorie triangulée induite par celles de $D^{[a,b]}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ et de $D_{\text{cart}}^{[a,b]}(\mathcal{Y}, \Lambda)$ (les foncteurs f^{-1} et $(-)_{Y,Q}$ sont exacts) et d'un foncteur exact

$$D_{\text{cart}}^{[a,b]}(\mathcal{X}', \Lambda) \rightarrow D^{[a,b]}(F, P; \Lambda)$$

qui envoie le complexe K sur le triplet

$$(K_{X,P}, F^{-1}K, \text{can})$$

où $\text{can} : f^{-1}(K_{X,P}) \xrightarrow{\sim} (F^{-1}K)_{Y,Q}$ est l'isomorphisme canonique.

COROLLAIRE (18.7.3). — Supposons de nouveau que F soit universellement $(b-a)$ -acyclique. Alors le foncteur

$$D_{\text{cart}}^{[a,b]}(\mathcal{X}', \Lambda) \rightarrow D^{[a,b]}(F, P; \Lambda)$$

ci-dessus est une équivalence de catégories triangulées, qui admet comme quasi-inverse le foncteur

$$(K, L, \alpha) \mapsto \tau_{\leq b} \text{RF}_* L.$$

Preuve : Cet énoncé est essentiellement démontré dans [Ber-Lu]. $\square$

Le cas particulier le plus utile de ce corollaire est le cas où $\mathcal{Y}$ est lui-même un S -espace algébrique. Dans ce cas $D^{[a,b]}(F, P; \Lambda)$ est équivalente à la catégorie des triplets

$$(K, L, \alpha)$$

où K est un objet de $D^{[a,b]}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, L est un objet de $D^{[a,b]}(\mathcal{Y}_{\text{ét}}, \Lambda)$ et α est un isomorphisme

$$\alpha : f^{-1}K \xrightarrow{\sim} Q^{-1}L$$

dans $D^{[a,b]}(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$. Par exemple, si la présentation $P : X \rightarrow \mathcal{X}'$ de $\mathcal{X}'$ est $(b-a)$ -acyclique, on peut prendre pour 1-morphisme F cette présentation P et la catégorie triangulée $D_{\text{cart}}^{[a,b]}(\mathcal{X}', \Lambda)$ est donc équivalente à la catégorie des triplets

$$(K_1, K_2, \alpha)$$

où K_1 et K_2 sont des objets de $D^{[a,b]}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ et α est un isomorphisme

$$\alpha : \text{pr}_1^{-1}K_1 \xrightarrow{\sim} \text{pr}_2^{-1}K_2$$

dans $D^{[a,b]}((X \times_{P, \mathcal{X}', P} X)_{\text{ét}}, \Lambda)$, où bien entendu $\text{pr}_1, \text{pr}_2 : X \times_{P, \mathcal{X}', P} X \rightarrow X$ sont les deux projections canoniques.

On laisse au lecteur le soin de formuler et de vérifier la variante évidente du corollaire, et de son cas particulier ci-dessus, où l'on impose de plus aux complexes d'être à cohomologie constructible.

DÉFINITION (18.7.4). — Nous dirons qu'un S -champ algébrique $\mathcal{X}'$ est faiblement de Bernstein-Lunts (relativement à Λ) si, pour tout entier $n \geq 0$, il admet une présentation $P : X \rightarrow \mathcal{X}'$ qui est universellement n -acyclique (relativement à Λ).

Nous dirons qu'un S -champ algébrique $\mathcal{X}'$ est de Bernstein-Lunts (relativement à Λ) si, pour tout entier $n \geq 0$, il admet une présentation de type fini $P : X \rightarrow \mathcal{X}'$ qui est universellement n -acyclique (relativement à Λ) et dont l'espace total X est séparé sur S .

LEMME (18.7.5). — Soient G un S -schéma en groupes et X un S -espace algébrique muni d'une action de G . On suppose que G est plat et localement

de présentation finie sur S , et qu'il existe un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur S (un $\mathcal{O}_S$ -Module localement libre de rang fini) tel que G soit isomorphe à un sous- S -schéma en groupes fermé du S -schéma $\text{Aut}_{\mathcal{E}/S}$ des automorphismes de $\mathcal{E}$.

Alors le S -champ quotient $[X/G]$ est faiblement de Bernstein-Lunts, et si de plus X est séparé sur S , $[X/G]$ est de Bernstein-Lunts.

Preuve : Voir ([Ber-Lu] 3.1). Fixons un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ comme dans l'énoncé. Pour chaque entier $n > 0$, considérons le S -schéma M_n des morphismes $\mathcal{O}_S$ -linéaires de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}^n$ (qui est un fibré vectoriel sur S) et son sous-schéma ouvert M_n° formé des morphismes de rang maximal (égal au rang de $\mathcal{E}$). Le S -schéma en groupes $\text{Aut}_{\mathcal{E}/S}$ (et donc aussi G) agit librement sur M_n° par composition à droite. Considérons alors l'action

$$(g, (m, x)) \mapsto (mg^{-1}, gx)$$

de G sur $M_n^\circ \times_S X$. Elle est encore libre, en ce sens que le morphisme diagonal

$$G \times_S (M_n^\circ \times_S X) \rightarrow (M_n^\circ \times_S X) \times_S (M_n^\circ \times_S X),$$

est un monomorphisme (c'est une immersion, et même une immersion fermée si X est séparé sur S). D'après (10.4) le quotient

$$X_n = M_n^\circ \times^G X := (M_n^\circ \times_S X)/G$$

est un S -espace algébrique, séparé sur S si X l'est. Notons

$$P_n : X_n \rightarrow [X/G] = \mathcal{X}$$

la projection canonique. Vérifions que P_n est une présentation de type fini et universellement n -acyclique de $\mathcal{X}$.

Par construction on a un diagramme à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} M_n^\circ & \longleftarrow & M_n^\circ \times_S X & \longrightarrow & X_n \\ \downarrow & \square & \downarrow & \square & \downarrow P_n \\ S & \longleftarrow & X & \longrightarrow & \mathcal{X}. \end{array}$$

Il suffit donc de vérifier que le morphisme canonique $M_n^\circ \rightarrow S$ est lisse, surjectif, de type fini et universellement n -acyclique. Or c'est le cas pour le morphisme canonique $M_n \rightarrow S$ puisque M_n est un fibré vectoriel sur S , et d'autre part le fermé complémentaire de M_n° dans M_n est de codimension $\geq \frac{n+2}{2}$ dans chaque fibre, ce qui entraîne que si $j : M_n^\circ \hookrightarrow M_n$ est l'inclusion et si $\mathcal{F}$ est un faisceau étale sur M_n provenant de S on a $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} j_* j^{-1} \mathcal{F}$ et $R^i j_* \mathcal{F} = (0)$ si $0 < i < n+2$ (cf. ([SGA 4 $\frac{1}{2}$] [Cycle], 2.2.8)). $\square$

Remarque (18.7.6) : Si G est un S -schéma en groupes fini localement libre et si $\mathcal{E}$ est le fibré vectoriel sous-jacent à la $\mathcal{O}_S$ -Algèbre affine de G , l'action

naturelle de G sur $\mathcal{E}$ définit un plongement de G comme sous- S -schéma en groupes fermé de $\text{Aut}_{\mathcal{E}/S}$. Il est donc raisonnable de penser que tous les S -champs de Deligne-Mumford séparés sont de Bernstein-Lunts.

(18.8) Si S est noethérien et séparé, on peut espérer établir un formalisme des «six opérations» à la Grothendieck pour les S -champs algébriques de type fini et de Bernstein-Lunts, et les 1-morphismes entre ceux-ci. Nous allons illustrer ce propos par quelques constructions inspirées de constructions de Bernstein et Lunts, et de Drinfel'd.

Tout d'abord, considérons un 1-morphisme $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}'$ représentable, séparé et de type fini, où $\mathcal{X}'$ est un S -champ algébrique de Bernstein-Lunts. Alors, $\mathcal{Y}$ est aussi un S -champ algébrique de Bernstein-Lunts et si, pour un entier $n \geq 0$, $P : X \rightarrow \mathcal{X}'$ est une présentation séparée, de type fini et universellement n -acyclique de $\mathcal{X}'$, la projection canonique $Q : Y = X \times_{P, \mathcal{X}', F} \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ en est une de $\mathcal{Y}$. Construisons un foncteur

$$(18.8.1) \quad Rf_! : D_c^b(\mathcal{Y}, \Lambda) \rightarrow D_c^b(\mathcal{X}', \Lambda)$$

qui coïncide avec le foncteur «image directe à supports propres» dans le cas où $\mathcal{X}'$, et donc aussi $\mathcal{Y}$, est un espace algébrique. Nous noterons d un majorant de la dimension des fibres géométriques de F et, pour chaque intervalle $[a, b] \subset \mathbb{Z}$ et chaque présentation $P : X \rightarrow \mathcal{X}'$ de $\mathcal{X}'$ qui est universellement $(b-a+2d)$ -acyclique et dont l'espace total X est séparé et de type fini sur S , nous nous contenterons de construire un foncteur

$$Rf_! : D_c^{[a, b]}(\mathcal{Y}, \Lambda) \rightarrow D_c^{[a, b+2d]}(\mathcal{X}', \Lambda)$$

qui dépend de $[a, b]$ et de P (nous laissons au lecteur le soin d'achever la construction de $Rf_!$). Soit donc L un objet de $D_c^{[a, b]}(\mathcal{Y}, \Lambda)$. D'après la variante constructible de (18.7.3), la donnée de L est équivalente à la donnée d'un triplet (L_1, L_2, β) où L_1 et L_2 sont des objets de $D_c^{[a, b]}(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ et où $\beta : \text{pr}_1^{-1} L_1 \xrightarrow{\sim} \text{pr}_2^{-1} L_2$ est un isomorphisme dans $D_c^{[a, b]}((Y \times_{Q, \mathcal{Y}, Q} Y)_{\text{ét}}, \Lambda)$. Les complexes $Rf_! L_1$ et $Rf_! L_2$ sont d'amplitude cohomologique contenue dans l'intervalle $[a, b+2d]$ (cf. ([SGA 4] XVII, 5.2.8.1)). On définit alors $Rf_! L$ comme l'objet de $D_c^{[a, b+2d]}(\mathcal{X}', \Lambda)$ qui correspond au triplet

$$(Rf_! L_1, Rf_! L_2, \alpha)$$

où $f : Y = X \times_{P, \mathcal{X}', F} \mathcal{Y} \rightarrow X$ est la projection canonique et où α est l'isomorphisme composé

$$\text{pr}_1^{-1} Rf_! L_1 \cong R(f \times_{\mathcal{X}'} f)_! \text{pr}_1^{-1} L_1 \xrightarrow{R(f \times_{\mathcal{X}'} f)_! \beta} R(f \times_{\mathcal{X}'} f)_! \text{pr}_2^{-1} L_2 \cong \text{pr}_2^{-1} Rf_! L_2$$

le premier et le troisième isomorphismes étant les isomorphismes de changement de base (cf. ([SGA 4] XVII, 5.2.6)).

Considérons un S -champ algébrique $\mathcal{X}'$ de type fini et de Bernstein-Lunts et son morphisme structural $A : \mathcal{X}' \rightarrow S$. Construisons un complexe

$$(18.8.2) \quad A^! \Lambda \in \text{ob } D_c^+(\mathcal{X}', \Lambda)$$

qui coïncide avec le complexe «image inverse extraordinaire du faisceau constant Λ » dans le cas où $\mathcal{X}'$ est un espace algébrique. Soit $d \in \mathbb{Z}$ un majorant de la dimension des fibres géométriques de A . Nous nous contenterons de construire pour chaque entier $n \geq 0$ et chaque présentation $P : X \rightarrow \mathcal{X}'$ qui est de type fini, universellement n -acyclique et dont l'espace total X est séparé sur S , un complexe

$$\tau_{\leq n-2d} A^! \Lambda \in \text{ob } D_c^{[-2d, n-2d]}(\mathcal{X}', \Lambda).$$

On peut évidemment supposer $\mathcal{X}'$ connexe (non vide), de sorte que toutes les fibres géométriques de P , qui sont automatiquement connexes puisque P est universellement 0-acyclique par hypothèse, sont de même dimension e . Notons $a = A \circ P : X \rightarrow S$ le morphisme structural et considérons le complexe

$$a^! \Lambda \in \text{ob } D_c^{[-2(d+e), +\infty]}(X, \Lambda)$$

(les dimensions des fibres géométriques de a sont majorées par $d+e$). Si $\mathcal{X}'$ était un espace algébrique, on aurait

$$a^! \Lambda = P^! A^! \Lambda = P^{-1} A^! \Lambda[2e](e)$$

puisque P est lisse purement de dimension relative e (cf. ([SGA 4] XVIII, 3.2.5)), et donc on aurait

$$\tau_{\leq n-2(d+e)} a^! \Lambda = P^{-1}(\tau_{\leq n-2d} A^! \Lambda)[2e](e).$$

Ceci suggère de définir $\tau_{\leq n-2d} A^! \Lambda$ comme le complexe de $D_c^{[-2d, n-2d]}(\mathcal{X}', \Lambda)$ qui correspond au triplet

$$(K_1, K_2, \alpha) \in D_c^{[-2d, n-2d]}(P, P; \Lambda)$$

où

$$K_1 = K_2 = (\tau_{\leq n-2(d+e)} a^! \Lambda)[-2e](-e)$$

et où

$$\alpha : \text{pr}_1^{-1} K_1 \cong \text{pr}_2^{-1} K_2$$

est, au décalage $[-4e]$ et à la torsion à la Tate $(-2e)$ près, le tronqué $\tau_{\leq n-2(d+2e)}$ de l'isomorphisme canonique

$$\text{pr}_1^! a^! \Lambda \cong \text{pr}_2^! a^! \Lambda.$$

Supposons de plus que S soit séparé, noethérien et régulier de dimension 0 ou 1 et pour simplifier que Λ soit un corps. Pour tout S -schéma de type fini Y , de morphisme structural $b : Y \rightarrow S$, le complexe $b^! \Lambda$ est borné et est, d'après Deligne (cf. ([SGA 4 $\frac{1}{2}$] [Th. Finitude], 4.3)), un complexe dualisant pour Y . En particulier, si l'on prend pour Y l'espace total d'une présentation

$Q : Y \rightarrow \mathcal{X}'$ de type fini de $\mathcal{X}'$, on voit que $A^! \Lambda$ est borné supérieurement, et donc borné, puisque

$$Q^{-1} A^! \Lambda = Q^! A^! \Lambda[-2f](-f) = b^! \Lambda[-2f](-f)$$

l'est (on a noté $f : Y \rightarrow \mathbb{Z}$ la fonction localement constante «dimension relative de Q »). Par suite, si l'on pose

$$K_{\mathcal{X}'} = A^! \Lambda$$

on peut former le foncteur

$$D_{\mathcal{X}'}(-) = R\mathcal{H}om(-, K_{\mathcal{X}'}): D_c^b(\mathcal{X}', \Lambda)^{\text{opp}} \rightarrow D_c^b(\mathcal{X}', \Lambda).$$

THÉOREME (18.8.3). — *Le morphisme canonique de foncteurs*

$$\text{Id} \rightarrow D_{\mathcal{X}'} \circ D_{\mathcal{X}'}$$

est un isomorphisme.

Preuve : Fixons un objet K de $D_c^b(\mathcal{X}', \Lambda)$. Il existe un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{Z}$ tel que les complexes $K_{\mathcal{X}'}$, K , $D_{\mathcal{X}'}(K)$ et $D_{\mathcal{X}'}(D_{\mathcal{X}'}(K))$ soient tous des objets de la sous-catégorie $D_c^{[a, b]}(\mathcal{X}', \Lambda)$ de $D_c^b(\mathcal{X}', \Lambda)$. Choisissons une présentation $P : X \rightarrow \mathcal{X}'$ de type fini, universellement $(b-a)$ -acyclique et telle que X soit séparé sur S . Alors, on a

$$P^{-1}(D_{\mathcal{X}'}(D_{\mathcal{X}'}(K))) \cong D_X(D_X(P^{-1}K))$$

et l'assertion à démontrer se ramène à l'énoncé de bidualité de Deligne (cf. ([SGA 4 $\frac{1}{2}$] [Th. Finitude], 4.3)). $\square$

Considérons toujours un $\mathcal{S}$ -champ algébrique $\mathcal{X}'$ de type fini et de Bernstein-Lunts, de morphisme structural $A : \mathcal{X}' \rightarrow S$. Construisons un foncteur

$$(18.8.4) \quad RA_! : D_c^b(\mathcal{X}', \Lambda) \rightarrow D_c^-(S, \Lambda)$$

qui coïncide avec le foncteur «image directe à supports propres» dans le cas où $\mathcal{X}'$ est un espace algébrique. Nous noterons $d \in \mathbb{Z}$ un majorant de la dimension des fibres géométriques de A . Nous nous contenterons de définir, pour chaque intervalle $[a, b] \subset \mathbb{Z}$, chaque entier $n \geq 0$, chaque présentation $P : X \rightarrow \mathcal{X}'$ qui est de type fini, universellement $(b-a+n)$ -acyclique et dont l'espace total est séparé sur S , et chaque objet K de $D_c^{[a, b]}(\mathcal{X}', \Lambda)$, le complexe

$$\tau_{\geq a+2d-n} RA_! K \in \text{ob } D_c^{[a+2d-n, b+2d]}(S, \Lambda).$$

On peut comme précédemment supposer $\mathcal{X}'$ connexe (non vide), de sorte que toutes les fibres géométriques de P sont de même dimension e . Notons $a = A \circ P : X \rightarrow S$ le morphisme structural de X . On dispose du foncteur

$$Ra_! : D_c^{[a,b]}(X, \Lambda) \rightarrow D_c^{[a,b+2(d+e)]}(S, \Lambda)$$

(cf. ([SGA 4] XVII, 5.2.8.1)). Supposons tout d'abord que $\mathcal{X}$ soit un espace algébrique. Dans ce cas, on a

$$Ra_! P^{-1}(-) = RA_! RP_! P^{-1}(-) = RA_!((-) \otimes_{\Lambda}^L RP_! \Lambda)$$

(cf. ([SGA 4] XVII, 5.2.9)). Mais P étant séparé, de type fini et universellement $(b-a+n)$ -acyclique, pour tout point géométrique ξ de $\mathcal{X}$, la fibre X_ξ de P en ξ est un espace algébrique séparé, de type fini et $(b-a+n)$ -acyclique de dimension e sur un corps algébriquement clos, de sorte que, par dualité de Poincaré (cf. ([SGA 4] XVIII, 3.2.5)), on a

$$R\Gamma_c(X_\xi, \Lambda) = R\mathrm{Hom}_\Lambda(R\Gamma(X_\xi, \Lambda), \Lambda)[-2e](-e)$$

et donc

$$H_c^i(X_\xi, \Lambda) = \begin{cases} (0) & \text{si } i = 2e - (b - a + n), \dots, 2e - 1, \\ \Lambda(-e) & \text{si } i = 2e. \end{cases}$$

Par suite, le morphisme canonique

$$\tau_{\geq 2e-(b-a+n)} RP_! \Lambda \rightarrow \Lambda[-2e](-e)$$

est un isomorphisme. D'autre part, comme

$$R^j A_! \mathcal{X}^k(K) = (0)$$

pour tous entiers $j \geq 2d+1$ et k , on déduit du triangle distingué

$$RA_!(\tau_{\leq a+2e-n-1} RP_! P^{-1} K) \rightarrow Ra_! P^{-1} K \rightarrow RA_!(\tau_{\geq a+2e-n} RP_! P^{-1} K) \rightarrow$$

un isomorphisme canonique

$$\tau_{\geq a+2(d+e)-n} Ra_! P^{-1} K \xrightarrow{\sim} \tau_{\geq a+2(d+e)-n} RA_!(\tau_{\geq a+2e-n} RP_! P^{-1} K).$$

Mais il est facile de vérifier que le morphisme canonique

$$RP_! \Lambda \rightarrow \tau_{\geq (a+2e-n)-b} RP_! \Lambda$$

induit un isomorphisme

$$\tau_{\geq a+2e-n}(K \otimes_{\Lambda}^L RP_! \Lambda) \xrightarrow{\sim} \tau_{\geq a+2e-n}(K \otimes_{\Lambda}^L \tau_{\geq (a+2e-n)-b} RP_! \Lambda),$$

et donc un isomorphisme

$$\tau_{\geq a+2e-n}(RP_! P^{-1} K) \xrightarrow{\sim} \tau_{\geq a+2e-n}(K[-2e](-e)) = K[-2e](-e).$$

Par suite, si $\mathcal{X}$ est un espace algébrique, on a un isomorphisme canonique

$$\tau_{\geq a+2(d+e)-n}(Ra_! P^{-1} K) \xrightarrow{\sim} (\tau_{\geq a+2d-n} RA_! K)[-2e](-e).$$

Ce résultat impose la définition suivante du complexe $\tau_{\geq a+2d-n} RA_! K$ pour un champ algébrique $\mathcal{X}$ arbitraire :

$$\tau_{\geq a+2d-n} RA_! K = (\tau_{\geq a+2(d+e)-n}(Ra_! P^{-1} K))[-2e](e).$$

19. Quelques prolongements

Nous n'avons pu inclure dans ce livre un certain nombre de prolongements de la théorie des champs algébriques. Dans ce chapitre nous aimerions cependant convaincre le lecteur de leur importance en énonçant quelques résultats parmi les plus significatifs et en renvoyant à leurs auteurs pour plus de détails et pour les démonstrations.

THÉORÈME (19.1) (Keel, Mori). — *Supposons que S soit localement noethérien et soit $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique de type fini.*

Si, pour tout $U \in \mathrm{ob}(\mathrm{Aff}/S)$ et tout $x \in \mathrm{ob} \mathcal{X}_U$, le U -espace algébrique en groupes $\mathcal{I}\mathrm{som}(x, x)$ est fini, il existe un S -espace algébrique de type fini X et un 1-morphisme de S -champs $\mathcal{X} \rightarrow X$ qui est universel pour les 1-morphismes de $\mathcal{X}$ vers les S -espaces algébriques. En outre, pour tout point géométrique $\bar{s} : \mathrm{Spec}(\bar{k}) \rightarrow S$, le 1-morphisme $\mathcal{X} \rightarrow X$ induit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de la catégorie $\mathcal{X}_{\mathrm{Spec}(\bar{k})}$ et l'ensemble des $\bar{k}$ -points de X au-dessus de $\bar{s}$.

Si, pour tout $U \in \mathrm{ob}(\mathrm{Aff}/S)$ et tous $x, y \in \mathrm{ob} \mathcal{X}_U$, le U -espace algébrique $\mathcal{I}\mathrm{som}(x, y)$ est fini (par exemple si $\mathcal{X}$ est un S -champ de Deligne-Mumford séparé), alors le S -espace algébrique X ci-dessus est séparé.

Preuve : Voir ([De-Ra] Ch. I, §8) et ([Ke-Mo] Corollary 1.3). $\square$

(19.2) La théorie de Mumford fournit d'autres exemples de champs algébriques qui admettent un 1-morphisme universel pour les 1-morphismes vers les S -espaces algébriques.

Si X est un schéma de type fini sur un corps k , muni d'une action d'un schéma en groupes réductif G sur k , et si L est un $\mathcal{C}_X$ -Module inversible G -linéarisé, Mumford (cf. [Mu-Fo]) définit deux ouverts

$$X^s(L) \subset X^{\mathrm{ss}}(L) \subset X$$

et montre que le k -champ quotient

$$\mathcal{Y} = [X^{\mathrm{ss}}(L)/G/k]$$

admet un 1-morphisme $q : \mathcal{Y} \rightarrow Y$ vers un k -schéma quasi-projectif Y qui, entre autres, est universel pour les 1-morphismes de $\mathcal{Y}$ vers les k -schémas (un «quotient catégorique» dans la terminologie de loc. cit.). Les

fibres géométriques de q contiennent en général plusieurs points, mais dont un seul est fermé. Mumford montre de plus que le sous-champ ouvert

$$\mathcal{Z} = [X^s(L)/G/k] \subset \mathcal{Y}$$

a pour image par q un ouvert V de Y et que la restriction $\mathcal{Z} \rightarrow V$ de q est universelle pour les 1-morphismes vers les k -schémas et induit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphie de points géométriques de $\mathcal{Z}$ sur l'ensemble des points géométriques de V (un «quotient géométrique» dans la terminologie de loc. cit.).

Si X est un k -schéma affine et $L = C_X$ avec sa linéarisation naturelle, on a $X^{ss}(L) = X$ et $X^s := X^s(L) \subset X$ est la réunion des ouverts affines $U \subset X$ qui sont G -stables et sur lesquels l'action de G est fermée.

Exemple (19.2.1) : Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{m,k}$ est le k -schéma affine des matrices $m \times m$, muni de l'action par conjugaison du k -schéma en groupes réductif $G = \mathrm{GL}_{m,k}$, le k -champ $\mathcal{Y} = [\mathfrak{g}/G/k]$ considéré en (11.17) admet comme quotient catégorique le schéma affine Y des polynômes unitaires de degré m dans $k[T]$ et le 1-morphisme q est induit par le k -morphisme «polynôme caractéristique» de $\mathfrak{g}$ sur Y . Chaque fibre géométrique de q est une réunion finie d'orbites dont une seule est fermée, à savoir l'unique orbite semi-simple ayant pour polynôme caractéristique le polynôme considéré. De plus, l'ouvert $\mathfrak{g}^s \subset \mathfrak{g}$ n'est autre que l'ouvert des éléments réguliers semi-simples (i.e. dont le polynôme caractéristique est séparable).

Exemple (19.2.2) : Si C est une courbe projective, lisse et géométriquement connexe sur un corps k et si $\mathcal{X}$ est le k -champ algébrique des fibrés vectoriels sur C , Seshadri a montré, à l'aide de la théorie de Mumford (cf. par exemple [Sc]), que l'ouvert $\mathcal{X}^{ss}$ de $\mathcal{X}$ formé des fibrés *semi-stables*, admet un 1-morphisme $p : \mathcal{X}^{ss} \rightarrow X^{ss}$ qui est universel pour les 1-morphismes vers les k -schémas. Le k -schéma X^{ss} est somme de k -schémas projectifs et les fibres de p sont les classes de S-équivalence (deux fibrés vectoriels semi-stables sont dits S-équivalents si leurs semi-simplifiés sont isomorphes). De plus, Seshadri a montré que l'image par p du sous-champ ouvert $\mathcal{X}^s \subset \mathcal{X}^{ss}$ des fibrés *stables* est un ouvert X^s de X^{ss} et que la restriction $\mathcal{X}^s \rightarrow X^s$ de p est universelle pour les 1-morphismes vers les k -schémas et induit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphie de points géométriques de $\mathcal{X}^s$ sur l'ensemble des points géométriques de X^s .

Question (19.2.3) : Pour un champ algébrique arbitraire, peut-on définir des notions de stabilité et de semi-stabilité qui incluraient les exemples précédents ?

(19.3) Soient X un schéma séparé et de type fini sur un corps fini $k = \mathbb{F}_q$ à q éléments, $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et ℓ un nombre premier distinct de

la caractéristique de k . La formule des traces de Grothendieck (cf. [Gr 4]) est l'égalité

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_q, H_c^n(\bar{k} \otimes_k X, \mathbb{Q}_\ell)) = |X(k)|$$

où Frob_q est l'endomorphisme de Frobenius *géométrique* (relativement à k), agissant par transport de structure sur la cohomologie ℓ -adique à supports propres. Si X est de plus *lisse sur k , purement de dimension d* , on a

$$H_c^n(\bar{k} \otimes_k X, \mathbb{Q}_\ell) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_\ell}(H^{2d-n}(\bar{k} \otimes_k X, \mathbb{Q}_\ell), \mathbb{Q}_\ell)$$

et la formule des traces peut se réécrire sous la forme suivante :

$$q^d \sum_{n \geq 0} (-1)^n \mathrm{Tr}(\Phi_q, H^n(\bar{k} \otimes_k X, \mathbb{Q}_\ell)) = |X(k)|$$

où Φ_q est l'endomorphisme de Frobenius *arithmétique* (relativement à k), agissant par transport de structure sur la cohomologie ℓ -adique. Cette dernière formule vaut encore si X est un k -espace algébrique lisse de type fini, purement de dimension d , arbitraire (en particulier, non nécessairement séparé, cf. [Be] 2.2.3).

La conjecture suivante est due à Behrend (cf. [Be]) :

CONJECTURE (19.3.1). — Soit $\mathcal{X}$ un champ algébrique de type fini et lisse, purement de dimension relative d , sur k . Alors

$$q^d \sum_{n \geq 0} (-1)^n \mathrm{Tr}(\Phi_q, H^n(\bar{k} \otimes_k \mathcal{X}, \mathbb{Q}_\ell)) = \sum_{\xi} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(\xi)|}$$

où ξ parcourt un système de représentants des classes d'isomorphie d'objets de la catégorie fibre $\mathcal{X}(k) := \mathcal{X}_{\mathrm{Spec}(k)}$ et où, pour chaque objet ξ de $\mathcal{X}(k)$, $\mathrm{Aut}(\xi)$ est le groupe des automorphismes de ξ (qui est automatiquement fini, car c'est le groupe des k -points du k -schéma en groupes de type fini, $\mathrm{Aut}(\xi)$).

Exemple (19.3.2) : Considérons le champ classifiant $\mathcal{X} = \mathrm{B}(\mathbb{G}_{m,k}/k)$. Sa cohomologie ℓ -adique est donnée par (cf. [De 1] Preuve du théorème (9.1.1))

$$H^n(\bar{k} \otimes_k \mathcal{X}, \mathbb{Q}_\ell) = \begin{cases} \mathbb{Q}_\ell(-\frac{n}{2}) & \text{si } n \in 2\mathbb{N}, \\ (0) & \text{sinon,} \end{cases}$$

de sorte que le premier membre de la formule des traces est égal à la série géométrique

$$q^{-1} \sum_{m \geq 0} q^{-m}.$$

Dans la catégorie $\mathcal{X}(k)$, il n'y a qu'une seule classe d'isomorphie d'objets, à savoir celle du torseur trivial, et le groupe des automorphismes de cet objet est k^* , de sorte que le second membre de la formule des traces est égal à

$$\frac{1}{q-1}.$$

Si l'on somme formellement, ou dans $\mathbb{C}$, la série géométrique ci-dessus on trouve bien l'égalité

$$q^{-1} \sum_{m \geq 0} q^{-m} = \frac{1}{q-1}$$

voulue.

Remarques (19.3.3) : (i) La cohomologie ℓ -adique est obtenue par passage à la limite projective

$$H^n(\bar{k} \otimes_k \mathcal{X}, \mathbb{Q}_\ell) = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \left(\varprojlim_{m \geq 1} H^n(\bar{k} \otimes_k \mathcal{X}, \mathbb{Z}/\ell^m \mathbb{Z}) \right).$$

(ii) La convergence du premier membre pose problème et fait partie de l'énoncé de la conjecture. Elle peut se comprendre soit comme une convergence formelle, soit comme une convergence dans $\mathbb{C}$ après avoir choisi un plongement de $\mathbb{Q}_\ell$ dans $\mathbb{C}$.

THÉOREME (19.3.4) (Behrend). — *La conjecture (19.3.1) est vérifiée dans les deux cas suivants :*

- (i) $\mathcal{X} = [X/G]$ où X est un espace algébrique séparé, lisse et de type fini sur k , muni d'une action d'un k -schéma en groupes affine et lisse sur k ;
- (ii) $\mathcal{X}$ est un champ de Deligne-Mumford.

(19.4) Gillet (cf. [Gi]) et Vistoli (cf. [Vi]) ont défini les groupes de Chow d'un champ de Deligne-Mumford de type fini sur un corps. Toen (cf. [To]) a établi un théorème de Riemann-Roch pour de tels champs. Edidin et Graham (cf. [Ed-Gr]) ont développé une théorie d'intersection équivariante pour les actions de groupes algébriques sur les schémas.

(19.5) Simpson propose dans [Si] une notion de n -champ algébrique (ou « géométrie ») de type fini sur un corps, en supposant que l'on dispose d'une bonne notion de n -catégorie.

A. Appendice : compléments sur les espaces algébriques

On rappelle qu'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ d'espaces algébriques est dit :

- *séparé* si le morphisme diagonal $\Delta_{X/Y} : X \rightarrow X \times_Y X$ est une immersion fermée ;
- *propre* s'il est séparé, de type fini et universellement fermé ;
- *fini* s'il est affine et si, pour tout Y -schéma Y' , le morphisme (de schémas) $f' : X' \rightarrow Y'$ déduit de f par changement de base est fini ; ou, de façon équivalente, si X est Y -isomorphe au spectre d'une $\mathcal{C}_Y$ -Algèbre quasi-cohérente et finie ;
- *quasi-fini* s'il est de type fini et localement quasi-fini (cette dernière notion, étant locale à la source, se déduit du cas des schémas) ;
- *de Stein* s'il est quasi-compact et séparé et si $\mathcal{C}_Y \xrightarrow{\sim} f_* \mathcal{C}_X$ par le morphisme naturel.

LEMME (A.1). — *Soient $\pi : Z \rightarrow Y$ et $f : Y \rightarrow X$ deux morphismes d'espaces algébriques. On suppose que f est séparé, que $f \circ \pi$ est fini, et que π est étale, surjectif et de présentation finie. Alors f est fini (et en particulier affine).*

Preuve : La question étant locale sur X , nous supposons X (et donc Z) affine. On sait (cf. [Kn] II, 1.3) que Y , vu comme faisceau sur (Sch/X) (ou sur (Aff/S)), s'identifie au quotient de Z par la relation d'équivalence $Z \times_Y Z$ (vue comme sous-schéma de $Z \times_X Z$). Or cette relation est étale et de plus finie car $Z \times_Y Z$ s'identifie à un fermé de $Z \times_X Z$ lequel est fini sur Z . Donc la relation d'équivalence $Z \times_Y Z$ est *finie localement libre* de sorte que d'après ([SGA 3] V, 4.1), Y est un X -schéma *affine* et π est fini localement libre. Posons $X = \text{Spec}(A)$, $Y = \text{Spec}(B)$, $Z = \text{Spec}(C)$, de sorte que C est un B -module localement libre de type fini et partout de rang > 0 , et un A -module de type fini. Il est facile de voir que f est fini dans le cas où C est *libre* sur B : en effet, B est alors isomorphe à un A -module quotient de C . Pour se ramener à ce cas, on peut supposer que le rang de C sur B est constant (quitte à décomposer Y en somme de sous-schémas), et de plus on remarque que f est, comme $\pi \circ f$, à *fibres finies*, de sorte que si $\mathfrak{p} \in X$, l'anneau $B_{\mathfrak{p}} = B \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$ est semi-local et que $C_{\mathfrak{p}}$ est libre sur $B_{\mathfrak{p}}$. On en déduit qu'il existe $s \in A - \mathfrak{p}$ tel que $C[s^{-1}]$ soit libre sur $B[s^{-1}]$, d'où la conclusion puisque la question est encore locale sur X . $\square$

Le théorème suivant généralise ([EGA] IV, 18.12.12) et ([Kn] II, 6.15) qui traitent respectivement le cas des schémas et celui des morphismes de présentation finie :

THÉOREME (A.2). — *Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme d'espaces algébriques. On suppose que f est séparé et quasi-fini. Alors f est quasi-affine.*

En particulier, tout morphisme séparé et localement quasi-fini d'espaces algébriques est schématique.

Preuve : la question étant locale sur X , nous pouvons supposer X affine; d'autre part nous pouvons le remplacer par $\text{Spec}(f_*\mathcal{O}_Y)$ ce qui nous ramène au cas où f est de Stein.

Comme f est quasi-fini, il existe un X -schéma Z , que l'on peut supposer affine, et un morphisme étale, séparé et surjectif $\pi : Z \rightarrow Y$ tel que le composé $f \circ \pi : Z \rightarrow X$ soit quasi-fini. Soit x un point de X . D'après ([EGA] IV, 18.12.3), on peut supposer, après passage à un voisinage étale de x , qu'il existe une décomposition de Z en somme de deux sous-schémas Z_1 et Z_2 tels que Z_1 soit fini sur X et que la fibre de Z_2 au dessus de x soit vide. Comme π est étale donc ouvert, $\pi(Z_1) := Y_1$ est un sous-espace ouvert de Y , et il est aussi fermé car Y est séparé et Z_1 fini, donc propre, sur X . On a donc une décomposition de Y en somme de deux sous-espaces Y_1 et Y_2 , qui correspond à une décomposition de $f_*\mathcal{O}_Y$ en produit de deux $\mathcal{O}_X$ -Algèbres. Comme f est de Stein, on en déduit une décomposition de X en somme de deux sous-schémas X_1 et X_2 avec $f(Y_i) \subset X_i$ et $x \in X_1$. Quitte à restreindre X nous pouvons donc supposer que $Y = Y_1$ qui d'après (A.1) est fini sur X , *qfd*.

La dernière assertion de l'énoncé s'en déduit en remarquant que tout espace algébrique est réunion filtrante d'ouverts quasi-compacts. $\square$

Ce théorème a de nombreuses conséquences utiles, voir ([EGA] IV, §18.12) dans le cas des schémas. Citons celles-ci :

COROLLAIRE (A.2.1). — *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme séparé et quasi-fini d'espaces algébriques. Pour que f soit fini, il faut et il suffit qu'il soit propre (i.e. universellement fermé, puisqu'il est de type fini et séparé).*

Preuve : La question étant locale sur Y , on peut supposer que Y est un schéma: dans ce cas, d'après (A.2), X est aussi un schéma, et l'on invoque ([EGA] IV, 18.12.4). $\square$

COROLLAIRE (A.2.2). — *Soit $f : X \rightarrow Y$ un monomorphisme de type fini d'espaces algébriques. Alors :*

- (a) *f est quasi-affine;*
- (b) *pour que f soit propre (i.e. universellement fermé), il faut et il suffit qu'il soit une immersion fermée.*

Preuve : (a) est un cas particulier de (A.2); pour (b), on se ramène au cas des schémas comme dans la preuve de (A.2.1), et l'on invoque ([EGA] IV, 18.12.6) (ou bien l'on déduit le résultat directement de (A.2.1)). $\square$

PROPOSITION (A.3) (critère valuatif de séparation). — *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces algébriques. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *f est séparé;*
- (ii) *le morphisme diagonal $\Delta_{X/Y} : X \times_Y X$ est propre;*
- (iii) *pour tout anneau de valuation Λ , de corps des fractions K , l'application naturelle $X(\Lambda) \rightarrow X(K) \times_{Y(K)} Y(\Lambda)$ est injective.*

De plus, on peut se limiter dans (iii) aux anneaux de valuation complets à corps résiduel algébriquement clos et même, si Y est localement noethérien et f de type fini, aux anneaux de valuation discrète complets à corps résiduel algébriquement clos.

Preuve : L'équivalence de (i) et (ii) résulte des définitions et de ([EGA] IV, 18.12.6) (on n'a pas besoin de (A.2.2) ici puisque $\Delta_{X/Y}$ est représentable au sens des schémas); celle de (ii) et (iii), de même que les compléments donnés à la fin de l'énoncé, est conséquence immédiate du critère valuatif de propriété pour les morphismes de schémas de ([EGA] II, 7.3.8). $\square$

THÉOREME (A.4). — *Soit X un S -espace algébrique. Alors X est un faisceau pour la topologie fpqc sur (Aff/S) (et a fortiori un faisceau fppf).*

Preuve : Il s'agit de voir que pour tout morphisme fidèlement plat $U' \rightarrow U$ dans (Aff/S) , la suite naturelle d'ensembles

$$\text{Hom}(U, X) \longrightarrow \text{Hom}(U', X) \rightrightarrows \text{Hom}(U' \times_U U', X)$$

est exacte. L'injectivité résulte aisément du fait que le morphisme diagonal de X dans $X \times_S X$ est un monomorphisme schématique et du théorème de descente fpqc pour les morphismes de schémas (en d'autres termes, X est déjà un préfaisceau séparé pour la topologie fpqc).

Remarquons ensuite que dans la suite ci-dessus, U , U' et $U' \times_U U'$ sont quasi-compacts et que X est réunion d'ouverts quasi-compacts de sorte que nous pouvons supposer que X est quasi-compact. Choisissons alors un schéma affine X_0 et un morphisme $\pi : X_0 \rightarrow X$, étale et surjectif. Notons que π est automatiquement séparé et quasi-fini donc quasi-affine d'après (A.2).

Introduisons enfin le faisceau fpqc $\overline{X}$ associé à X , et notons $q : X \rightarrow \overline{X}$ le morphisme canonique, vu comme morphisme dans $(\text{Es}/S)_{\text{ét}}$. Le fait que X soit séparé pour la topologie fpqc signifie que q est un monomorphisme, et il reste à voir que c'est un épimorphisme. Il suffit pour cela de voir que $q \circ \pi : X_0 \rightarrow \overline{X}$ est un épimorphisme, ce qui sera certainement le cas si nous montrons qu'il est schématique, quasi-affine, étale et surjectif; noter que π possède ces propriétés.

Soient donc $U \in \text{ob}(\text{Aff}/S)$ et $x \in \overline{X}(U)$. Il s'agit de voir que $U \times_{x, \overline{X}, q \circ \pi} X_0$ (qui a priori est seulement un faisceau fpqc) est un U -schéma quasi-affine, étale et surjectif sur U . Mais cette question est locale sur U au sens fpqc (descente de schémas quasi-affines, ([SGA 1] VIII, 7.9) de sorte que nous pouvons remplacer U par un U -schéma affine U' fidèlement plat sur U . En particulier nous pouvons supposer, par construction du faisceau associé à un préfaisceau, que $x \in X(U)$ se relève en $x' \in \overline{X}(U)$. Dans ce cas, comme q est un monomorphisme on a $U \times_{x, \overline{X}, q \circ \pi} X_0 = U \times_{x, X, \pi} X_0$ et la conclusion résulte des propriétés de π . $\square$

Bibliographie

- [An] S. ANANTHARAMAN. — *Schémas en groupes, espaces homogènes, et espaces algébriques sur une base de dimension 1*. Bull. Soc. Math. France, Mémoire **33** (1973) pp. 5-79.
- [Ar 1] M. ARTIN. — *The implicit function theorem in algebraic geometry*. International Col. on Algebraic Geometry at Bombay (1968), Oxford University Press (1969) pp. 13-34.
- [Ar 2] M. ARTIN. — *Algebraization of formal moduli I*. Global analysis (papers in honor of K. Kodaira), university Tokyo Press (1969) pp. 21-71. *Algebraization of formal moduli II*. Existence of modifications. Ann. of Math. **91** (1970) pp. 88-135.
- [Ar 3] M. ARTIN. — *Algebraic Spaces*. Yale Mathematical Monographs **3**, Yale University Press (1971).
- [Ar 4] M. ARTIN. — *Construction techniques for algebraic spaces*. Actes du congrès international des Mathématiciens (Nice. 1970), tome 1, Gauthier-Villars (1971) pp. 419-423.
- [Ar 5] M. ARTIN (en collaboration avec A. LASCU et J.-F. BOUTOT). — *Théorèmes de représentabilité pour les espaces algébriques*. Les Presses de l'Université de Montréal (1973).
- [Ar 6] M. ARTIN. — *Versal deformations and algebraic stacks*. Inv. Math. **27** (1974) pp. 65-189.
- [Be] K.A. BEHREND. — *The Lefschetz trace formula for algebraic stacks*. Inv. Math. **112** (1993) pp. 127-149.
- [Ben] B. BENABOU. — *Introduction to bicategories*. Report of the Midwest Category Seminar I, Lecture Notes in Math. **47**, Springer-Verlag (1967) pp. 1-77.
- [Ber-Lu] J. BERNSTEIN et V. LUNTS. — *Equivariant Sheaves and Functors*. Lecture Notes in Math. **1578**, Springer-Verlag (1991).
- [Bou] N. BOURBAKI. — *Commutative algebra. Elements of Mathematics*. Hermann (1972).
- [De 1] P. DELIGNE. — *Théorie de Hodge, III*. Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. **44** (1974) pp. 5-78.
- [De 2] P. DELIGNE. — *Catégories tannakiennes*. The Grothendieck Festschrift II, Progress in Math. **87**, Birkhäuser (1990) pp. 111-195.
- [De-Mu] P. DELIGNE et D. MUMFORD. — *The irreducibility of the space of curves of given genus*. Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. **36** (1969) pp. 75-110.
- [De-Ra] P. DELIGNE et M. RAPOPORT. — *Les schémas de modules de courbes elliptiques*. Modular Functions of One Variable II, Lecture Notes in Mathematics **349**, Springer-Verlag (1973) pp. 143-316.
- [Ed-Gr] D. EDIDIN et W. GRAHAM. — *Equivariant intersection theory*. Inv. Math. **131** (1998) pp. 595-634.

- [Gi] H. GILLET. — *Intersection theory on algebraic stacks and Q -varieties*. J. Pure Appl. Algebra **34** (1984) pp. 193-240.
- [Gir 1] J. GIRAUD. — *Cohomologie non abélienne*. Columbia University (1966).
- [Gir 2] J. GIRAUD. — *Cohomologie non abélienne*. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band **179**, Springer-Verlag (1971).
- [Gr 1] A. GROTHENDIECK. — *Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique : I. Généralités. Descente par morphismes fidèlement plats*. Séminaire Bourbaki 190 (décembre 1959); *II. Le théorème d'existence en théorie formelle des modules*. Séminaire Bourbaki 195 (février 1960); *III. Préschémas quotients*. Séminaire Bourbaki 212 (février 1961); *IV. Les schémas de Hilbert*. Séminaire Bourbaki 221 (mai 1961); *V. Les schémas de Picard : théorèmes d'existence*. Séminaire Bourbaki 232 (février 1962); *VI. Les schémas de Picard : propriétés générales*. Séminaire Bourbaki 236 (mai 1962) W.A. Benjamin, INC (1966).
- [Gr 2] A. GROTHENDIECK. — *Géométrie formelle et géométrie algébrique*. Séminaire Bourbaki 182 (mai 1959), W.A. Benjamin, INC (1966) pp. 01-28.
- [Gr 3] A. GROTHENDIECK. — *Le groupe de Brauer III : Exemples et compléments*. exposé VI de Dix exposés sur la cohomologie des schémas, Masson-North Holland (1968) pp. 88-188.
- [Gr 4] A. GROTHENDIECK. — *Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L*. exposé III de Dix exposés sur la cohomologie des schémas, Masson-North Holland (1968) pp. 31-45.
- [Ha] M. HAKIM. — *Topos annelés et schémas relatifs*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **64**, Springer-Verlag (1972).
- [Har] R. HARTSHORNE. — *Residues and duality*. Lecture Notes in Math. **20**, Springer-Verlag (1966).
- [Il] L. ILLUSIE. — *Complexes cotangent et déformations I et II*. Lecture Notes in Math. **239** et **283**. Springer-Verlag (1971) et (1972).
- [Ke-Mo] S. KEEL et S. MORI. — *Quotients by groupoids*. Ann. of Math. **145** (1997) pp. 193-213.
- [Kn] D. KNOTSON. — *Algebraic spaces*. Lecture Notes in Math. **203**, Springer-Verlag (1971).
- [MB] L. MORET-BAILLY. — *Pinces de variétés abéliennes*. Astérisque **129** (1985).
- [Mo] B. MOISEZON. — *The algebraic analog of compact complex spaces with a sufficiently large field of meromorphic functions I, II, III*. Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **33** (1969) pp. 174-238, 323-367, 506-548.
- [Mu] D. MUMFORD. — *Picard groups of moduli problems*. Proc. Conf. on Arith. Alg. Geom. at Purdue, Harper and Row (1963) pp. 33-81.
- [Mu-Fo] D. MUMFORD et J. FOGARTY. — *Geometric Invariant Theory*. Second enlarged edition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **34**, Springer-Verlag (1982).
- [Mur] J.-P. MURRE. — *Representation of unramified functors. Applications*. Séminaire Bourbaki 294 (mai 1965), W.A. Benjamin, INC (1966) pp. 01-19.
- [Ra 1] M. RAYNAUD. — *Passage au quotient par une relation d'équivalence plate*. Proc. Conf. on Local Fields at Driebergen (1966), Springer-Verlag (1967) pp. 78-85.

- [Ra 2] M. RAYNAUD. — *Sur le passage au quotient par un groupoïde plat*. Comptes Rendus de l'Acad. Sci. Paris Sér. A-B **265** (1967) pp. A385-A387.
- [Ra 3] M. RAYNAUD. — *Anneaux Locaux Henséliens*. Lecture Notes in Math. **169**, Springer-Verlag (1970).
- [Sa] N. SAAVEDRA RIVANO. — *Catégories tannakiennes*. Lecture Notes in Math. **265**, Springer-Verlag (1972).
- [Sch] M. SCHLESSINGER. — *Functors of Artin rings*. Trans. A.M.S. **130** (1968) pp. 208-222.
- [Se] C.S. SESHADRI. — *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques (rédigé par J.-M. Drezet)*. Astérisque **96**, Société Mathématique de France (1982).
- [Si] C. SIMPSON. — *Algebraic (geometric) n -stacks*, alg-geom/960914.
- [Th] R. W. THOMASON. — *Comparison of Equivariant Algebraic and Topological K -Theory*. Duke Math. J. **53** (1986) pp. 795-825.
- [To] B. TOEN. — *Théorèmes de Riemann-Roch pour les Champs de Deligne-Mumford*, math.AG/9803096.
- [Vi] A. VISTOLI. — *Intersection Theory on algebraic stacks and on their moduli spaces*. Inv. Math. **97** (1989) pp. 613-670.
- [EGA] A. GROTHENDIECK, rédigés avec la collaboration de J. DIEUDONNÉ. — *Eléments de géométrie algébrique*. Springer-Verlag (1971) et Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. **8**, **11** (1961), **17** (1963), **20** (1964), **24** (1965), **28** (1966), **32** (1967).

Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie :

- [SGA 1] A. GROTHENDIECK. — *Revêtements Étales et Groupe Fondamental*. Lecture Notes in Math. **224**, Springer-Verlag (1971).
- [SGA 3] M. DEMAZURE et A. GROTHENDIECK. — *Schémas en Groupes*. Lecture Notes in Math. **151**, **152**, **153**, Springer-Verlag (1970).
- [SGA 4] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK et J.-L. VERDIER. — *Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas*. Lecture Notes in Math. **269**, **270** et **305**, Springer-Verlag (1971).
- [SGA 4½] P. DELIGNE. — *Cohomologie Étale*. Lecture Notes in Math. **569**, Springer-Verlag (1977).
- [SGA 6] P. BERTHELOT, A. GROTHENDIECK, L. ILLUSIE. — *Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch*. Lecture Notes in Math. **225**, Springer-Verlag (1971).
- [SGA 7 I] A. GROTHENDIECK. — *Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique*. Lecture Notes in Math. **288**, Springer-Verlag (1972).
- [SGA 7 II] P. DELIGNE et N. KATZ. — *Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique*. Lecture Notes in Math. **340**, Springer-Verlag (1973).

Index terminologique

- algébrique
 - construction locale - 134 (14.1.6)
 - point - 93 (11.2)
 - S -champ(s) algébrique(s) 25 (4.1)
 - 2-catégorie des - 25 (4.1)
 - annelé(s) *voir* « annelé(s) »
 - connexe 31 (4.8)
 - critères d'Artin 81 (10.1), 89 (10.11)
 - de Bernstein-Lunts 187 (18.7.4)
 - dimension d'un - 98-99
 - faiblement de Bernstein-Lunts 187 (18.7.4)
 - faisceau structural d'un - 112 (12.7.1)
 - irréductible 32 (4.11)
 - noethérien 31 (4.7.2)
 - point d'un - 39 (5.2)
 - possédant une propriété P 31 (4.7.1)
 - présentation d'un - 25 (4.1)
 - quasi-compact 31 (4.7.2)
 - séparé 66 (7.6)
 - site (topos) lisse-étale d'un - *voir* « lisse-étale »
- annelé(s)
 - S -champ(s) algébrique(s) annelé(s) 112 (12.7.2)
 - Module cartésien sur un - 112 (12.7.3)
 - morphisme de - 114 (12.9)
- Artin
 - critères d' - 81 (10.1)
 - théorème d'algébrisation d' - 88 (10.10)
- Bernstein-Lunts (S -champ algébrique [faiblement] de -) 187 (18.7.4)
- cartésien
 - faisceau étale simplicial - 106 (12.4.2)
 - faisceau lisse-étale - 104 (12.3)
 - image directe d'un 178 (18.2.2)
 - Module simplicial (sur un S -espace algébrique simplicial annelé) 113 (12.8.1)
 - Module - sur un S -champ algébrique annelé 112 (12.7.3)
- catégorie de Picard 139 (14.4)
- champ
 - 1-morphisme de S -champs *voir* « morphisme »
 - 2-catégorie des S -champs 15
 - épimorphisme de S -champs 18 (3.6)
 - isomorphisme de S -champs 15
 - monomorphisme de S -champs 15
 - S -champ 15 (3.1)
 - algébrique *voir* « algébrique »
 - associé à un S -espace en groupoïdes 17 (3.4.3), 26-27 (4.3.1)
 - associé à un S -préchamp 16 (3.2)
 - de Deligne-Mumford *voir* « Deligne-Mumford (S -champ de -) »
 - de Picard *voir* « Picard »
 - fppf 77-78 (9.3), 81 (10.1), 86 (10.7)
 - fpqc 77-78 (9.3), 86 (10.7)
 - représentable 20 (3.9)
 - représentation d'un - 127 (13.3.3)
 - sous- S -champ 18 (3.5)
 - fermé 22 (3.14), 136 (14.2.7)
 - localement fermé 22 (3.14)
 - ouvert 22 (3.14)
 - tangent *voir* « tangent (S -champ -) »
 - TOP 77-78 (9.3)
- Chow (lemme de - pour les champs de Deligne-Mumford) 154 (16.6.1)
- cohérent (Module -) 145 (15.1)

complexe cotangent
 - d'un 1-morphisme de S -champs algébriques 159 (17.3)
 - tronqué ≥ 0 165 (17.7)
 - d'un morphisme d'espaces algébriques 158 (17.2)
 - d'un morphisme de topos annelés 157 (17.1)
 - d'un S -champ de Deligne-Mumford 167 (17.9.2)
 composantes irréductibles 32 (4.12)
 constructible
 - ensemble dans un S -champ algébrique 45 46 (5.9)
 - faisceau
 - sur un espace algébrique 176 (18.1.5)
 - sur un S -champ algébrique 176 (18.1.4), 176 (18.1.7)
 - images directes à supports propres
 - - cas d'un champ de Bernstein-Lunts 191-192
 - - cas d'un morphisme représentable 189 (18.8)
 images directes supérieures 180 (18.3.1)
 - par un morphisme propre 183 (18.5.1)
 images inverses extraordinaires 190
 - sur un schéma 175 (18.1.1)
 construction locale 133 (14.1.2)
 - algébrique 134 (14.1.6)
 critère valuatif
 de séparation 67 (7.8)
 de séparation, cas des espaces algébriques 199 (A.3)
 de spécialisation 61 (7.2.3)
 - pour les morphismes universellement fermés 62 (7.3); 69 (7.10); 71 (7.12)
 - cas représentable et séparé 64 65 (7.5)
 cycles proches 181 (18.4.1)
 Deligne-Mumford (S -champ de) 25 (4.1); 73 (8.1)
 - complexe cotangent 167 (17.9.2)
 - lemme de Chow 154 (16.6.1)
 - site (topos) étale d'un - voir «étale»
 - structure globale 153 154 (16.6)
 - structure locale 48 (6.2)
 descente cohomologique 130-131
 dimension
 - d'un morphisme de schémas en un point 97 (11.9)
 - d'un S -champ algébrique 98-99
 épimorphisme
 - de S -champs 18 (3.6)
 équiconnex 50 (6.4); 55 (6.9)
 équiréparti 56 (6.10)
 espace
 - S -espace 1
 - S -espace en groupoïdes 11 (2.4.3)
 - S -espace grossier 23 24 (3.19)
 - S -espace(s) algébrique(s) 1-2 (1.1)
 - descente fppf de - 85-86 (10.4.2)
 étale
 - faisceau - simplicial 105-106 (12.4)
 - faisceau - sur un S -champ de Deligne-Mumford 101 (12.1)
 - site (topos) - d'un espace algébrique simplicial 105-106 (12.4)
 - site - d'un S -champ de Deligne-Mumford 101 (12.1)
 - topos - d'un S -champ de Deligne-Mumford 101 (12.1)
 factorisation de Stein 137 (14.2.8)
 faisceau
 - constructible voir «constructible»
 - de cycles proches 181 (18.4.1)
 - étale simplicial 105-106 (12.4)
 - localement constant voir «localement constant (faisceau -)»
 - S -faisceau
 - étale 77-78 (9.3)
 - fppf 77-78 (9.3); 199 (A.4)
 - fpqc 77 78 (9.3); 199 (A.4)
 - résiduel 93 (11.1)
 - TOP 77 78 (9.3)
 - structural d'un S -champ algébrique 112 (12.7.1)
 fermé complémentaire 32 (4.10)
 générisation 40 (5.5)
 gerbe 22 (3.15)
 - neutre 24 (3.20)
 - résiduelle 93 (11.1)
 groupoïde
 - 2-catégorie des S -groupoïdes 8 (2.2)
 - S -espace en groupoïdes 11-12 (2.4.3)
 - S -groupoïde 7 (2.1)
 hensélisé strict 49 (6.2.1)

isomorphisme
 - de S -champs 15
 - de S -groupoïdes 8 (2.2)
 laxisme 10 (2.4.1.2)
 lisse-étale
 - faisceau - sur un S -champ algébrique 101 (12.1)
 - cartésien 104 (12.3)
 - site - d'un S -champ algébrique 101 (12.1)
 - topos - d'un S -champ algébrique 101 (12.1)
 - Anneau du - 111 (12.7)
 - fonctorialités 108-111 (12.5; 12.6)
 localement constant (faisceau -)
 - sur un espace algébrique 176 (18.1.5)
 - sur un S -champ algébrique 176 (18.1.4)
 - sur un schéma 175 (18.1.1)
 monomorphisme
 - de S -champs 15
 - de S -champs algébriques 73 (8.1.3)
 - de S -groupoïdes 8 (2.2)
 morphisme
 - 1-morphisme de S -champs
 - représentable 20 (3.9); 86 (10.5)
 - représentable et possédant une propriété P 21 (3.10.1)
 - schématique 20 (3.9)
 - 1-morphisme de S -champs algébriques
 - complexe cotangent d'un - voir «complexe cotangent»
 - de descente cohomologique [effective] 130-131
 - de présentation finie 35-36 (4.16)
 - de type fini 35-36 (4.16)
 - dominant 40 (5.5)
 - équiconnex 50 (6.4); 55 (6.9)
 - fermé 40 (5.5); 44 (5.7.3)
 - générisant 40 (5.5); 43 (5.7.1); 44 (5.8)
 - ouvert 40 (5.5); 43 (5.7.1)
 - possédant une propriété P 33 (4.14)
 - projectif 138 (14.3.4)
 - propre 71 (7.11)
 - quasi-compact 35-36 (4.16); 42 (5.6.3)
 - quasi-projectif 138 (14.3.4)
 - relativement de Deligne-Mumford 63 (7.3.3)
 - séparé 66 (7.6)
 - critère valuatif 67 (7.8)
 - universellement fermé 40 (5.5); 42 (5.6.4)
 - critère valuatif 62 (7.3); 69 (7.10); 71 (7.12)
 - critère valuatif, cas représentable et séparé 64-65 (7.5)
 - universellement générisant 33 (4.14); 44 (5.8)
 - universellement n -acyclique 185 (18.7.1)
 - universellement ouvert 33 (4.14); 40-41 (5.6)
 - d'espaces algébriques
 - de Stein 197
 - fini 197
 - propre 197
 - quasi-fini 197
 - séparé 197
 - critère valuatif 199 (A.3)
 - de S -champs algébriques annelés 114 (12.9)
 orbite 93-94 (11.2.1; 11.2.2)
 Picard
 - catégorie de - 139 (14.4)
 - S -champ de 140 (14.4.2)
 - associé à un complexe de longueur 1 141-142 (14.4.3 14.4.8); 143 (14.5.2)
 - relatif 143 (14.5.1; 14.5.2)
 plat
 - Anneau simplicial (sur un S -espace algébrique simplicial) 113 (12.8)
 - Anneau (sur un S -champ algébrique) 111 112 (12.7)
 point
 - algébrique 93 (11.2)
 - d'un S -champ algébrique 39 (5.2)
 préchamp
 - S -préchamp 15 (3.1)
 - fppf 77-78 (9.3)
 - fpqc 77-78 (9.3)
 - TOP 77-78 (9.3)
 présentation d'un S -champ algébrique 25 (4.1)
 - à fibres géométriquement connexes 50 (6.5)
 quasi-cohérent(e)(s)
 - Algèbre - 134-135 (14.2)

--fermeture intégrale d'une - 151-152 (16.1-16.4)	- S -champ algébrique - 73 (8.1.1)
- Idéal - sur un champ algébrique 136 (14.2.7)	- S -champ - 20 (3.9)
- Module -	- S -espace - 3 (1.5)
--(sur le site étale d'un schéma) 120 (13.1.2)	représentation (d'un S -champ) 127 (13.3.3)
--(sur un champ algébrique) 125 (13.2.2)	résiduel(le)
---de présentation finie 129 (13.4.3)	- corps - d'un point algébrique 93 (11.2)
---de type fini 129 (13.4.3; 13.4.5)	- gerbe - 93 (11.1)
---descente cohomologique 130-131 (13.5.3-13.5.5)	- S -faisceau - 93 (11.1)
---description comme représentation 128 (13.3.6)	schématique (morphisme -) 1; 198 (A.2)
---fibre d'un - en un point 128 (13.4)	spécialisation 40 (5.5)
---support d'un - 128-129 (13.4.2)	- critère de - 59 (7.1; 7.1.1)
--(sur un champ de Deligne-Mumford) 122 (13.1.7)	- critère valuatif de - 61 (7.2.3)
--(sur un espace algébrique) 122 (13.1.7)	tangent (S -champ -)
·(sur un espace algébrique simplicial) 125 (13.2.4)	- à un S -champ 168-172 (17.11-17.15)
quasi-séparé 3 (1.4)	- à un S -champ algébrique 172-174 (17.16-17.17)
quotient	topologie
- S -espace quotient 2	- de Zariski (sur un champ algébrique) 40 (5.5)
	- étale 1; 77 (9.1)
	- fppf 77 (9.1)
	- fpqc 77 (9.1)
relation d'équivalence 2	voisinages lisses (existence de -) 49 (6.3)
- fppf 84 (10.4)	
représentable	Zariski
- 1-morphisme - de S -champs 20 (3.9); 86 (10.5)	- théorème principal de - 152-153 (16.5)
- 1-morphisme - de S -champs algébriques 73 (8.1.2)	- topologie de - (sur un champ algébrique) 40 (5.5)
- morphisme - de S -espaces 3 (1.5)	