

Seminario Sevín Recillas
de Geometría Algebraica.

Teoría de Hodge

Pedro Luis del Angel Rodríguez

CIMAT

Apdo. Postal 402

36240. Guanajuato, Gto.

México

`luis@cimat.mx`

Índice general

1. Categorías Abelianas y álgebra homológica	9
1.1. Categorías	9
1.2. Categorías aditivas y categorías abelianas.	21
1.3. Homología de complejos	27
2. Homología	39
2.1. Homología simplicial	39
2.2. Homología singular	44
2.3. Homología singular vs. homología simplicial	50
3. Cohomología de De Rham	65
3.1. Dualidad y módulos inyectivos.	66
3.2. Cohomología de De Rham	71

Prefacio.

Estas notas surgieron originalmente como notas para un minicurso sobre teoría de Hodge, el cual formaría parte de una escuela de Geometría Algebraica. Por diversas razones el texto no llegó a publicarse, pero hizo surgir en mi la idea de enriquecerlas, incorporando más material y algunos ejercicios. Posteriormente, a consecuencia de algunos seminarios que se tuvieron en el CIMAT, decidí ampliar las miras y tomar las notas iniciales como un pretexto para hablar no sólo de la teoría de Hodge y la teoría de Hodge mixta, sino como un curso introductorio a la teoría de Módulos de Hodge mixtos, desarrollada por M. Saito. En particular, esto me permite revisar la teoría de D-Módulos y contemplar bajo su lupa algunos trabajos relacionados con ciclos algebraicos.

Espero haber alcanzado el objetivo.

Introducción

El hombre siempre ha querido entender el mundo, explorándolo desde diversos puntos de vista. Una de las primeras herramientas que desarrolló para el estudio de su universo fue la geometría, que surgió en culturas tan antiguas como la Babilónica y la China y se consolidó en la Grecia antigua, especialmente a partir del enorme esfuerzo de Euclides por sistematizar todos los conocimientos geométricos de su tiempo.

No sería sino hasta el siglo XVII, cuando Descartes introduce el sistema de coordenadas, que los geómetras descubren el poder del álgebra para el estudio de los objetos geométricos, dando lugar al surgimiento de la Geometría Algebraica. De entonces a la fecha nuestros conocimientos geométricos se han multiplicado, las técnicas se han perfeccionado y se han ido incorporando nuevas herramientas al estudio de la Geometría, como el análisis, la variable compleja y la topología.

La introducción de técnicas topológicas permitió definir los conceptos de *Homología* y *Cohomología* de una variedad algebraica. El uso de técnicas provenientes del análisis funcional y de la variable compleja permitió establecer el muy importante *Teorema de la descomposición de Hodge*, que relaciona varios grupos de cohomología. Este es el punto de partida de la teoría de Hodge, una de las áreas más bellas y activas de la Geometría Algebraica.

Aunque una buena parte de la matemática que nos interesa estudiar se desarrolló antes de que surgiera el concepto de categoría, muchas de las técnicas que se emplean, por ejemplo para el estudio de las homologías simplicial y singular, o de la hipercohomología de un complejo, etc. son similares y conviene estudiarlas en el contexto más general de categorías abelianas, aunque no fuera más que para evitar la repetición de los argumentos en los distintos capítulos en los que aparecerán. Pero existe una razón mucho más poderosa para incluir un capítulo de categorías en este texto: la discusión sobre D -módulos y módulos de Hodge mixtos supone el uso de categorías derivadas, lo cual hace absolutamente necesario hablar previamente de categorías abelianas. La única pregunta resultaba entonces en qué parte del texto hablar de categorías abelianas. Es entonces una decisión estética la que me llevó a comenzar el libro precisamente con un capítulo de categorías y álgebra homológica.

El primer capítulo de este libro introduce las nociones fundamentales de categorías, categorías abelianas y algunos lemas útiles, como el lema cinco y el lema de la serpiente. Por cuestiones de espacio y por ir más allá de los intereses de este libro, omitimos la demostración del importantísimo teorema del encaje de Freyd, aunque lo usaremos constantemente, por lo que remitimos al lector interesado al muy bello libro del propio Freyd, citado en la bibliografía.

En el capítulo 2 se presentan de manera muy rápida algunos de los grupos de homología más usados y/o más útiles para los géometras algebraicos. En el tercer capítulo se introduce la teoría de Hodge a partir únicamente del álgebra lineal. Por supuesto, el desarrollo histórico de la teoría no fue así, pero me parece que este enfoque permite que muchos estudiantes se acerquen a la teoría aún cuando sus conocimientos de la Geometría Algebraica no sean muy amplios. Sin embargo, algunos ejemplos y ejercicios demandan un mayor conocimiento de la Geometría Algebraica por parte del lector.

En el cuarto capítulo, continuando con el mismo espíritu, se introduce la teoría de Hodge mixta a partir sólo del álgebra lineal. Nuevamente, algunos ejemplos y ejercicios demandan mayores conocimientos por parte del lector.

En el tercer capítulo

Capítulo 1

Categorías Abelianas y álgebra homológica

Así como la noción de módulo sobre un anillo generaliza en muchos aspectos la teoría de espacios vectoriales sobre un campo dado, el concepto de categoría da cuenta de algunas propiedades comunes tanto a la teoría de módulos como a la teoría de grupos, e incluso, interpretadas de manera correcta, a la teoría de conjuntos. Como se mencionó en la introducción, algunas teorías modernas utilizan de manera sistemática y profunda la teoría de categorías.

1.1. Categorías

Definición. Una *categoría* \mathcal{C} es una terna que consta de la siguiente *data*:

- Una clase $Ob(\mathcal{C})$, cuyos elementos se llaman los *objetos* de la categoría \mathcal{C} ,
- una familia $Mor(\mathcal{C})$ de conjuntos $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, uno por cada par ordenado (A, B) en $Ob(\mathcal{C})$, cuyos elementos se llaman *morfismos* entre los objetos A y B y se denotan como $\varphi : A \rightarrow B$ (en ocasiones usaremos también la notación $A \xrightarrow{\varphi} B$ o simplemente $A \rightarrow B$).
- una familia de funciones

$$Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \rightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A, C),$$

una por cada triplete ordenado (A, B, C) de objetos en $Ob(\mathcal{C})$, llamada la composición, que a cada par $\varphi : A \rightarrow B$ y $\psi : B \rightarrow C$ le asocia el morfismo $\psi \circ \varphi : A \rightarrow C$.

que satisfacen los siguientes axiomas:

1. Cada morfismo $\varphi \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ determina una única pareja ordenada (A, B) tal que $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.
2. Para cada objeto $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ existe un morfismo *identidad* $\mathbf{1}_A : A \rightarrow A$ tal que, para todo $\phi : A \rightarrow B$ y para todo $\psi : C \rightarrow A$ se satisface $\phi \circ \mathbf{1}_A = \phi$ y $\mathbf{1}_A \circ \psi = \psi$.
3. Si $\varphi : A \rightarrow B$, $\psi : B \rightarrow C$ y $\nu : C \rightarrow D$, entonces

$$\nu \circ (\psi \circ \varphi) = (\nu \circ \psi) \circ \varphi.$$

No es difícil demostrar que el elemento $\mathbf{1}_A$ dado por el axioma 2 es único.

Una importante clase de categorías son categorías cuyos objetos son conjuntos con alguna estructura adicional y cuyos morfismos son funciones entre conjuntos que respetan esta estructura adicional. Los siguientes son ejemplos de categorías:

Ejemplo 1.1. La categoría *Conj*, cuyos objetos son los conjuntos y cuyos morfismos son las funciones entre conjuntos, con la composición usual entre funciones, llamada la *categoría de conjuntos*.^{1 2}

Ejemplo 1.2. Dado un campo k , la categoría *Vect/k*, cuyos objetos son los espacios vectoriales sobre k y cuyos morfismos son las transformaciones lineales entre espacios vectoriales, con la composición usual de transformaciones lineales, llamada la *categoría de espacios vectoriales* (sobre k).

Ejemplo 1.3. La categoría \mathcal{G} cuyos objetos son los grupos y cuyos morfismos son los homomorfismos de grupos, con la composición usual, llamada la *categoría de grupos*.

Ejemplo 1.4. Dado un anillo R , la categoría *mod(R)* cuyos objetos son los R -módulos y cuyos morfismos son los R -homomorfismos, con la composición usual, es llamada la *categoría de R -módulos*.

Ejemplo 1.5. Dado un espacio topológico X , la categoría *Top X* cuyos objetos son los subconjuntos abiertos de X y cuyos morfismos son las inclusiones (la identidad es una inclusión de un abierto en sí mismo), con las composiciones usuales.

¹En inglés se denota como *Set* y en francés como *Ens*.

²Observe que $\text{Ob}(\text{Conj})$ no es un conjunto, en virtud de la paradoja de los conjuntos que no se contienen a sí mismos.

Ejemplo 1.6. La categoría $\mathcal{T}op$, de *espacios topológicos*, cuyos objetos son los espacios topológicos, los morfismos son las funciones continuas entre espacios topológicos y la composición es la composición usual entre funciones.³

Pero hay categorías cuyos objetos no son conjuntos y cuyos morfismos no son funciones en el sentido usual.

Ejemplo 1.7. Dado un grupo G , definimos una categoría \mathcal{U}_G como sigue: $Ob(\mathcal{U}_G)$ consta de un solo objeto P , los morfismos en \mathcal{U}_G son $Mor(\mathcal{U}_G) = Hom_{\mathcal{U}_G}(P, P) = G$, con la composición dada por la operación de grupo en G . Esta categoría se llama la *categoría unipuntual* con grupo G , en la cual la identidad $\mathbf{1}_P$ es la identidad e del grupo G .

Ejemplo 1.8. La terna \mathcal{C} cuyos objetos son dos puntos P y Q y cuyos morfismos son $\mathbf{1}_P, \mathbf{1}_Q$ y $P \rightarrow Q$ con las composiciones evidentes (que deben satisfacer el segundo axioma de categorías) es una categoría.

Ejemplo 1.9. El conjunto \mathbb{N} de los naturales, cuyos objetos son precisamente los números naturales y cuyos morfismos son las identidades $\mathbf{1}_n$ y $n \rightarrow m$ si $n \leq m$, es una categoría.

Ejemplo 1.10. Todo conjunto no vacío A es una categoría, cuyos objetos son los elementos de A y cuyos únicos morfismos son los morfismos identidad $\mathbf{1}_x$ para cada elemento $x \in A$.

Ejemplo 1.11. Dada una categoría \mathcal{C} , definimos la categoría \mathcal{C}^{op} *opuesta* a \mathcal{C} como la categoría cuyos objetos son los mismos objetos que los de la categoría \mathcal{C} y $B \xrightarrow{\alpha'} A$ es un morfismo en \mathcal{C}^{op} si y sólo si $A \xrightarrow{\alpha} B$ es un morfismo en \mathcal{C} ; es decir, los morfismos en \mathcal{C}^{op} son los morfismos en \mathcal{C} pero en la dirección opuesta.

Ejemplo 1.12. Si \mathcal{C} es como en el ejemplo 1.8, entonces los objetos de \mathcal{C}^{op} son P y Q y los morfismos de \mathcal{C}^{op} son $\mathbf{1}_P, \mathbf{1}_Q$ y $Q \rightarrow P$

Ejemplo 1.13. Sean \mathcal{C} una categoría y $Z \in Ob(\mathcal{C})$, entonces podemos definir una categoría \mathcal{C}_Z de \mathcal{C} como sigue:

³Esta tampoco es una categoría pequeña, es decir $Ob(\mathcal{T}op)$ no es un conjunto, pues todo conjunto se puede convertir en un espacio topológico con la topología discreta.

▪

$$Ob(\mathcal{C}_Z) = \left\{ \begin{array}{c} A \\ \downarrow \\ Z \end{array} \mid \text{en } \mathcal{C}. \right\}$$

▪

$$Hom_{\mathcal{C}_Z}(A, B) = \left\{ A \longrightarrow B \text{ en } \mathcal{C} \mid \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ & \searrow & \swarrow \\ & Z & \end{array} \text{ conmuta} \right\}$$

Definición. Dadas dos categorías \mathcal{C} y \mathcal{D} , diremos que \mathcal{C} es una *subcategoría* de \mathcal{D} si $Ob(\mathcal{C})$ es una subclase de $Ob(\mathcal{D})$, para todo par $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ se tiene que $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \subset Hom_{\mathcal{D}}(A, B)$ y la composición en \mathcal{C} es la restricción a \mathcal{C} de la composición en \mathcal{D} . Si $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) = Hom_{\mathcal{D}}(A, B)$ para todo par de objetos en \mathcal{C} , diremos que \mathcal{C} es una subcategoría *plena* de \mathcal{D} .

Ejemplo 1.14. Si $A \subset B$ son dos conjuntos no vacíos, entonces A es una subcategoría de B (ver ejemplo 1.10).

Ejemplo 1.15. Si X es un espacio topológico, entonces la categoría $Top X$ es una subcategoría de la categoría Top .

Ejemplo 1.16. La categoría $Vect/\mathbb{Q}$ es una subcategoría de la categoría $mod(\mathbb{Z})$.

Definición. Dos objetos A y B en una categoría \mathcal{C} se dicen *isomorfos* si existen morfismos $\phi : A \longrightarrow B$ y $\psi : B \longrightarrow A$ tales que $\psi \circ \phi = \mathbf{1}_A$ y $\phi \circ \psi = \mathbf{1}_B$.

Ejemplo 1.17. Los isomorfismos usuales entre espacios vectoriales sobre un campo k , entre módulos sobre un anillo R o entre grupos son isomorfismos en el sentido de la definición precedente, en las categorías correspondientes.

Ejemplo 1.18. Las biyecciones entre conjuntos son isomorfismos en la categoría $Conj$.

Ejemplo 1.19. Si X es un espacio topológico, los únicos isomorfismos en la categoría $Top(X)$ son las identidades.

Ejemplo 1.20. En la categoría $\mathcal{T}op$, un morfismo $A \rightarrow B$ es un isomorfismo si y sólo si es un homeomorfismo.

Ejemplo 1.21. Continuando con el ejemplo precedente, sean $A = \mathbb{R}$ con la topología que tiene como base a los conjuntos de la forma $(a, b]$ y $B = \mathbb{R}$ con la topología usual; entonces la función

$$A \longrightarrow B$$

$$x \longmapsto x$$

es una biyección continua pero no es un isomorfismo en la categoría, pues no es un homeomorfismo.

Definición. Un morfismo $B \xrightarrow{\beta} C$ en \mathcal{C} es un *monomorfismo* si para cualquier objeto A y cualesquiera morfismos $A \xrightarrow{\alpha} B$ y $A \xrightarrow{\alpha'} B$ en \mathcal{C} se cumple que

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C = A \xrightarrow{\alpha'} B \xrightarrow{\beta} C$$

si y sólo si $\alpha = \alpha'$.⁴

Ejemplo 1.22. $A \rightarrow B$ es un monomorfismo en la categoría $Conj$ si y sólo si es una función inyectiva.

Ejemplo 1.23. $A \rightarrow B$ es un monomorfismo en la categoría $Vect/k$ si y sólo si es una transformación lineal inyectiva.

Ejemplo 1.24. $A \rightarrow B$ es un monomorfismo en la categoría $Mod(R)$ si y sólo si es un morfismo inyectivo.

Ejemplo 1.25. En las categorías de los ejemplos 1.8 y 1.9, todos los morfismos son monomorfismos

Definición. Un morfismo $A \xrightarrow{\alpha} B$ en \mathcal{C} es un *epimorfismo* si para cualquier objeto C y cualesquiera morfismos $B \xrightarrow{\beta} C$ y $B \xrightarrow{\beta'} C$ en \mathcal{C} se cumple que

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C = A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta'} C$$

si y sólo si $\beta = \beta'$.⁵

⁴En otras palabras, β es monomorfismo si la cancelación por la izquierda es válida para β .

⁵En otras palabras, α es epimorfismo si la cancelación por la derecha es válida para α .

Ejemplo 1.26. $A \longrightarrow B$ es un epimorfismo en la categoría $Conj$ si y sólo si es una función suprayectiva.

Ejemplo 1.27. $A \longrightarrow B$ es un epimorfismo en la categoría $Vect/k$ si y sólo si es una transformación lineal suprayectiva.

Ejemplo 1.28. En las categorías de los ejemplos 1.8 y 1.9, todos los morfismos son epimorfismos

Ejemplo 1.29. $A \longrightarrow B$ es un monomorfismo en la categoría \mathcal{C} si y sólo si $B \longrightarrow A$ es un epimorfismo en la categoría \mathcal{C}^{op} .

Observación. Los ejemplos 1.8 y 1.21 nos muestran que, en general, ser isomorfismo no es equivalente a ser monomorfismo y epimorfismo, pues el morfismo $P \longrightarrow Q$ del ejemplo 1.8 no tiene un inverso en la categoría, pese a ser monomorfismo y epimorfismo; lo mismo sucede con la biyección en el ejemplo 1.21, cuya inversa no pertenece a la categoría porque no es una función continua.

Definición. Un objeto P en una categoría \mathcal{C} se dice *objeto inicial* si para todo objeto Q en \mathcal{C} el conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, Q)$ consta de un único elemento.

Ejemplo 1.30. El conjunto \emptyset es un objeto inicial en la categoría $Conj$.

Ejemplo 1.31. La categoría \mathbb{N} del ejemplo 1.9 tiene un objeto inicial, que conveniremos que es el 1.

Ejemplo 1.32. El espacio vectorial $\{0\}$ es un objeto inicial en la categoría $Vect/k$.

Ejemplo 1.33. El espacio vectorial $\{0\}$ es un objeto inicial en la categoría de grupos.

Ejemplo 1.34. \mathbb{Z} es un objeto inicial en la categoría An de anillos conmutativos con unidad.

Ejemplo 1.35. La categoría $\mathbb{Z}_{\leq 0}$, cuyos objetos son los enteros menores o iguales a cero y cuyos morfismos son $n \longrightarrow m$ si $n \leq m$ no tiene objeto inicial.

Definición. Un objeto Q en una categoría \mathcal{C} se dice *objeto final* si para todo objeto P en \mathcal{C} el conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, Q)$ consta de un único elemento.

Ejemplo 1.36. La categoría $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ tiene un objeto final que es el cero.

Ejemplo 1.37. Cualquier conjunto con un solo elemento es un objeto final en la categoría de conjuntos.

Ejemplo 1.38. La categoría \mathbb{N} del ejemplo 1.9 no tiene un objeto final.

Definición. Un objeto 0 en una categoría \mathcal{C} se dice *objeto cero* si es objeto inicial y final, en particular este objeto es único salvo isomorfismo canónico (ver los ejercicios).

Ejemplo 1.39. El espacio vectorial 0 es un objeto cero en la categoría Vect/k .

Ejemplo 1.40. El grupo 0 es un objeto cero en la categoría de grupos.

Ejemplo 1.41. Si G es un grupo con al menos dos elementos, entonces la categoría \mathcal{U}_G del ejemplo 1.7 no tiene objeto cero, pese a tener un único elemento, porque existe más de un morfismo entre P y P .

Observación. Si en una categoría \mathcal{C} existe el elemento cero, entonces definimos el morfismo cero como

$$A \xrightarrow{0} B := A \longrightarrow 0 \longrightarrow B$$

Definición. Si A y B son dos objetos en una categoría \mathcal{C} , la *suma directa* de A y B es un objeto $A \oplus B$ en \mathcal{C} que satisface las siguientes propiedades:

- Existen monomorfismos $B \xrightarrow{\beta} A \oplus B \xleftarrow{\alpha} A$ y
- Si C es otro objeto de \mathcal{C} tal que existen monomorfismos $B \xrightarrow{\beta'} C \xleftarrow{\alpha'} A$, entonces existe un único morfismo $A \oplus B \rightarrow C$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 & B & \\
 & \downarrow \beta & \searrow \beta' \\
 A \oplus B & \longrightarrow & C \\
 & \uparrow \alpha & \nearrow \alpha' \\
 & A &
 \end{array}$$

Ejemplo 1.42. La suma directa de espacios vectoriales es una suma directa en la categoría $Vect/k$.

Ejemplo 1.43. La suma directa de R -módulos es una suma directa en la categoría $mod(R)$.

Ejemplo 1.44. La unión de conjuntos es una suma directa en la categoría de conjuntos.

Ejemplo 1.45. Si X es un espacio vectorial, la suma directa en la categoría $Top(X)$ es la unión de abiertos.

La noción dual a la de suma directa es la de producto directo.

Definición. Si A y B son dos objetos en una categoría \mathcal{C} , el *producto directo* de A y B es un objeto $A \times B$ en \mathcal{C} que satisface las siguientes propiedades:

- Existen epimorfismos $B \xleftarrow{\beta} A \times B \xrightarrow{\alpha} A$ y
- Si C es otro objeto de \mathcal{C} tal que existen epimorfismos $B \xleftarrow{\beta'} C \xrightarrow{\alpha'} A$, entonces existe un único morfismo $C \rightarrow A \times B$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 & B & \\
 & \uparrow \beta & \swarrow \beta' \\
 & A \times B & \longleftarrow C \\
 & \downarrow \alpha & \searrow \alpha' \\
 & A &
 \end{array}$$

Ejemplo 1.46. El producto directo de conjuntos es un ejemplo de producto directo en la categoría Set .

Ejemplo 1.47. El producto directo de conjuntos es un producto directo en la categoría Top .

Ejemplo 1.48. La suma directa de espacios vectoriales es también un producto directo en la categoría $Vect/k$.

Ejemplo 1.49. La suma directa de R -módulos es un producto directo en la categoría $\text{mod}(R)$.

La teoría de categorías no sería una herramienta poderosa si no existieran relaciones entre las categorías, pero como el lector sabe, todo espacio vectorial es también un grupo abeliano y es un conjunto, si $S \rightarrow R$ es un homomorfismo de anillos, entonces todo R -módulo es también un S -módulo (además de ser un conjunto), todo abierto de un espacio topológico X es a su vez un espacio topológico, etc. De este modo, una herramienta poderosa es establecer relaciones entre categorías diferentes, que de alguna manera sean compatibles con los morfismos y las composiciones.

Definición. Un *functor covariante* $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre dos categorías \mathcal{C} es una pareja de aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} \text{Ob}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \text{Ob}(\mathcal{D}) \\ A & \mapsto & F(A) \\ \\ \text{Mor}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \text{Mor}(\mathcal{D}) \\ A \xrightarrow{\phi} B & \mapsto & F(A) \xrightarrow{F(\phi)} F(B) \end{array}$$

que satisfacen

1. $F(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_{F(A)}$ para todo objeto $A \in \mathcal{C}$ y
2. $F(\phi) \circ F(\psi) = F(\phi \circ \psi)$ para toda pareja de morfismos ϕ, ψ donde la composición tenga sentido.

Ejemplo 1.50. El functor *olvido*, de la categoría Vect/k en la categoría $\mathcal{A}b$ de grupos abelianos, es el functor que manda cada espacio vectorial en si mismo, considerado como grupo abeliano, y cada homomorfismo entre espacios vectoriales lo manda al mismo homomorfismo, pero considerado como homomorfismo entre grupos abelianos; es decir, olvida la estructura de espacio vectorial sobre k y sólo recuerda la estructura aditiva.

Ejemplo 1.51. El functor de olvido entre la categoría de espacios topológicos y la categoría de conjuntos, es el functor que manda cada objeto en si mismo y cada homomorfismo entre espacios topológicos en si mismo, visto como función entre conjuntos.

Ejemplo 1.52. Si $S \rightarrow R$ es un homomorfismo de anillos, entonces hay un funtor natural $F : \text{mod}(R) \rightarrow \text{mod}(S)$ que manda a cada R -módulo en si mismo, pero pensado como S -módulo, y a cada homomorfismo de R -módulos en el mismo homomorfismo, pero visto como homomorfismo de S -módulos. Este funtor se puede pensar como una inclusión natural de la categoría de R -módulos en la categoría de S -módulos.

Ejemplo 1.53. Hemos visto que cada conjunto B puede ser considerado como una categoría en la que los objetos son los elementos de B y los únicos morfismos son las identidades; así, toda función entre conjuntos induce de manera natural un funtor entre las correspondientes categorías.

Ejemplo 1.54. De manera análoga, cada grupo G induce una categoría en la que existe un único objeto y los morfismos entre ese objeto y él mismo son, precisamente, los elementos del grupo; entonces todo homomorfismo de grupo induce un funtor entre las correspondientes categorías.

Definición. Un *funtor contravariante* entre las categorías \mathcal{C} y \mathcal{D} es un funtor covariante entre \mathcal{C}^{op} y \mathcal{D} .

Ejemplo 1.55. El funtor que a todo espacio vectorial V le asocia su dual y a cada transformación lineal entre espacios vectoriales le asocia la correspondiente transformación lineal entre espacios duales es un funtor contravariante de la categoría Vect/k en si misma.

Ejemplo 1.56. Más generalmente, si R es un anillo, el funtor $\text{Hom}_R(-, R)$, de la categoría $\text{mod}(R)$ en si misma, que a cada R -módulo A le asocia el R -módulo $\text{Hom}_R(A, R)$ y a cada homomorfismo de R -módulos $\phi : A \rightarrow B$ le asocia el homomorfismo

$$\text{Hom}_R(B, R) \xrightarrow{\phi^*} \text{Hom}_R(A, R),$$

$$\alpha \longrightarrow \alpha \circ \phi$$

es un funtor contravariante.

Ejemplo 1.57. Sea X una variedad holomorfa, entonces podemos construir varios funtores contravariantes $\text{Top}(X) \rightarrow \mathcal{A}b$ como sigue:

- \mathcal{O} , que a cada abierto $\emptyset \neq U \in Top(X)$ le asocia el conjunto $\mathcal{O}(U)$ de funciones holomorfas definidas en U (con la estructura natural de grupo abeliano dada por la suma de funciones con valores en \mathbb{C}) y a cada inclusión $V \hookrightarrow U$, con $V \neq \emptyset$, le asocia el homomorfismo $\mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(V)$ dado por la restricción al abierto V de las funciones holomorfas definidas en U .
- C^∞ , que a cada abierto $\emptyset \neq U \in Top(X)$ le asocia el conjunto $C^\infty(U)$ de funciones analíticas reales definidas en U (nuevamente con la estructura natural de grupo abeliano, esta vez dada por la suma de funciones con valores en \mathbb{R}) y a cada inclusión $V \hookrightarrow U$, con $V \neq \emptyset$, le asocia el homomorfismo $C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(V)$ dado por la restricción al abierto V de las funciones analíticas reales definidas en U .
- C^0 , que a cada abierto $\emptyset \neq U \in Top(X)$ le asocia el conjunto $C^0(U)$ de funciones reales continuas definidas en U (nuevamente con la estructura natural de grupo abeliano) y a cada morfismo inclusión $V \hookrightarrow U$, con $V \neq \emptyset$, le asocia el homomorfismo $C^0(U) \rightarrow C^0(V)$ dado por la restricción al abierto V de las funciones reales continuas definidas en U .

En todos los casos, al conjunto vacío se le asocia el grupo abeliano cero y a la inclusión natural del vacío en un abierto U se le asocia el homomorfismo cero.

Ejemplo 1.58. Sean X un espacio topológico y sea G un grupo abeliano (v.g. $G = \mathbb{C}$), entonces podemos definir un funtor contravariante $Top(X) \xrightarrow{G} \mathcal{A}b$ como sigue:

$$\begin{aligned} Ob(Top(X)) &\longrightarrow Ob(\mathcal{A}b) \\ U &\longmapsto \begin{cases} G & \text{si } U \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } U = \emptyset \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Mor(Top(X)) &\longrightarrow Mor(\mathcal{A}b) \\ V \hookrightarrow U &\longmapsto \begin{cases} G \xrightarrow{1_G} G & \text{si } V \neq \emptyset \\ 0 \longrightarrow G & \text{si } V = \emptyset \text{ y } U \neq \emptyset \\ 0 \longrightarrow 0 & \text{si } V = \emptyset \text{ y } U = \emptyset \end{cases} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.59. Si en el ejemplo precedente pensamos a G como espacio topológico con la topología discreta, entonces también podemos definir otro funtor contrava-

riante $Top(X) \xrightarrow{G'} \mathcal{A}b$ como sigue:

$$Ob(Top(X)) \xrightarrow{G'} Ob(\mathcal{A}b)$$

$$U \longmapsto G'(U) := \langle f : U \rightarrow G \mid f \text{ es continua} \rangle,$$

donde $G'(U)$ es el grupo generado por las funciones continuas de U en G y

$$Mor(Top(X)) \xrightarrow{G'} Mor(\mathcal{A}b)$$

$$(V \xrightarrow{j} U) \longmapsto (G'(U) \xrightarrow{\circ j} G'(V))$$

Observe que la operación de grupo en G es continua con la topología discreta y por tanto para todo $U \neq \emptyset$ el conjunto de las funciones continuas de U en G es un grupo abeliano. La definición hecha aquí tiene la ventaja de que si $U = \emptyset$, entonces $G'(U) := 0$ y no el conjunto vacío.

Estos ejemplos nos llevan a definir una noción fundamental en la teoría de categorías

Definición. Dados dos funtores $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, decimos que existe una *transformación natural* α entre F y G si para cada objeto $A \in \mathcal{C}$ existe un morfismo $F(A) \xrightarrow{\alpha_A} G(A)$ en \mathcal{D} tal que para todo morfismo $A \xrightarrow{\phi} B$ en \mathcal{C} el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & G(A) \\ \downarrow F(\phi) & & \downarrow G(\phi) \\ F(B) & \xrightarrow{\alpha_B} & G(B) \end{array}$$

Ejemplo 1.60. Existe una transformación natural evidente entre los funtores C^∞ y C^0 del ejemplo 1.57, pues toda función analítica real es una función continua.

Ejemplo 1.61. Existe una transformación natural evidente entre el functor constante G definido más arriba y el functor G' del ejemplo 1.59, que consiste en considerar a los elementos del grupo G como funciones constantes de U en G para todo abierto $U \neq \emptyset$.

Observación. Si $\alpha : F \rightarrow G$ y $\beta : G \rightarrow H$ son dos transformaciones naturales, definimos su composición de la manera obvia $(\beta \circ \alpha)_A := \beta_A \circ \alpha_A$.

1.2. Categorías aditivas y categorías abelianas.

Definición. Una categoría \mathcal{C} se dice *aditiva* si

1. \mathcal{C} tiene un objeto cero,
2. para cualesquiera dos objetos A, B en \mathcal{C} existe la suma directa $A \oplus B$ en \mathcal{C} ,
3. para todo par de objetos A, B en \mathcal{C} , el conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ es un grupo abeliano cuyo elemento neutro es el morfismo cero y
4. las composiciones son bilineales (i.e. distributivas con respecto a la suma en $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$).

Ejemplo 1.62. La categoría Vect/k es una categoría aditiva.

Ejemplo 1.63. La categoría de grupos abelianos es una categoría aditiva.

Ejemplo 1.64. Para cualquier anillo conmutativo R , la categoría $\text{mod}(R)$ es una categoría aditiva.

Proposición 1.1. Si \mathcal{C} y \mathcal{D} son categorías, entonces definimos una nueva categoría $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ cuyos objetos son los funtores covariantes de \mathcal{C} en \mathcal{D} y cuyos morfismos son las transformaciones naturales entre funtores. Si la categoría \mathcal{D} es aditiva, entonces $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ también lo es.

DEMOSTRACIÓN. Veamos que $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ satisface las cuatro propiedades de una categoría aditiva.

1. Puesto que \mathcal{D} es una categoría abeliana, existe el objeto $0_{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}$, único salvo isomorfismo canónico. Definimos entonces el funtor $0 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ que a cada objeto $A \in \mathcal{C}$ lo manda al objeto $0_{\mathcal{D}}$ y a cada morfismo $A \rightarrow B$ en \mathcal{C} lo manda al único morfismo $0_{\mathcal{D}} \rightarrow 0_{\mathcal{D}}$ en \mathcal{D} . Se deja como ejercicio para el lector verificar que con esta definición 0 es un funtor covariante.

Si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es cualquier otro funtor, veamos que $\text{Hom}(F, 0)$ y $\text{Hom}(0, F)$ tienen un único elemento. En efecto, si $\alpha : F \rightarrow 0$ es una transformación natural, entonces, como $0_{\mathcal{D}}$ es un objeto final en \mathcal{D} , existe un único morfismo

$F(A) \xrightarrow{\alpha_A} 0(A) = 0_{\mathcal{D}}$ para cualquier objeto $A \in \mathcal{C}$; más aún, si $A \xrightarrow{f} B$ es un morfismo en \mathcal{C} se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & 0_{\mathcal{D}} \\ F(f) \downarrow & & \downarrow \mathbf{1}_{0_{\mathcal{D}}} \\ F(B) & \xrightarrow{\alpha_B} & 0_{\mathcal{D}} \end{array}$$

es decir, existe una única transformación natural $\alpha : F \rightarrow 0$. Análogamente, puesto que $0_{\mathcal{D}}$ es un objeto inicial en \mathcal{D} , existe una única transformación natural $\beta : 0 \rightarrow F$ para cualquier funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

2. Dados $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funtores covariantes, definimos el funtor $F \oplus G$ como sigue

$$Ob(\mathcal{C}) \longrightarrow Ob(\mathcal{D})$$

$$A \longmapsto F(A) \oplus G(A)$$

donde la suma del lado derecha está bien definida pues \mathcal{D} es una categoría aditiva. Observemos que los monomorfismos $F(A) \rightarrow F(A) \oplus G(A) \leftarrow G(A)$ para $A \in \mathcal{C}$ inducen transformaciones naturales $F \rightarrow F \oplus G \leftarrow G$ (de hecho monomorfismos en la categoría $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$) y la propiedad universal de la suma para $F \oplus G$ es consecuencia de la propiedad universal de la suma para $F(A) \oplus G(A)$ en \mathcal{D} para todo $A \in \mathcal{C}$.

3. Dados $\alpha, \beta \in \text{Hom}(F, G)$, entonces para $A \in Ob(\mathcal{C})$ se tienen $F(A) \xrightarrow{\alpha_A} G(A)$ y $F(A) \xrightarrow{\beta_A} G(A)$, es decir, $\alpha_A, \beta_A \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), G(A))$; pero este es un grupo abeliano, entonces $\alpha_A + \beta_A \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), G(A))$ para todo $A \in \mathcal{C}$ y podemos por tanto definir $\alpha + \beta \in Fun(F, G)$ como la transformación natural dada por $\alpha_A + \beta_A$ para $A \in \mathcal{C}$. Observe que la transformación natural cero está dada por la composición $F \rightarrow 0 \rightarrow G$ que es compatible con el 0 en $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), G(A))$ para todo $A \in \mathcal{C}$.
4. Sean $\alpha : F \rightarrow G$ y $\beta, \gamma : G \rightarrow H$ transformaciones naturales; entonces $\alpha_A : F(A) \rightarrow G(A)$ y $\beta_A + \gamma_A : G(A) \rightarrow H(A)$ para todo $A \in \mathcal{C}$ y por tanto $(\beta_A + \gamma_A) \circ \alpha_A = \beta_A \circ \alpha_A + \gamma_A \circ \alpha_A$ para todo $A \in \mathcal{C}$, dado que la composición de morfismos es bilineal en \mathcal{D} y por tanto $(\beta + \gamma) \circ \alpha = \beta \circ \alpha + \gamma \circ \alpha$. Análogamente se tiene $\delta \circ (\beta + \gamma) = \delta \circ \beta + \delta \circ \gamma$. \diamond

Definición. Dados dos morfismos $B \begin{smallmatrix} \phi \\ \rightrightarrows \\ \psi \end{smallmatrix} C$, decimos que el morfismo $A \xrightarrow{\nu} B$ es el *ecualizador* de ϕ y ψ si se cumple que

■

$$A \xrightarrow{\nu} B \begin{smallmatrix} \phi \\ \rightrightarrows \\ \psi \end{smallmatrix} C = A \xrightarrow{\nu} B \xrightarrow{\psi} C$$

y

- $A \xrightarrow{\nu} B$ es universal con respecto a esta propiedad, es decir, si $D \xrightarrow{\mu} B$ es otro morfismo que satisface

$$D \xrightarrow{\mu} B \begin{smallmatrix} \phi \\ \rightrightarrows \\ \psi \end{smallmatrix} C = D \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\psi} C$$

entonces existe un único morfismo $D \xrightarrow{x} A$ tal que

$$D \xrightarrow{\mu} B = D \xrightarrow{x} A \xrightarrow{\nu} B$$

Ejemplo 1.65. Si V y W son dos espacios vectoriales sobre k y $V \begin{smallmatrix} \phi \\ \rightrightarrows \\ \psi \end{smallmatrix} W$ son dos transformaciones lineales, entonces el ecualizador de ϕ y ψ es la inclusión $\text{Ker}(\phi - \psi) \hookrightarrow V$. En particular el núcleo de ϕ no es otra cosa que el ecualizador de ϕ y del morfismo cero.

Observación. El ecualizador de dos morfismos dados podría no existir.

Definición. Sea \mathcal{C} una categoría con un objeto cero y sea $B \xrightarrow{\phi} C$ un morfismo en \mathcal{C} ; entonces definimos el *núcleo* de ϕ , que denotaremos mediante $\text{Ker } \phi$, como el ecualizador de $B \begin{smallmatrix} \phi \\ \rightrightarrows \\ 0 \end{smallmatrix} C$ si este existe.

Proposición 1.2. Si la categoría \mathcal{C} tiene un objeto cero y $A \xrightarrow{f} B$ es un morfismo en \mathcal{C} para el cual el núcleo de f existe, entonces el morfismo natural $\text{Ker } f \xrightarrow{i} A$ es un monomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Sean $C \begin{smallmatrix} \phi \\ \rightrightarrows \\ \psi \end{smallmatrix} \text{Ker } f$ dos morfismos tales que

$$C \xrightarrow{\phi} \text{Ker } f \xrightarrow{i} A = C \xrightarrow{\psi} \text{Ker } f \xrightarrow{i} A$$

y llamemos g a la composición $g = i \circ \phi = i \circ \psi : C \rightarrow A$; entonces, componiendo con f , se tiene

$$\begin{aligned} C \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} B &= C \xrightarrow{\phi} \text{Ker } f \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} B \\ &= C \xrightarrow{\phi} \text{Ker } f \xrightarrow{i} A \xrightarrow{0} B \\ &= C \xrightarrow{g} A \xrightarrow{0} B \end{aligned}$$

y por la definición de núcleo de f , existe un único morfismo $C \xrightarrow{\nu} \text{Ker } f$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker } f & \xrightarrow{i} & A \\ \nu \uparrow & \nearrow g & \\ C & & \end{array}$$

pero tanto ϕ como ψ hacen conmutar este diagrama, entonces $\phi = \psi = \nu$. \diamond

También tenemos los conceptos duales.

Definición. Dados dos morfismos $A \begin{smallmatrix} \xrightarrow{\phi} \\ \xrightarrow{\psi} \end{smallmatrix} B$, decimos que el morfismo $B \xrightarrow{\nu} C$ es el *coequalizador* de ϕ y ψ si se cumple que

■

$$A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\nu} C = A \xrightarrow{\psi} B \xrightarrow{\nu} C$$

y

■ $B \xrightarrow{\nu} C$ es universal con respecto a esta propiedad, es decir, si $B \xrightarrow{\mu} D$ es otro morfismo que satisface

$$A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\mu} D = A \xrightarrow{\psi} B \xrightarrow{\mu} D$$

entonces existe un único morfismo $C \xrightarrow{x} D$ tal que

$$B \xrightarrow{\mu} D = B \xrightarrow{\nu} C \xrightarrow{x} D$$

Ejemplo 1.66. Sean V y W dos espacios vectoriales y sean ψ y ϕ dos transformaciones lineales de V en W ; entonces el coequalizador de ψ y ϕ no es otra cosa que la proyección natural de W en el espacio vectorial $\frac{W}{\text{Im}(\psi - \phi)}$.

Definición. Sea \mathcal{C} una categoría con un objeto cero y sea $A \xrightarrow{\phi} B$ un morfismo en \mathcal{C} ; entonces definimos el *conúcleo* de ϕ , que denotaremos mediante $\text{coker } \phi$, como el coequalizador de $A \xrightarrow[\phi]{0} B$ si este existe.

Ejemplo 1.67. Si $\phi : V \rightarrow W$ es un homomorfismo de R -módulos, entonces el conúcleo de ϕ es la proyección natural de W en el R -módulo $\frac{W}{\text{Im}(\phi)}$.

Proposición 1.3. Sean \mathcal{C} una categoría con un objeto cero y $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo en \mathcal{C} para el cual el conúcleo existe; entonces el morfismo natural $B \rightarrow \text{coker } f$ es un epimorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Es un argumento dual al de la demostración de la proposición 1.2. \diamond

Definición. Una categoría \mathcal{C} se dice *abeliana* si

1. \mathcal{C} es aditiva,
2. para cualesquiera dos objetos A, B en \mathcal{C} existe el producto directo y es canónicamente isomorfo a la suma directa y
3. todo morfismo $A \xrightarrow{\phi} B$ tiene un núcleo y un conúcleo en \mathcal{C} .

Ejemplo 1.68. Las categorías Vect/k y $\text{mod}(R)$ son categorías abelianas.

Ejemplo 1.69. Si \mathcal{A} es una categoría abeliana, podemos definir otras categorías abelianas asociadas a esta, por ejemplo

1. La *categoría de complejos* $C^\bullet(\mathcal{A})$, cuyos objetos son complejos de la forma

$$A^\bullet := \dots \xrightarrow{d_{n-1}} A^n \xrightarrow{d_n} A^{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \dots$$

con $A^n \in \mathcal{A}$, $d_{n+1} \circ d_n = 0$ para todo n y cuyos morfismos $A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet$ son colecciones de morfismos $\{f_k : A^k \rightarrow B^k\}$ tales que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} A^k & \xrightarrow{d_k} & A^{k+1} \\ \downarrow f_k & & \downarrow f_{k+1} \\ B^k & \xrightarrow{d_k} & B^{k+1} \end{array}$$

conmutan para todo k .

2. Las categorías de complejos acotados superiormente $C^+(\mathcal{A})$, de complejos acotados inferiormente $C^-(\mathcal{A})$ y de complejos acotados $C^b(\mathcal{A})$, cuyos objetos son complejos tales que $A^i = 0$ si $i \gg 0$, $A^i = 0$ si $i \ll 0$ y complejos que satisfacen $A^i = 0$ si $i \ll 0$ o $i \gg 0$ respectivamente.
3. Si \mathcal{D} es una categoría abeliana, entonces la categoría $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ es abeliana; en particular si X es un espacio topológico, la categoría $Fun(Top(X), \mathcal{A}b)$ es una categoría abeliana y por lo tanto también lo es la categoría de complejos $C^\bullet(Fun(Top(X), \mathcal{A}b))$.

Definición. Si \mathcal{A} es una categoría abeliana y $A \xrightarrow{\alpha} B$ es un morfismo en \mathcal{A} , entonces definimos la *imagen* de α , que denotaremos mediante $Im \alpha$, como el núcleo del morfismo canónico $B \rightarrow \text{coker } \alpha$.

Ejemplo 1.70. Dado un homomorfismo $A \xrightarrow{\alpha} B$ de grupos abelianos, la definición precedente de $Im \alpha$ coincide con la idea intuitiva de la imagen de α como el submódulo de B formado por los elementos de la forma $\alpha(x)$ para algún $x \in A$.

Proposición 1.4. Sean \mathcal{A} una categoría abeliana y $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo en \mathcal{A} , entonces la imagen de f existe y el morfismo $Im f \rightarrow B$ es un monomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. La imagen existe porque en una categoría abeliana existen núcleos y conúcleos de todos los morfismos. Que el morfismo natural $Im f \rightarrow B$ es monomorfismo se sigue entonces de la proposición 1.2. \diamond

Proposición 1.5. Sean \mathcal{A} una categoría abeliana y $A \xrightarrow{\alpha} B$ y $B \xrightarrow{\beta} C$ dos morfismos en \mathcal{A} tales que $\beta \circ \alpha = 0$; entonces existe un único monomorfismo $Im \alpha \rightarrow Ker \beta$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} Ker \beta & \longrightarrow & B \\ \uparrow & \nearrow & \\ Im \alpha & & \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Como $\beta \circ \alpha = 0$, entonces

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C = A \xrightarrow{0} B \xrightarrow{\beta} C$$

y por la definición del conúcleo de α como el coequalizador de α y 0 , existen morfismos únicos $B \xrightarrow{\pi} \text{coker } \alpha$ y $\text{coker } \alpha \rightarrow C$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$(1.1) \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\beta} & C \\ & \searrow \pi & \uparrow \\ & & \text{coker } \alpha \end{array}$$

Por otra parte, $\text{Im } \alpha$ es el núcleo del morfismo natural $B \xrightarrow{\pi} \text{coker } \alpha$, es decir, es el equalizador de π y 0 , por tanto

$$\text{Im } \alpha \longrightarrow B \xrightarrow{\pi} \text{coker } \alpha = \text{Im } \alpha \longrightarrow B \xrightarrow{0} \text{coker } \alpha$$

de modo que también se tiene

$$\text{Im } \alpha \longrightarrow B \xrightarrow{\pi} \text{coker } \alpha \longrightarrow C = \text{Im } \alpha \longrightarrow B \xrightarrow{0} \text{coker } \alpha \longrightarrow C$$

que en virtud del diagrama 1.1 se puede reescribir como

$$\text{Im } \alpha \longrightarrow B \xrightarrow{\beta} C = \text{Im } \alpha \longrightarrow B \xrightarrow{0} C$$

pero el equalizador de β y 0 es precisamente el núcleo de β , de modo que por definición de equalizador, existe un único morfismo $\text{Im } \alpha \rightarrow \text{Ker } \beta$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker } \beta & \longrightarrow & B \\ \uparrow & \nearrow & \\ \text{Im } \alpha & & \end{array}$$

Finalmente, como los morfismos $\text{Ker } \beta \rightarrow B$ e $\text{Im } \alpha \rightarrow B$ son monomorfismos por las proposiciones 1.2 y 1.4 respectivamente, entonces el morfismo $\text{Im } \alpha \rightarrow \text{Ker } \beta$ es necesariamente un monomorfismo. \diamond

1.3. Homología de complejos

Hemos visto que si \mathcal{A} es una categoría abeliana, entonces las categorías $C^\bullet(\mathcal{A})$, $C^+(\mathcal{A})$, $C^-(\mathcal{A})$ y $C^b(\mathcal{A})$ también resultan categorías abelianas; en particular el núcleo, el conúcleo y la imagen de un morfismo entre complejos existen. Pero en estos casos, dado que los componentes de cada complejo son objetos y morfismos dentro de una categoría abeliana, entonces también existen los núcleos, los conúcleos y las imágenes de los morfismos “dentro” del complejo, más precisamente se tiene

Definición. Sea

$$A^\bullet = \dots \xrightarrow{d_{n-1}} A^n \xrightarrow{d_n} \dots \in C^*(\mathcal{A})$$

un complejo, con \mathcal{A} una categoría abeliana, donde $*$ = \bullet , $+$, $-$ ó b ; entonces por la proposición 1.5, para todo entero n existen $\text{Im } d_{n-1}$, $\text{Ker } d_n$ y un único monomorfismo $\text{Im } d_{n-1} \rightarrow \text{Ker } d_n$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \text{Ker } d_n & \longrightarrow & A^n \\ & \uparrow & \nearrow & \\ & \text{Im } d_{n-1} & & \end{array}$$

conmuta. Como \mathcal{A} es categoría abeliana, entonces el conúcleo de $\text{Im } d_{n-1} \rightarrow \text{Ker } d_n$ es un elemento $H_n(A^\bullet)$ de la categoría \mathcal{A} , al que llamaremos el n -ésimo objeto de *homología* del complejo A^\bullet .

Observación. Si \mathcal{A} es la categoría de grupos abelianos, o la categoría de R -módulos para algún anillo conmutativo R , entonces el monomorfismo $\text{Im } d_{n-1} \rightarrow \text{Ker } d_n$ es un homomorfismo inyectivo de grupos abelianos (respectivamente de R -módulos) y su conúcleo $H_n(A^\bullet) = \frac{\text{Ker } d_n}{\text{Im } d_{n-1}}$ tiene una estructura natural de grupo abeliano, en cuyo caso nos referiremos a él como el n -ésimo *grupo* de homología del complejo A^\bullet .

Definición. Un complejo A^\bullet se dice *exacto* si el monomorfismo $\text{Im } d_{n-1} \rightarrow \text{Ker } d_n$ es un isomorfismo para toda n , equivalentemente, si $H_n(A^\bullet) = 0$ para toda n . En estas circunstancias también se acostumbra decir que

$$\dots \xrightarrow{d_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \dots$$

es una *sucesión exacta larga*.

Ejemplo 1.71. El complejo $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow 0$ es exacto si y sólo si α es un isomorfismo.

Ejemplo 1.72. El complejo $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$ es exacto si y sólo si α es monomorfismo, β es epimorfismo y además $\text{ker } \beta \cong \text{Im } \alpha$. En este caso también decimos que $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$ es una *sucesión exacta corta*.

Observación. Recuerde que si A, B y C son módulos sobre un anillo, la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$$

escinde (i.e., $B \cong A \oplus C$) si y sólo si existe un homomorfismo $\gamma : C \rightarrow B$ (respectivamente un homomorfismo $\delta : B \rightarrow A$) tal que $\gamma \circ \beta = \mathbf{1}_B$ (respectivamente $\delta \circ \gamma = \mathbf{1}_A$). En particular γ existe si y sólo si δ existe.

Más generalmente, decimos que

$$0 \longrightarrow A^\bullet \xrightarrow{\alpha} B^\bullet \xrightarrow{\beta} C^\bullet \longrightarrow 0$$

es una *sucesión exacta corta de complejos* si α y β son morfismos de complejos y para toda n se cumple que la sucesión corta $0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{\alpha_n} B_n \xrightarrow{\beta_n} C_n \longrightarrow 0$ es exacta.

Teorema 1.6. *Para cada número natural n , el n -ésimo objeto de homología define un funtor covariante $H_n(-) : C^*(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$, que a cada complejo A^\bullet le asocia el objeto de homología $H_n(A^\bullet)$; en particular cada morfismo $A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet$ entre complejos induce un morfismo entre objetos de homología $H_n(A^\bullet) \xrightarrow{f_*} H_n(B^\bullet)$.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que sabemos como se define H_n de un objeto, sólo resta demostrar que lo afirmado para los morfismos es cierto. Dado un morfismo entre complejos $A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet$, para todo k se tiene un diagrama conmutativo (ver ejemplo 1.69)

$$(1.2) \quad \begin{array}{ccccc} \text{Ker } d_k & \xrightarrow{j} & A^k & \xrightarrow{d_k} & A^{k+1} \\ & & \downarrow f_k & & \downarrow f_{k+1} \\ \text{Ker } d'_k & \xrightarrow{j'} & B^k & \xrightarrow{d'_k} & B^{k+1} \end{array}$$

En particular, $d'_k \circ f_k \circ j = f_{k+1} \circ d_k \circ j = f_{k+1} \circ 0 = 0$ y por la propiedad universal del núcleo, existe un único morfismo $\text{Ker } d_k \rightarrow \text{Ker } d'_k$, que seguiremos llamando f_k , que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } d_k & \xrightarrow{j} & A^k & \xrightarrow{d_k} & A^{k+1} \\ f_k \downarrow & & \downarrow f_k & & \downarrow f_{k+1} \\ \text{Ker } d'_k & \xrightarrow{j'} & B^k & \xrightarrow{d'_k} & B^{k+1} \end{array}$$

De manera dual, por la propiedad universal del cónculo, existe un único morfismo $\text{coker } d_k \rightarrow \text{coker } d'_k$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A^k & \xrightarrow{d_k} & A^{k+1} & \xrightarrow{\pi} & \text{coker } d_k \\ f_k \downarrow & & \downarrow f_{k+1} & & \downarrow \bar{f}_{k+1} \\ B^k & \xrightarrow{d'_k} & B^{k+1} & \xrightarrow{\pi'} & \text{coker } d'_k \end{array}$$

el cual, en vista de la definición de la imagen de un morfismo y por la propiedad universal del núcleo, induce un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \text{Im } d_k & \xrightarrow{i} & A^{k+1} & \xrightarrow{\pi} & \text{coker } d_k \\ f_{k+1} \downarrow & & \downarrow f_{k+1} & & \downarrow \bar{f}_{k+1} \\ \text{Im } d'_k & \xrightarrow{i'} & B^{k+1} & \xrightarrow{\pi'} & \text{coker } d'_k \end{array}$$

Ahora bien, por la proposición 1.5 se tiene un diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \text{Im } d_k & \xrightarrow{s} & \text{Ker } d_{k+1} & \xrightarrow{j} & A_{k+1} \\ f_{k+1} \downarrow & & \downarrow f_{k+1} & & \downarrow f_{k+1} \\ \text{Im } d'_k & \xrightarrow{s'} & \text{Ker } d'_{k+1} & \xrightarrow{j'} & B_{k+1} \end{array}$$

donde el cuadrado de la derecha y el rectángulo exterior son conmutativos, por tanto

$$j' \circ f_{k+1} \circ s = f_{k+1} \circ j \circ s = j' \circ s' \circ f_{k+1}$$

y como j' es un monomorfismo, se sigue que $f_{k+1} \circ s = s' \circ f_{k+1}$; es decir, el cuadrado de la izquierda también es conmutativo.

Finalmente, por la propiedad universal del conúcleo se tiene un nuevo diagrama conmutativo

$$(1.3) \quad \begin{array}{ccccc} \text{Im } d_k & \xrightarrow{s} & \text{Ker } d_{k+1} & \xrightarrow{j} & H_{k+1}(A^\bullet) \\ f_{k+1} \downarrow & & \downarrow f_{k+1} & & \downarrow f_* \\ \text{Im } d'_k & \xrightarrow{s'} & \text{Ker } d'_{k+1} & \xrightarrow{j'} & H_{k+1}(B^\bullet) \end{array}$$

Se deja al lector verificar que si $f = \mathbf{1}$, entonces $f_* = \mathbf{1}$. ◇

Observación. Si \mathcal{A} es la categoría $\mathcal{A}b$ de grupos abelianos o la categoría $\text{mod}(R)$ de R -módulos para un anillo conmutativo R , la demostración de la proposición precedente se simplifica muchísimo, pues en ese caso la inclusión $\text{Im } d_k \subset \text{Ker } d_{k+1}$ es evidente de la definición de complejo y la conmutatividad del diagrama 1.3 es una consecuencia inmediata de la conmutatividad del diagrama 1.2.

Lema 1.7. (*Lema de la serpiente*) Considere el siguiente diagrama conmutativo en la categoría abeliana $\text{mod}(R)$

$$\begin{array}{ccccccc} & & A' & \xrightarrow{j'} & B' & \xrightarrow{k'} & C' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{j} & B & \xrightarrow{k} & C & & \end{array}$$

Si las filas en este diagrama son exactas, entonces existe una sucesión exacta

$$\text{Ker}(f) \longrightarrow \text{Ker}(g) \longrightarrow \text{Ker}(h) \xrightarrow{\delta} \text{coker}(f) \longrightarrow \text{coker}(g) \longrightarrow \text{coker}(h)$$

Además, si $A' \rightarrow B'$ es un monomorfismo, entonces $\text{Ker}(f) \rightarrow \text{Ker}(g)$ también lo es y si $B \rightarrow C$ es un epimorfismo, entonces $\text{coker}(g) \rightarrow \text{coker}(h)$ también lo es.

DEMOSTRACIÓN. Completamos el diagrama con los correspondientes núcleos y conúcleos

$$(1.4) \quad \begin{array}{ccccccc} & & \text{Ker}(f) & & \text{Ker}(g) & & \text{Ker}(h) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & A' & \xrightarrow{j'} & B' & \xrightarrow{k'} & C' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{j} & B & \xrightarrow{k} & C \\ & & \downarrow \pi & & \downarrow p & & \downarrow \\ & & \text{coker}(f) & & \text{coker}(g) & & \text{coker}(h) \end{array}$$

Por la conmutatividad del diagrama, si $a' \in \text{Ker}(f)$, entonces $g \circ j'(a') = j \circ f(a') = 0$, es decir $j'(a') \in \text{Ker}(g)$ y por tanto la restricción de j' al núcleo de f define un homomorfismo entre $\text{Ker}(f)$ y $\text{Ker}(g)$, que seguiremos llamando j' ; de manera análoga, la restricción de k' al núcleo de g induce un homomorfismo entre $\text{Ker}(g)$ y $\text{Ker}(h)$, que seguiremos llamando k' . La exactitud de la fila $A' \xrightarrow{j'} B' \xrightarrow{k'} C' \longrightarrow 0$ induce exactitud en el diagrama

$$(1.5) \quad \text{Ker}(f) \longrightarrow \text{Ker}(g) \longrightarrow \text{Ker}(h)$$

Por otra parte, la conmutatividad del diagrama 1.4 implica que $j(\text{Im}(f)) \subset \text{Im}(g)$, de modo que j induce un homomorfismo \bar{j} entre $\text{coker}(f)$ y $\text{coker}(g)$ y análogamente k induce un homomorfismo \bar{k} entre $\text{coker}(g)$ y $\text{coker}(h)$. Nuevamente, la exactitud de las filas en 1.4 induce exactitud en el diagrama

$$(1.6) \quad \text{coker}(f) \longrightarrow \text{coker}(g) \longrightarrow \text{coker}(h)$$

Sea $c \in \text{Ker}(h) \subset C'$; entonces, como k' es suprayectivo, existe $b \in B'$ tal que $k'(b) = c$ y por tanto $0 = h(c) = h \circ k'(b) = k \circ g(b)$, pues el diagrama conmuta, es decir $g(b) \in \text{Ker}(k) = \text{Im}(j)$ por la exactitud de las filas en 1.4, así que existe $a \in A$ tal que $j(a) = g(b)$ y podemos definir $\delta(c) := \pi(a) \in \text{coker}(f)$.

Veamos que δ está bien definido, que es un homomorfismo y que la sucesión

$$\text{Ker}(f) \longrightarrow \text{Ker}(g) \xrightarrow{k'} \text{Ker}(h) \xrightarrow{\delta} \text{coker}(f) \xrightarrow{\bar{j}} \text{coker}(g) \longrightarrow \text{coker}(h)$$

es exacta.

- Si $b_1 \in B'$ también satisface que $k'(b_1) = c$, entonces $k'(b_1 - b) = c - c = 0$, es decir $b_1 - b \in \text{Ker}(k') = \text{Im}(j')$ por la exactitud de las filas en el diagrama 1.4, por tanto existe $a' \in A'$ tal que $j'(a') = b_1 - b$, o sea $b_1 = b + j'(a')$; de modo que

$$g(b_1) = g(b) + g \circ j'(a') = g(b) + j \circ f(a') = j(a) + j \circ f(a') = j(a + f(a'))$$

por la conmutatividad del diagrama; pero $\pi(a + f(a')) = \pi(a) = \delta(c)$ por la definición de conúcleo, luego δ está bien definido.

- Sean $c' \in \text{Ker}(h)$, $b' \in B'$ tal que $k'(b') = c'$, $a' \in A$ tal que $j(a') = g(b')$ y $\lambda \in R$; entonces

$$k'(b + \lambda b') = k'(b) + \lambda k'(b') = c + \lambda c'$$

y

$$j(a + \lambda a') = j(a) + \lambda j(a') = g(b) + \lambda g(b') = g(b + \lambda b')$$

puesto que k' , g y j son homomorfismos de R -módulos; pero entonces

$$\delta(c + \lambda c') = \pi(a + \lambda a') = \pi(a) + \lambda \pi(a') = \delta(c) + \lambda \delta(c')$$

es decir, δ es un homomorfismo de R -módulos.

- Finalmente, en vista de la exactitud de los diagramas 1.5 y 1.6, sólo necesitamos verificar que $\text{Ker}(\delta) = \text{Im}(k'|_{\text{Ker}(g)})$ y $\text{Ker}(\bar{j}) = \text{Im}(\delta)$. En efecto, las inclusiones $\text{Im}(k'|_{\text{Ker}(g)}) \subset \text{Ker}(\delta)$ e $\text{Im}(\delta) \subset \text{Ker}(\bar{j})$ son sencillas y se dejan como ejercicio al lector. Veamos las inclusiones recíprocas:

$c \in \text{Ker}(\delta)$ si y sólo si $\pi(a) = 0$, si y sólo si existe $a' \in A'$ tal que $a = f(a')$ y como el diagrama 1.4 conmuta, $b = j(a) = j \circ f(a') = g \circ j'(a')$; pero $b = g(b')$, por tanto $b' - j'(a') \in \text{Ker}(g)$ y además $k'(b' - j'(a')) = k'(b) - k' \circ j'(a') = k'(b) = c$ por la exactitud de las filas, es decir, $c \in \text{Im}(k'|_{\text{Ker}(g)})$, como queríamos demostrar.

Análogamente, si $\pi(a) \in \text{Ker}(\bar{j})$, entonces $0 = \bar{j}(\pi(a)) = p \circ j(a)$, es decir $b := j(a) \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(g)$, de modo que existe $b' \in B'$ tal que $g(b') = b$; pero entonces $h \circ k'(b') = k \circ g(b') = k(b) = k \circ j(a) = 0$, o si se prefiere $c := k'(b') \in \text{Ker}(h)$ y por construcción se tiene que $\delta(c) = a$.

Las afirmaciones sobre inyectividad y suprayectividad de los homomorfismos $j'|_{\text{Ker}(f)}$ y \bar{k} respectivamente son inmediatas. \diamond

Observación. Aunque el lema previo se enunció sólo para la categoría $\text{mod}(R)$ el resultado es cierto para toda categoría abeliana \mathcal{A} , por el teorema del encaje de

Freyd [?], que esencialmente nos dice que cualquier teorema que se pueda demostrar para la categoría $\text{mod}(R)$ mediante una persecución de elementos en un diagrama, es cierto para cualquier categoría abeliana, aún cuando los objetos de la categoría no sean conjuntos.

Corolario 1.8. *Si $0 \longrightarrow A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{g} C^\bullet \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta en $C^*(\mathcal{A})$, con \mathcal{A} una categoría abeliana, entonces se tiene una sucesión exacta larga*

$$\dots \xrightarrow{\delta} H_i(A^\bullet) \xrightarrow{f_*} H_i(B^\bullet) \xrightarrow{g_*} H_i(C^\bullet) \xrightarrow{\delta} H_{i+1}(A^\bullet) \xrightarrow{f_*} \dots$$

DEMOSTRACIÓN. En vista de la observación precedente, sin pérdida de generalidad podemos suponer que \mathcal{A} es la categoría de R -módulos para algún anillo conmutativo R ; entonces, para todo entero i se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A^{i-1} & \xrightarrow{f_{i-1}} & B^{i-1} & \xrightarrow{g_{i-1}} & C^{i-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d'_{i-1} & & \downarrow d_{i-1} & & \downarrow d''_{i-1} & & \\ 0 & \longrightarrow & A^i & \xrightarrow{f_i} & B^i & \xrightarrow{g_i} & C^i & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d'_i & & \downarrow d_i & & \downarrow d''_i & & \\ 0 & \longrightarrow & A^{i+1} & \xrightarrow{f_{i+1}} & B^{i+1} & \xrightarrow{g_{i+1}} & C^{i+1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Como $d'_{i+1} \circ d'_i = d_{i+1} \circ d_i = d''_{i+1} \circ d''_i = 0$, el diagrama precedente induce un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{A^i}{\text{Im}(d'_{i-1})} & \xrightarrow{\bar{f}_i} & \frac{B^i}{\text{Im}(d_{i-1})} & \xrightarrow{\bar{g}_i} & \frac{C^i}{\text{Im}(d''_{i-1})} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \bar{d}_i & & \downarrow \bar{d}''_i & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(d'_{i+1}) & \xrightarrow{f_{i+1}} & \text{Ker}(d_{i+1}) & \xrightarrow{g_{i+1}} & \text{Ker}(d''_{i+1}) \end{array}$$

y por el lema de la serpiente (1.7), para cada entero i tenemos una sucesión exacta

$$H_i(A^\bullet) \xrightarrow{f_*} H_i(B^\bullet) \xrightarrow{g_*} H_i(C^\bullet) \xrightarrow{\delta} H_{i+1}(A^\bullet) \xrightarrow{f_*} H_{i+1}(B^\bullet) \xrightarrow{g_*} H_{i+1}(C^\bullet)$$

puesto que $\text{Im}(\bar{d}_i) = \text{Im}(d_i)$ y $\text{coker}(\bar{d}_i) = H_i(B^\bullet)$, así como las correspondientes afirmaciones para d'_i y d''_i . Uniendo los diagramas para $i \in \mathbb{Z}$ se tiene la sucesión exacta larga deseada. \diamond

Definición. Dos morfismos de complejos $f, g : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ son *homótopos* si existe

una colección $k = \{k_n\}$ de morfismos $k_n : A_n \longrightarrow B_{n-1}$ tales que

$$(1.7) \quad d_{n-1} \circ k_n + k_{n+1} \circ d_n = g_n - f_n$$

para toda n .

La colección de ecuaciones dada por (1.7) suele escribirse simplemente como

$$d_B \circ k + k \circ d_A = g - f,$$

para resaltar en qué complejo se están aplicando los operadores d .

Ejemplo 1.73. Sea A^\bullet el complejo exacto $0 \longrightarrow A \xrightarrow{1_A} A \longrightarrow 0$; entonces el morfismo identidad $A^\bullet \xrightarrow{1_{A^\bullet}} A^\bullet$ es homótopo al morfismo cero vía

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{1_A} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \searrow & & \swarrow & & \\ & & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{1_A} & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Lema 1.9. Sean $\mathcal{A} = \text{mod}(R)$ la categoría de R -módulos y $f, g : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ dos morfismos en $C^*(\mathcal{A})$, donde $*$ = $\bullet, +, -$ ó b ; si $f, g : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ son homótopos, entonces los homomorfismos inducidos f_* y g_* son iguales.

DEMOSTRACIÓN. Como f y g son homótopos, entonces existe una colección de homomorfismos $k = \{k_n\}$ tales que

$$(1.8) \quad d_B \circ k_n + k_{n+1} \circ d_A = g_n - f_n$$

para toda n , en particular dado $\alpha \in \ker d_n \subset A_n$ se cumple que

$$\begin{aligned} g_n(\alpha) - f_n(\alpha) &= d_B \circ k_n(\alpha) + k_{n+1} \circ d_A(\alpha) \\ &= d_B \circ k_n(\alpha) \end{aligned} .$$

puesto que $\alpha \in \ker d_A \subset A_n$; pero $d_B \circ k_n(\alpha) \in \text{Im } d_B$, por tanto $g_n(\alpha) - f_n(\alpha)$ también está en $\text{Im } d_{n+1} \subset B_n$, es decir, $g_n(\alpha)$ y $f_n(\alpha)$ representan a la misma clase de equivalencia en

$$\frac{\ker d_n}{\text{Im } d_{n+1}} = H_n(B^\bullet)$$

◇

Definición. Dos complejos A^\bullet y B^\bullet se dicen *homótopos* si existen morfismos de complejos $f : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ y $g : B^\bullet \longrightarrow A^\bullet$ tales que $g \circ f \simeq 1_{A^\bullet}$ y $f \circ g \simeq 1_{B^\bullet}$.

Corolario 1.10. Si A^\bullet y B^\bullet son homótopos, entonces $H_i(A^\bullet) \cong H_i(B^\bullet)$ para todo entero $i \geq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Por el lema 1.9 se tienen $g_* \circ f_* = \mathbf{1}_*$ y $f_* \circ g_* = \mathbf{1}_*$. \diamond

Lema 1.11. Si en una categoría abeliana \mathcal{A} se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{k} & D & \xrightarrow{l} & E \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow & & \epsilon \downarrow \\ A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow{k'} & D' & \xrightarrow{l'} & E' \end{array}$$

donde los renglones son exactos y los morfismos α, β, δ y ϵ son isomorfismos, entonces el morfismo γ también es isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que \mathcal{A} es la categoría de R -módulos para algún anillo conmutativo R y sea $c \in \ker \gamma \subset C$; entonces $\delta \circ k(c) = k' \circ \gamma(c) = 0$ y como δ es inyectivo se sigue que $k(c) = 0$, pero como los renglones del diagrama son exactos, entonces existe $b \in B$ tal que $j(b) = c$ y por tanto $j' \circ \beta(b) = \gamma \circ j(b) = \gamma(c) = 0$, es decir $\beta(b) \in \text{Ker}(j') = \text{Im}(i')$, luego existe $a' \in A'$ tal que $i'(a') = \beta(b)$.

Puesto que α es suprayectivo, existe $a \in A$ tal que $a' = \alpha(a)$, de modo que $\beta(b) = i'(a') = i' \circ \alpha(a) = \beta \circ i(a)$ y como β es inyectivo, entonces $b = i(a)$ y por tanto $c = j(b) = j \circ i(a) = 0$; es decir γ es inyectivo.

Por otra parte, dado $c' \in C'$ se tiene que $k'(c') \in D'$ y como δ es suprayectivo, existe $d \in D$ tal que $k'(c') = \delta(d)$. Más aún, $\epsilon \circ l(d) = l' \circ \delta(d) = l'(k'(c')) = 0$ y puesto que ϵ es inyectivo, entonces $l(d) = 0$; por tanto existe $c \in C$ tal que $k(c) = d$, pero en ese caso $k' \circ \gamma(c) = \delta \circ k(c) = \delta(d) = k'(c')$, es decir $\gamma(c) - c' \in \text{Ker } k' = \text{Im } j'$ y de este modo existe $b' \in B'$ tal que $\gamma(c) - c' = j'(b')$. Puesto que β es suprayectivo, existe $b \in B$ tal que $b' = \beta(b)$, luego $\gamma(c) - c' = j'(b') = j' \circ \beta(b) = \gamma \circ j(b)$, es decir, $c' = \gamma(c - j(b))$, o sea, γ es suprayectivo y por ser un homomorfismo de R -módulos que es inyectivo y suprayectivo, entonces es un isomorfismo. \diamond

Observación. En ocasiones resulta conveniente o necesario trabajar con complejos descendentes, es decir, complejos A_\bullet de la forma

$$\dots \xrightarrow{\partial_{i+1}} A_i \xrightarrow{\partial_i} A_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots$$

En ese caso usaremos ∂_i en lugar de d_i para denotar la diferencial del complejo y subíndices en los objetos del complejo en lugar de superíndices. Los resultados sobre complejos y sucesiones de complejos que hemos expresado en este capítulo también son válidas para esos complejos y las demostraciones son las mismas, *mutatis mutandis*. En particular tanto el corolario 1.8 como el lema 1.9 siguen siendo ciertos.

En los siguientes capítulos tendremos oportunidad de ver varias aplicaciones tanto del corolario 1.8 como del lema 1.9.

Ejercicios

1. Demuestre que el morfismo identidad dado por el segundo axioma de categorías es único.
2. Demuestre que la categoría unipuntual definida en el ejemplo 1.7 es una categoría.
3. Demuestre que el conjunto de los números naturales es una categoría, con los morfismos dados como en el ejemplo 1.9.
4. Demuestre que la categoría construida en el ejemplo 1.10 es efectivamente una categoría.
5. Demuestre que si \mathcal{C} es una categoría, entonces \mathcal{C}^{op} también lo es.
6. Demuestre que cualesquiera dos objetos iniciales necesariamente son (canónicamente) isomorfos.
7. Demuestre que cualesquiera dos objetos finales necesariamente son (canónicamente) isomorfos.
8. Demuestre que todo isomorfismo es monomorfismo y epimorfismo.
9. Demuestre que las funciones entre conjuntos inducen funtores entre las correspondientes categorías.
10. Demuestre que todo homomorfismo de grupos induce un funtor entre las correspondientes categorías con un único elemento.
11. Dada una categoría \mathcal{C} y dos objetos A y B en \mathcal{C} , definimos una nueva categoría ${}_A S_B$ como sigue:

$$Ob({}_A S_B) = \{ A \xrightarrow{\alpha} C \xleftarrow{\beta} B \text{ en } \mathcal{C} \mid \alpha \text{ y } \beta \text{ son monomorfismos} \}$$

$$Hom_{{}_A S_B} \left(\begin{array}{c} A \\ \alpha \downarrow \\ C \\ \beta \uparrow \\ B \end{array}, \begin{array}{c} A \\ \alpha' \downarrow \\ D \\ \beta' \uparrow \\ B \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{ccc} & A & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \alpha' \\ C & \xrightarrow{\gamma} & D \\ \beta \swarrow & & \searrow \beta' \\ & B & \end{array} \mid \text{los triángulos conmutan} \right\}$$

Demuestre que la suma directa $A \oplus B$ existe en \mathcal{C} si y sólo si la categoría ${}_A S_B$ admite un objeto inicial.

12. Demuestre que el funtor descrito en el ejemplo 1.56 es efectivamente un funtor contravariante.
13. Demuestre que los funtores definidos en el ejemplo 1.57 son efectivamente funtores contravariantes.
14. Demuestre que la transformación mencionada en el ejemplo 1.61 efectivamente es una transformación natural. ¿Cómo se define esta transformación para el abierto $U = \emptyset$?
15. Demuestre que la categoría $Vect/k$ es una categoría aditiva.
16. Demuestre que la categoría de grupos abelianos es una categoría aditiva.
17. Sea \mathcal{C} una categoría aditiva; demuestre que el ecualizador de ϕ y ψ , en caso de existir, es canónicamente isomorfo al núcleo de $\phi - \psi$.
18. Sea \mathcal{C} una categoría aditiva; demuestre que el coecualizador de ϕ y ψ , en caso de existir, es canónicamente isomorfo al conúcleo de $\phi - \psi$.
19. Demuestre las afirmaciones hechas en los ejemplos 1.66 y 1.67.
20. Demuestre que las categorías definidas en el ejemplo 1.69 efectivamente son categorías abelianas.
Sugerencia: Observe que si la categoría \mathcal{D} tiene un objeto cero, entonces existe el *functor cero* $0 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.
21. Demuestre que si $A \xrightarrow{f} B$ es un morfismo en una categoría abeliana, entonces existe un único epimorfismo $A \rightarrow \text{Im } f$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & \text{Im } f \\
 & \searrow f & \downarrow i \\
 & & B
 \end{array}$$

22. Demuestre el lema 1.9 para una categoría abeliana arbitraria *sin* usar el teorema del encaje de Freyd.

Capítulo 2

Homología

Ante la dificultad de estudiar los objetos topológicos *per se*, se ha buscado asociarles objetos algebraicos, llamados *invariantes*, que reconozcan y permitan identificar características específicas de los espacios topológicos con los que se asocian. Entre los primeros invariantes que se estudiaron, a partir de ideas que se remontan a H. Poincaré, están los grupos de *homología*, simplicial y singular. Poincaré descubrió que, no importa cómo “triangulemos” la esfera unitaria, la suma del número de vértices, menos el número de aristas más el número de caras siempre es igual a 2. Generalizar esta idea supone el uso de objetos que jueguen el papel de los triángulos en otras dimensiones, así como la correcta generalización de caras, vértices y la noción misma de “triangulación”, que deberá hacerse precisa.

2.1. Homología simplicial

Definición. Dados $n + 1$ puntos $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$; en posición general, es decir, tales que $\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$ es un conjunto linealmente independiente, definimos el n simplejo generado por v_0, \dots, v_n como el conjunto

$$[v_0, \dots, v_n] := \left\{ P \in \mathbb{R}^m \mid P = \sum_i t_i v_i, \sum_i t_i = 1, t_i \geq 0 \forall i \right\}$$

A los puntos v_0, \dots, v_n se les llama los *vértices* del n simplejo. Existen inclusiones evidentes $[v_0, \dots, \widehat{v}_k, \dots, v_n] \hookrightarrow [v_0, \dots, v_n]$ para toda $0 \leq k \leq n$, donde \widehat{v}_k significa que se ha omitido al punto v_k y se tiene, por tanto, un $n - 1$ simplejo incluido en el n simplejo original. A la imagen de esta inclusión se le dice una *cara* del n simplejo $[v_0, \dots, v_n]$.

Al n simplejo generado por la base canónica $\{e_0, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^{n+1} se le llama el n simplejo estandar y se denota mediante Δ^n . El orden de los vértices juega un papel muy importante en la definición y cálculo de la homología de un espacio topológico, en particular, el orden de los vértices de un n simplejo determina una

orientación de cada una de sus caras; también determina un homeomorfismo lineal canónico que preserva la orientación, entre Δ^n y $[v_0, \dots, v_n]$, a saber

$$\sum_i t_i e_i \mapsto \sum_i t_i v_i.$$

Nota: Los vértices de una cara, o de cualquier subsimplejo generado por un subconjunto de los vértices del n simplejo $[v_0, \dots, v_n]$, se ordenarán de acuerdo al orden en que aparecen en el n simplejo $[v_0, \dots, v_n]$.

A la unión de las caras de Δ^n le llamamos la *frontera* de Δ^n y la denotamos mediante $\partial\Delta^n$. El interior del n simplejo estandar, $(\Delta^n)^o = \Delta^n - \partial\Delta^n$, lo llamamos el n simplejo abierto. Observe que $\partial\Delta^0 = \emptyset$ y por tanto $(\Delta^0)^o = \Delta^0$.

Definición. Una estructura de Δ complejo en un espacio topológico X es una colección de funciones continuas $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$, donde n depende de α , tales que:

- La restricción $\sigma_\alpha|_{(\Delta^n)^o}$ es inyectiva para cada σ_α y cada punto de X está en la imagen de exactamente una restricción $\sigma_\alpha|_{(\Delta^n)^o}$.
- Cada restricción de σ_α a una cara de Δ^n es una de las funciones $\sigma_\beta : \Delta^{n-1} \rightarrow X$, donde hemos identificado a las caras de Δ^n con el $n-1$ simplejo estandar, mediante los homeomorfismos lineales canónicos que preservan orientación descritos más arriba.
- Un conjunto $A \subset X$ es abierto si y sólo si $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ es abierto en el correspondiente Δ^n para cada σ_α .

Denotemos mediante e_α^n a la imagen $\sigma_\alpha((\Delta^n)^o)$ y sea $\Delta_n(X)$ el grupo abeliano libre generado por los e_α^n . A los elementos de este grupo les llamaremos n cadenas. Las cadenas se pueden por tanto escribir como sumas formales $\sum_\alpha n_\alpha e_\alpha$ con $n_\alpha \in \mathbb{Z}$ ó, equivalentemente, como $\sum_\alpha n_\alpha \sigma_\alpha$, donde $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$ es una de las funciones que determinan la estructura de Δ -complejo en X y cuya imagen es la cerradura de e_α .

Para un Δ -complejo general X definimos *homomorfismos frontera*

$$\partial_n : \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_{n-1}(X)$$

mediante la fórmula

$$\partial_n(\sigma_\alpha) = \sum_i (-1)^i \sigma_\alpha|_{[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n]},$$

para $n \neq 0$ y $\partial_0 = 0$, donde los $[e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_n]$ son las caras de Δ^n . El signo en la suma, heurísticamente, toma en cuenta la orientación del simplejo estandard.

Lema 2.1. $\Delta_\bullet(X)$ es un complejo descendente, es decir, $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ para todo n .

DEMOSTRACIÓN. Ejercicio para el lector. \diamond

Definición. Definimos los *grupos de homología simplicial* de X como los grupos

$$H_k^\Delta(X) := \frac{\text{Ker}(\partial_n : \Delta_n(X) \longrightarrow \Delta_{n-1}(X))}{\text{Im}(\partial_{n+1} : \Delta_{n+1}(X) \longrightarrow \Delta_n(X))}$$

Observe que, por definición, estos grupos son grupos abelianos.

Ejemplo 2.1. Sea $X = \{p\}$; entonces la única estructura de Δ complejo posible para X es la dada por una copia del 0-simplejo estandard Δ_0 y nada más; por tanto

$$H_k^\Delta(\mathbb{A}_\mathbb{C}^1) = \begin{cases} 0, & \text{para } k \geq 1, \\ \mathbb{Z}, & \text{para } k = 0. \end{cases}$$

Ejemplo 2.2. Sea $X = S^1$, con la estructura de Δ complejo dada por un vértice ν (v.g. el polo norte) y una arista e , identificando las fronteras de la arista con el vértice ν ; entonces tanto $\Delta_0(S^1)$ como $\Delta_1(S^1)$ son isomorfos a \mathbb{Z} y el operador frontera es cero pues $\partial e = \nu - \nu$. Dado que no hay símlices en dimensiones mayores a 1 en esta estructura, entonces

$$H_k^\Delta(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0, 1; \\ 0 & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Ejemplo 2.3. Sea $X = T = S^1 \times S^1$ un toro con la estructura de Δ -complejo dada por un vértice ν , tres aristas a, b y c y dos 2-simplejos U y R . Esta estructura es la estructura natural que hereda T como cociente de un rectángulo con lados a, a', b y b' con las identificaciones usuales de a con a' , b con b' y los cuatro vértices con ν ; aquí c es la imagen en T de la diagonal del rectángulo. De este modo se tiene

$$\begin{aligned} \Delta_0(T) &= \nu\mathbb{Z} \\ \Delta_1(T) &= a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z} \oplus c\mathbb{Z} \\ \Delta_2(T) &= U\mathbb{Z} \oplus R\mathbb{Z} \end{aligned}$$

y $\Delta_k(T) = 0$ para $k \geq 3$.

Como en el ejemplo precedente $\partial_1 a = \partial_1 b = \partial_1 c = \nu - \nu$, de modo que $\partial_1 = 0$ y por tanto $H_0^\Delta(T) \cong \mathbb{Z}$. Por otra parte $\partial_2 U = a + b - c = \partial_2 R$ y como $\{a, b, a + b - c\}$ también es una base de $\Delta_1(T)$, entonces tenemos

$$H_1^\Delta(T) \cong \mathbb{Z}^2$$

$$H_2^\Delta(T) \cong \mathbb{Z}$$

pues el nucleo de ∂_2 está generado por $U - R$.

Ejemplo 2.4. Sea $X = S^2$. Podemos dotar a S^2 de una estructura de Δ complejo tomando dos copias U y L de Δ^2 e identificando sus fronteras a través de la función identidad. Si nombramos a, b y c a las aristas de U y L y a los vértices los llamamos P, Q y R , de modo que $\partial_1 a = P - R$, $\partial_1 b = Q - P$ y $\partial_1 c = R - Q$; entonces tenemos

$$\begin{aligned} \Delta_0(S^2) &= P\mathbb{Z} \oplus Q\mathbb{Z} \oplus R\mathbb{Z}, \\ \Delta_1(S^2) &= a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z} \oplus c\mathbb{Z}, \\ \Delta_2(S^2) &= U\mathbb{Z} \oplus L\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Como $\Delta_k(S^2) = 0$ para todo $k \geq 3$ y $\ker \partial_2 = (U - L)\mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned} H_k^\Delta(S^2) &= 0 \quad \text{para } k \geq 3. \\ H_2^\Delta(S^2) &= \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Por otra parte, puesto que $\text{Im } \partial_2 = \ker \partial_1 = (a + b + c)\mathbb{Z}$ se tiene que

$$H_1^\Delta(S^2) = 0,$$

en tanto que

$$\text{Im } \partial_1 = (P - R)\mathbb{Z} \oplus (Q - P)\mathbb{Z} \subset P\mathbb{Z} \oplus Q\mathbb{Z} \oplus R\mathbb{Z}$$

y por tanto

$$H_0^\Delta(S^2) \cong \mathbb{Z}.$$

Observación Puesto que $\mathbb{P}_\mathbb{C}^1 \cong S^2$, este homeomorfismo induce una estructura de Δ complejo en \mathbb{P}^1 y para esta estructura los grupos de homología simplicial coinciden.

Ejemplo 2.5. Sea $X = \mathbb{R}^2$; entonces cualquier Δ estructura en X tiene un número infinito de 2-simplejos, puesto que la imagen de cada uno de ellos es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^2 y por tanto ninguna unión finita de 2-simplejos puede cubrir a todo X ; por otra parte no hay k -simplejos en esta Δ estructura, para $k \geq 3$ y por tanto

$$H_k^\Delta(X) = 0,$$

para $k \geq 3$.

Observe que $\ker \partial_2 = 0$, pues si $\sum_j \Delta_2^j$ es una suma finita de 2-simplejos distintos

2 a 2 y tales que $\cup_j \Delta_2^j$ es un conjunto conexo B , entonces su imagen bajo ∂_2 es la frontera $\partial B \neq \emptyset$. En general, para una suma finita arbitraria, su imagen bajo ∂_2 será la suma finita de las fronteras de las componentes conexas de la unión de los 2-simplejos, la cuál no es cero salvo que los coeficientes de la suma sean cero, por tanto se tiene

$$H_2^\Delta(X) = 0.$$

Por otra parte, $\text{Ker } \partial_1$ está generado precisamente por las fronteras ∂B de las uniones finitas de 2-simplejos, las cuales están en la imagen de ∂_2 , como acabamos de ver, de modo que

$$H_1^\Delta(X) = 0.$$

Finalmente observemos que mientras $\Delta_0(X)$ es el grupo abeliano libre generado por los vértices de los 2-simplejos que definen la Δ estructura de X , la imagen de ∂_1 está generada por elementos de la forma $p - q$, donde p y q son vértices de sendos 2-simplejos y cualquier diferencia de vértices está en la imagen de ∂_1 , puesto que dos vértices arbitrarios siempre están conectados por algún camino en la Δ estructura de X ; más aún, puesto que $p \notin \ker \partial_1$ para ningún vértice p y puesto que dos vértices arbitrarios difieren por un elemento en $\text{Im } \partial_1$, se tiene que

$$H_0^\Delta(X) = \mathbb{Z}.$$

Como $\mathbb{A}_\mathbb{C}^1 \cong \mathbb{R}^2$, entonces

$$H_k^\Delta(\mathbb{A}_\mathbb{C}^1) = \begin{cases} 0, & \text{para } k \geq 1, \\ \mathbb{Z}, & \text{para } k = 0. \end{cases}$$

Una pregunta razonable es si los grupos de homología simplicial dependen o no de la elección de Δ estructura o, más generalmente, en vista de los ejemplos 2.1 y 2.5, si dos espacios topológicos son homótopos, ¿tienen los mismos grupos de homología simplicial?

La respuesta a estas preguntas manteniéndonos en el esquema de los complejos simpliciales es muy complicada, por esta razón es conveniente introducir otras teorías de homología que nos permitan dar una respuesta más sencilla.

Observación. Tradicionalmente la homología simplicial se define para *complejos simpliciales*, que son aquellos Δ complejos cuyos simplejos están completamente determinados por los vértices, es decir, cada n -simplejo tiene exactamente $n + 1$ vértices distintos y ningún otro n -simplejo tiene la misma colección de vértices. En esta sección y la siguiente seguimos muy de cerca la presentación de Allen Hatcher [?]

2.2. Homología singular

Definición. Un n -simplejo singular en un espacio topológico X es una función continua $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$. Observe que σ no tiene por que ser una función inyectiva y de hecho podría ser bastante degenerada, por eso el nombre de "singular".

Sea $C_n(X)$ el grupo abeliano libre generado por los n -simplejos singulares en X ; a los elementos de $C_n(X)$ se les llama n -cadenas singulares (en lo que sigue escribiremos simplemente n -cadenas para referirnos a estos elementos). Como en el caso de Δ complejos, definimos un complejo de cadenas singulares mediante los *homomorfismos frontera*

$$\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$$

dados por

$$\partial_n(\sigma_\alpha) = \sum_i (-1)^i \sigma_\alpha[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n],$$

para $n \neq 0$ y $\partial_0 = 0$, donde los $[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]$ se identifican de manera canónica con el $n - 1$ -simplejo Δ^{n-1} , preservando el orden de los vértices.

Lema 2.2. $\delta_n \circ \delta_{n+1} = 0$ para todo n , por tanto $C_\bullet(X)$ es un complejo descendente. \diamond

Definición. Definimos los *grupos de homología singular* mediante

$$H_n(X) = \frac{\ker \partial_n}{\text{Im } \partial_{n+1}}$$

Observaciones.

1. El complejo $C_\bullet(X)$ no depende de ninguna "triangulación" particular de X , pues toma en cuenta todas las funciones continuas de Δ^n en X .

2. No existe ninguna razón a priori por la que estos grupos deban ser finitamente generados, al contrario de lo que sucede con los grupos de homología simplicial.
3. Tampoco existe ninguna razón a priori por la que estos grupos deban ser cero a partir de cierto valor del subíndice, puesto que las funciones σ ya no son inyecciones.

Lema 2.3. *Si $X = \sqcup X_\alpha$ es la descomposición de X en sus componentes arcoconexas, entonces $H_n(X) \cong \oplus H_n(X_\alpha)$.*

DEMOSTRACIÓN. Como Δ^n es arcoconexo y las funciones $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ son continuas, la imagen de Δ_n en X es arcoconexa y por tanto está completamente contenida en una de las componentes arcoconexas de X , de este modo

$$C_n(X) \cong \oplus C_n(X_\alpha).$$

El operador frontera ∂_n preserva esta descomposición, pues la imagen de la restricción de σ a cualquiera de las caras de Δ^n necesariamente está en la misma componente arcoconexa que la imagen de Δ^n , así que

$$\partial_n : C_n(X_\alpha) \rightarrow C_{n-1}(X_\alpha)$$

y en consecuencia se tiene

$$\begin{aligned} \ker \partial_n &\cong \oplus (\ker \partial_n \cap C_n(X_\alpha)) \\ \text{Im } \partial_n &\cong \oplus (\text{Im } \partial_n \cap C_{n-1}(X_\alpha)) \end{aligned}$$

por lo que los grupos de homología también escinden $H_n(X) \cong \oplus H_n(X_\alpha)$ \diamond

Lema 2.4. *Si X es no vacío y arcoconexo, entonces $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$, por tanto para todo espacio X , $H_0(X)$ es una suma directa de copias de \mathbb{Z} . una por cada componente arcoconexa.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que $\partial_0 = 0$, entonces $H_0(X) = \frac{C_0(X)}{\text{Im } \partial_1}$. Si definimos $\eta : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ mediante $\eta(\sum_i n_i \sigma_i) = \sum_i n_i$, entonces claramente η es un homomorfismo suprayectivo pues $\eta(n\sigma) = n$ para cualquier σ y por tanto $\frac{C_0(X)}{\ker \eta} \cong \mathbb{Z}$; veamos que $\ker \eta = \text{Im } \partial_1$.

En efecto, $\text{Im } \partial_1 \subset \ker \eta$ pues si $\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$, entonces $\partial_1(\sigma) = \sigma|_{[v_0]} - \sigma|_{[v_1]}$, por

lo que $\eta \circ \partial_1(\sigma) = 1 - 1 = 0$ y como esto es cierto para cada generador de $C_1(X)$, entonces $\eta|_{\text{Im } \partial_1} = 0$. Consideremos ahora $\sum_i n_i \sigma_i \in \ker \eta$, entonces $\sum_i n_i = 0$. Sea $x_0 \in X$ un punto fijo; entonces $\sum_i n_i \psi = 0 \cdot \psi = 0 \in C_0(X)$, donde $\psi : \Delta^0 \rightarrow X$ cuya imagen es precisamente x_0 , por tanto

$$\sum_i n_i \sigma_i = \sum_i n_i (\sigma_i - \psi) \in C_0(X).$$

Si $P_i = \text{Im } \sigma_i \in X$, como X es arcoconexo existe una función $\beta_i : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\beta_i(0) = \psi(v_0) = x_0$ y $\beta_i(1) = \sigma_i(v_0) = P_i$; si identificamos de manera canónica al intervalo $[0, 1]$ con el 1-simplejo $\Delta^1 = [v_0, v_1]$, entonces $\beta_i \in C_1(X)$ y además

$$\partial_1(\beta_i) = \beta_i|_{v_1} - \beta_i|_{v_0} = \sigma_i - \psi,$$

por tanto se tiene que

$$\partial_1\left(\sum_i n_i \beta_i\right) = \sum_i n_i (\sigma_i - \psi_i) = \sum_i n_i \sigma_i,$$

es decir $\sum_i n_i \sigma_i \in \text{Im } \partial_1$, de modo que $\ker \eta = \text{Im } \partial_1$ y así

$$H_0(X) = \frac{C_0(X)}{\text{Im } \partial_1} = \frac{C_0(X)}{\ker \eta} \cong \mathbb{Z}.$$

.

◇

Ejemplo 2.6. Si X es un punto, entonces $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ y $H_k(X) = 0$ para todo $k \geq 1$. En efecto, $C_n(X) = \sigma_n \mathbb{Z}$ para cada n , donde $\sigma_n : \Delta^n \rightarrow X$ es la única función continua posible entre el n -simplejo canónico y X , por tanto

$$\partial_n(\sigma_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k + 1, \\ \sigma_{n-1} & \text{si } n = 2k. \end{cases}$$

de modo que en este caso el complejo $C_\bullet(X)$ es simplemente

$$\dots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

por lo que todos los grupos de homología de este complejo son cero, salvo el último, que es isomorfo a \mathbb{Z} .

Observación. El complejo $C_\bullet(X)$ es funtorial, como se enuncia en el siguiente lema.

Lema 2.5. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua, entonces f induce homomorfismos $f_n : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{f_n} & C_n(Y) \\ \partial_n \downarrow & & \downarrow \partial_n \\ C_{n-1}(X) & \xrightarrow{f_{n-1}} & C_{n-1}(Y). \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Ejercicio para el lector. ◇

Observación. De acuerdo con el lema precedente, los homomorfismos f_n constituyen un homomorfismo de complejos

$$f_{\#} : C_{\bullet}(X) \rightarrow C_{\bullet}(Y)$$

y por tanto los grupos de homología singular también son funtoriales, más precisamente

Corolario 2.6. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua, entonces f induce homomorfismos $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ para toda n .

DEMOSTRACIÓN. Es una consecuencia inmediata del teorema 1.6. ◇

Observaciones

1. $\mathbf{1}_* = \mathbf{1}$, donde $\mathbf{1}$ es la función identidad (de un espacio topológico, de un grupo, etc.).
2. Si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ son funciones continuas entre espacios topológicos, entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Recuerde que dos funciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ son *homótopas* (que escribiremos $f \simeq g$) si existe una función continua $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $F(-, 0) = f$ y $F(-, 1) = g$; en tanto que dos espacios topológicos X e Y son *homótopos* u *homotópicamente equivalentes* si existen funciones $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ tales que $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$; en este caso decimos que f y g son *homotopías* entre X e Y .

Teorema 2.7. *Si $f, g : X \rightarrow Y$ son dos funciones homótopas, entonces $f_{\#}$ y $g_{\#}$ son homótopos y por tanto $f_* = g_*$.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que construir una colección de funciones $k = \{k_n\}$ que satisfagan las condiciones expresadas en la ecuación (1.8) y para esto necesitamos usar el hecho de que f y g son funciones homótopas entre espacios topológicos, es decir, usar la existencia de una función continua

$$F : X \times I \rightarrow Y$$

tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$ para toda $x \in X$, donde $I = [0, 1]$.

La idea es simple:

- Para cada función continua $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ se tiene de manera canónica la composición

$$\Delta^n \times I \xrightarrow{\sigma \times 1} X \times I \xrightarrow{F} Y$$

Si construimos una triangulación de $\Delta^n \times I$ en $n + 1$ simplejos, la restricción de la composición $F \circ (\sigma \times 1)$ a cada uno de estos simplejos puede interpretarse como una función continua de Δ^{n+1} en Y y por tanto la suma alternada de estas restricciones sobre todos los $n + 1$ simplejos de la triangulación será un elemento de $C_{n+1}(Y)$ asociado a σ , lo que nos permite definir el homomorfismo k_n extendiendo la definición de manera aditiva.

- El segundo paso será demostrar que las funciones k_n así definidas satisfacen la ecuación (1.8) y por ello definen una homotopía entre $f_{\#}$ y $g_{\#}$.

Comencemos pues por construir la triangulación de $\Delta^n \times I$. Denotemos por $[v_0, \dots, v_n]$ al n simplejo $\Delta^n \times \{0\} \subset \Delta^n \times I$ y por $[w_0, \dots, w_n]$ al n simplejo $\Delta^n \times \{1\} \subset \Delta^n \times I$, donde v_i y w_i corresponden al mismo vértice de Δ^n bajo la proyección al primer factor; entonces, para cada i , el simplejo $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$ es un $n + 1$ simplejo homeomorfo a Δ^{n+1} , pues los primeros i vértices están en el hiperplano $\Delta^n \times \{0\}$ mientras que los últimos $n - i + 1$ vértices están en el hiperrplano $\Delta^n \times \{1\}$. Dejamos al lector verificar que si dos de ellos tienen intersección no vacía entonces se intersectan en una cara, así como verificar que la unión de estos $n + 1$ simplejos es precisamente $\Delta^n \times I$. Observe que

$$\begin{aligned} \partial_{n+1}([v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]) &= \sum_{j \leq i} (-1)^j [v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n] \\ &+ \sum_{j \geq i} (-1)^{j+1} [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_n] \end{aligned}$$

Definimos el homomorfismo $k_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$ como sigue:

$$\sigma \mapsto \sum_i (-1)^i F \circ (\sigma \times \mathbf{1})|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}$$

donde $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ es una función continua (i.e., un generador de $\Delta_n(X)$) y extendemos linealmente; entonces componiendo k_n con el operador frontera se tiene que

$$\begin{aligned} \partial \circ k_n(\sigma) &= \sum_{j \leq i} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times \mathbf{1})|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \\ &\quad + \sum_{j \geq i} (-1)^i (-1)^{j+1} F \circ (\sigma \times \mathbf{1})|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_n]} \end{aligned}$$

Por otro lado, si aplicamos primero el operador frontera y después k_{n-1} se obtiene

$$\begin{aligned} k_{n-1} \circ \partial(\sigma) &= \sum_{j < i} (-1)^{i-1} (-1)^j F \circ (\sigma \times \mathbf{1})|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \\ &\quad + \sum_{j > i} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times \mathbf{1})|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_n]} \end{aligned}$$

De modo que al sumarlos sólo sobreviven los términos correspondientes a $j = i$,

$$\begin{aligned} \partial \circ k_n(\sigma) + k_{n-1} \circ \partial(\sigma) &= \sum_i (-1)^{2i} F \circ (\sigma \times \mathbf{1})|_{[v_0, \dots, v_{i-1}, w_i, \dots, w_n]} \\ &\quad + \sum_i (-1)^{2i+1} F \circ (\sigma \times \mathbf{1})|_{[v_0, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n]} \end{aligned}$$

es decir

$$\partial \circ k_n(\sigma) + k_{n-1} \circ \partial(\sigma) = \sum_i (F \circ (\sigma \times \mathbf{1})|_{[v_0, \dots, v_{i-1}, w_i, \dots, w_n]} - F \circ (\sigma \times \mathbf{1})|_{[v_0, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n]})$$

que es una suma telescópica en la cual sólo sobreviven el primer y el último término, por lo que reduciendo la expresión se obtiene

$$\begin{aligned} \partial \circ k_n(\sigma) + k_{n-1} \circ \partial(\sigma) &= F \circ (\sigma \times \mathbf{1})|_{[v_0, \dots, v_n]} - F \circ (\sigma \times \mathbf{1})|_{[w_0, \dots, w_n]} \\ &= f \circ \sigma - g \circ \sigma \\ &= f_n(\sigma) - g_n(\sigma). \end{aligned}$$

◇

Corolario 2.8. Si $f : X \rightarrow Y$ es una homotopía, entonces el homomorfismo inducido $f_* : H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$ es un isomorfismo para toda i .

DEMOSTRACIÓN. Sea $g : Y \rightarrow X$ una inversa homotópica de f ; entonces por hipótesis $g \circ f \simeq \mathbf{1}_X$ y $f \circ g \simeq \mathbf{1}_Y$, por tanto, de las observaciones posteriores al corolario 2.6 y el teorema anterior se tiene que $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = \mathbf{1}_* = \mathbf{1}$ en $H_i(X)$ y análogamente $f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = \mathbf{1}_* = \mathbf{1}$ en $H_i(Y)$. \diamond

Corolario 2.9. Si X es un espacio contráctil, entonces $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ y $H_i(X) = 0$ para todo $i > 0$; en particular esto es cierto si $X = \mathbb{R}^n$ así como para $X = \mathbb{C}^n$. \diamond

En ocasiones es conveniente trabajar con una versión ligeramente modificada de la homología singular, en la que todos los grupos de homología del espacio que consta de un solo punto sean cero.

Definición. Dado un espacio topológico $X \neq \emptyset$, la homología del complejo aumentado

$$\dots \longrightarrow C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

donde $\epsilon(\sum_i n_i \sigma_i) = \sum_i n_i$, se llama la *homología reducida* de X . Al n -ésimo grupo de homología de este complejo lo denotaremos mediante $\tilde{H}_n(X)$.

Observación. $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$ para todo $n \geq 1$ y, si X es arcoconexo, entonces $\tilde{H}_0(X) = 0 \neq \mathbb{Z} = H_0(X)$.

2.3. Homología singular vs. homología simplicial

Como acabamos de ver, la homología singular tiene muchas propiedades importantes, en particular es funtorial y es invariante ante homotopía; estas son propiedades que nos gustaría tener siempre, pues nos permiten pasar de un espacio topológico a otro, en principio más simple, sin perder información sobre su homología; sin embargo, calcular grupos de homología singular puede volverse una pesadilla, pues los grupos $C_n(X)$ son infinitamente generados y no hay ninguna razón a priori para que los cocientes que definen a los grupos de homología sean finitamente generados; por otra parte, los grupos de homología simplicial son finitamente generados en un buen número de situaciones, por tanto la homología simplicial es finitamente generada en muchos casos. En un mundo ideal, ambos grupos de homología deberían coincidir, lo que nos permitiría concluir por un lado que los grupos de homología singular son

finitamente generados en un buen número de casos y, por otra, que los grupos de homología simplicial son invariantes bajo homotopía y en particular no dependen de la triangulación elegida.

Afortunadamente, el mundo ideal en ocasiones es posible y lo que demostraremos en esta sección es que ambos grupos de homología coinciden.

Recordemos que si $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ son funciones continuas, entonces f y g inducen homomorfismos $f_{\#} : C_{\bullet}(X) \rightarrow C_{\bullet}(Y)$ y $g_{\#} : C_{\bullet}(Y) \rightarrow C_{\bullet}(Z)$, que a su vez inducen homomorfismos de grupos de homología $f_* : h_i(X) \rightarrow h_i(Y)$ y $g_* : h_i(Y) \rightarrow h_i(Z)$, como se demostró en el corolario 2.6.

Una pregunta razonable es: ¿bajo qué circunstancias los homomorfismos $f_{\#}$ y $g_{\#}$ dan lugar a una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow C_{\bullet}(X) \xrightarrow{f_{\#}} C_{\bullet}(Y) \xrightarrow{g_{\#}} C_{\bullet}(Z) \longrightarrow 0$$

lo que a su vez daría lugar a una sucesión exacta larga de homología, como vimos en el corolario 1.8?

Dados un espacio topológico X y un subespacio $Y \subset X$, la inclusión $Y \hookrightarrow X$ induce un homomorfismo inyectivo de grupos $C_n(Y) \rightarrow C_n(X)$ vía la composición con la inclusión, por lo que podemos considerar al primero como un subgrupo del segundo. Más aún, el homomorfismo frontera ∂_n de $C_n(X)$ restringido al subgrupo $C_n(Y)$ coincide con el homomorfismo frontera de $C_n(Y)$, por tanto se tiene un monomorfismo de complejos $C_{\bullet}(Y) \rightarrow C_{\bullet}(X)$, el cual nos permite hacer la siguiente definición:

Definición. Dados un espacio topológico X y un subespacio $Y \subset X$, definimos

el *complejo de cadenas relativas* $C_{\bullet}(X, Y)$ mediante $C_n(X, Y) := \frac{C_n(X)}{C_n(Y)}$, con la diferencial inducida $\bar{\partial}$. A la homología de este complejo se le conoce como la *homología relativa* de X con respecto a Y y a los grupos de homología los denotaremos mediante $H_n(X, Y)$.

Se sigue de la definición de $C_n(X, Y)$ que para todo n hay una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow C_n(Y) \longrightarrow C_n(X) \longrightarrow C_n(X, Y) \longrightarrow 0$$

por lo que se tiene una sucesión exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow C_{\bullet}(Y) \longrightarrow C_{\bullet}(X) \longrightarrow C_{\bullet}(X, Y) \longrightarrow 0$$

y por ende una sucesión exacta larga de grupos de homología,

$$\dots \longrightarrow H_i(Y) \longrightarrow H_i(X) \longrightarrow H_i(X, Y) \xrightarrow{\delta} H_{i-1}(Y) \longrightarrow \dots$$

de acuerdo al corolario 1.8.

Observación.

1. Si $Y = \emptyset$, entonces $H_n(Y) = 0$ y $H_n(X) \cong H_n(X, \emptyset)$ para toda n .
2. Si $\emptyset \neq Y \subset X$ y reemplazamos la sucesión exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow C_\bullet(Y) \longrightarrow C_\bullet(X) \longrightarrow C_\bullet(X, Y) \longrightarrow 0$$

por la sucesión exacta corta de complejos que se obtiene al aumentarle a esa sucesión la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{1_Z} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$ en grado -1 vía los morfismos ϵ , obtenemos una sucesión exacta larga de homología relativa,

$$\dots \longrightarrow \bar{H}_i(Y) \longrightarrow \bar{H}_i(X) \longrightarrow \bar{H}_i(X, Y) \xrightarrow{\delta} \bar{H}_{i-1}(Y) \longrightarrow \dots$$

en la cual $\bar{H}_n(X, Y) = H_n(X, Y)$ para toda n .

Ejemplo 2.7. Para todo espacio topológico $X \neq \emptyset$ y para todo punto $x \in X$ se tiene $H_n(X, x) \cong \bar{H}_n(X)$ para todo $n \geq 0$ pues $\bar{H}_n(x) = 0$ para todo n .

Proposición 2.10. Si $f : (X, Y) \longrightarrow (Z, W)$ es una función continua entre pares, es decir, si $f : X \longrightarrow Z$ es una función continua tal que $f(Y) \subset W$, entonces f induce homomorfismos $f_* : H_n(X, Y) \longrightarrow H_n(Z, W)$ para todo entero $n \geq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Puesto que $f(Y) \subset W$, entonces $f_\#(C_n(Y)) \subset C_n(W)$ para todo n y por tanto induce un homomorfismo $\bar{f}_\# : C_\bullet(X, Y) \longrightarrow C_\bullet(Z, W)$. \diamond

Proposición 2.11. Si $f, g : (X, Y) \longrightarrow (Z, W)$ son homótopos a través de funciones continuas entre pares, entonces los homomorfismos $f_*, g_* : H_n(X, Y) \longrightarrow H_n(Z, W)$ son iguales para todo entero $n \geq 0$.

DEMOSTRACIÓN. La homotopía $k = \{k_n\}$ construida en la demostración del teorema 2.7 satisface $k_n(C_n(Y)) \subset C_n(W)$ y por tanto induce una homotopía $\bar{k} = \{\bar{k}_n\}$, con $\bar{k}_n : C_n(X, Y) \longrightarrow C_n(Z, W)$ tal que $\partial \circ \bar{k}_n + \bar{k}_{n-1} \circ \partial = g_\# - f_\#$, es decir $g_\#$ y $f_\#$ son homótopos y por tanto $g_* = f_*$. \diamond

Observación.

1. Si $Z \subset Y \subset X$, entonces $C_n(Z) < C_n(Y) < C_n(X)$ para toda n y el tercer teorema de isomorfismo de grupos equivale a las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \frac{C_n(Y)}{C_n(Z)} \longrightarrow \frac{C_n(X)}{C_n(Z)} \longrightarrow \frac{C_n(X)}{C_n(Y)} \longrightarrow 0$$

que dan lugar a la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow C_\bullet(Y, Z) \longrightarrow C_\bullet(X, Z) \longrightarrow C_\bullet(X, Y) \longrightarrow 0$$

que a su vez induce una sucesión exacta larga de grupos de homología

$$(2.1) \dots \longrightarrow H_i(Y, Z) \longrightarrow H_i(X, Z) \longrightarrow H_i(X, Y) \longrightarrow H_{i-1}(Y, Z) \longrightarrow \dots$$

2. Si $(X, Y) \simeq (U, V)$ son parejas homótopas (i.e., existen $f : (X, Y) \longrightarrow (U, V)$ y $g : (U, V) \longrightarrow (X, Y)$ funciones continuas tales que $g \circ f \simeq \mathbf{1}_X$ y $f \circ g \simeq \mathbf{1}_Y$ son homotopías entre pares), entonces $H_k(X, Y) \cong H_k(U, V)$ para toda k .

Dado un espacio topológico X , sea $\mathcal{U} = \{U_i\}$ una colección de subespacios cuyos interiores forman una cubierta abierta de X y sea

$$C_n^{\mathcal{U}}(X) := \left\{ \sum_j n_j \sigma_j \mid \text{Im } \sigma_j \subset U_i \text{ para algún } i \right\}$$

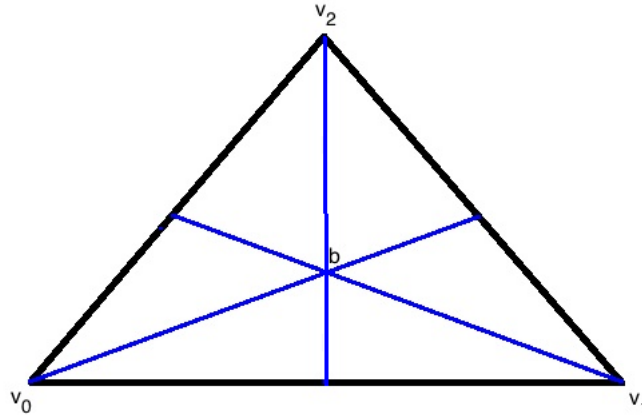
Observe que $\partial_n(C_n^{\mathcal{U}}(X)) \subset C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$ y de este modo $C_\bullet^{\mathcal{U}}(X)$ es un subcomplejo del complejo $C_\bullet(X)$. A la homología de este complejo la denotaremos mediante $H_n^{\mathcal{U}}(X)$.

Nuestro objetivo inmediato es comparar los grupos de homología $H_n^{\mathcal{U}}(X)$ y $H_n(X)$; para ello necesitaremos usar un proceso conocido como *subdivisión baricéntrica*.

- I. *Subdivisión baricéntrica de simplejos.* Recuerde que los puntos del simplejo $[v_0, \dots, v_n]$ son combinaciones lineales de la forma $\sum_i t_i v_i$, con $\sum_i t_i = 1$ y $t_i \geq 0$ para toda i ; en particular $b = \frac{1}{n+1} \sum_i v_i$ es el baricentro del simplejo. La subdivisión baricéntrica del simplejo $[v_0]$ es sencillamente el simplejo $[v_0]$. Para el simplejo $[v_0, v_1]$, la división baricéntrica consta de los simplejos $[v_0, b]$ y $[b, v_1]$, donde b es el varicentro del simplejo $[v_0, v_1]$.

$$v_0 \text{ --- } \bullet^b \text{ --- } v_1$$

La subdivisión baricéntrica del simplejo $[v_0, v_1, v_2]$ consta de los 2-simplejos



cuyos vértices son los baricentros de los subsimplejos de $[v_0, v_1, v_2]$ de dimensión k , con $k = 0$ ó 1 , como se ilustra en el diagrama siguiente.

Los vértices de los simplejos en la división baricéntrica de $[v_0, \dots, v_n]$ son precisamente los baricentros de las caras $[v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$ de dimensión k del simplejo $[v_0, \dots, v_n]$, con $0 \leq k \leq n$. Cuando $k = 0$ estos vértices son vértices del simplejo original.

Los n -simplejos de la subdivisión baricéntrica de Δ^n , junto con todas sus caras, constituyen una estructura de Δ complejo en Δ^n .

Observe que el diámetro de cada simplejo en la subdivisión baricéntrica de $[v_0, \dots, v_n]$ es menor o igual a $n/(n+1)$ veces el diámetro de $[v_0, \dots, v_n]$. En efecto, el diámetro de un simplejo es la distancia máxima entre dos de sus puntos, la cuál coincide con la distancia máxima entre dos de sus vértices. Si ninguno de los vértices w_j y w_k de un subsimplejo $[w_0, \dots, w_n]$ es el baricentro de $[v_0, \dots, v_n]$, entonces estos vértices caen en una cara y al menos uno de ellos no es uno de los vértices originales, así que la conclusión se sigue por inducción en la dimensión del simplejo, siendo evidente para dimensión uno. Si digamos w_k es el baricentro de $[v_0, \dots, v_n]$, entonces $w_k = 1/(n+1) \sum_i v_i$ y además

$$\begin{aligned} |w_k - w_j| &= |w_k - \sum_i t_i v_i| = |\sum_i t_i w_k - \sum_i t_i v_i| = |\sum_i t_i (w_k - v_i)| \\ &\leq \sum_i |t_i (w_k - v_i)| \leq \sum_i t_i \max |w_k - v_i| = \max |w_k - v_i| \end{aligned}$$

por tanto, sin pérdida de generalidad podemos suponer que de hecho $w_j = v_i$

para algún i . Sea $b_i = 1/n \sum_{j \neq i} v_j$ el baricentro del subsimplejo $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ que se obtiene al eliminar el vértice v_i ; entonces $b = \frac{1}{n+1}v_i + \frac{n}{n+1}b_i$ y además

$$|v_i - b| = \left| \frac{n+1}{n+1}v_i - \frac{1}{n+1}v_i - \frac{n}{n+1}b_i \right| = \frac{n}{n+1}|v_i - b_i|,$$

por tanto $|v_i - b| \leq \frac{n}{n+1} \times \text{diámetro de } [v_0, \dots, v_n]$.

II. *Subdivisión baricéntrica de cadenas lineales.* Sea Y un conjunto convexo; entonces las funciones lineales $\Delta^n \rightarrow Y$ generan un subgrupo de $C_n(Y)$, al que llamaremos el *subgrupo de cadenas lineales* y que denotaremos mediante $LC_n(Y)$. Observe que el operador frontera manda cadenas lineales en cadenas lineales, es decir $\partial|_{LC_n(Y)} : LC_n(Y) \rightarrow LC_{n-1}(Y)$, de modo que $LC_\bullet(Y)$ es un subcomplejo del complejo $C_\bullet(Y)$.

Si $\sigma : \Delta^n \rightarrow Y$ es una función lineal, entonces $\sigma(\sum_i t_i e_i) = \sum_i t_i \sigma(e_i)$ y la imagen de σ está completamente determinada por la imagen de los vértices de Δ^n , es decir, σ está completamente determinada por el simplejo $[w_0, \dots, w_n]$, donde $w_k = \sigma(e_k)$. Para simplificar la notación, aumentaremos el complejo $LC_\bullet(Y)$ agregándole $LC_{-1}(Y) := \mathbb{Z}$, generado por el simplejo $[\emptyset]$ y haciendo $\partial[v_0] = [\emptyset]$ para todo 0-simplejo $[v_0]$.

Cada punto $b \in Y$ determina un homomorfismo $b : LC_n(Y) \rightarrow LC_{n+1}(Y)$ definido en los elementos básicos mediante $b([w_0, \dots, w_n]) = [b, w_0, \dots, w_n]$.

Lema 2.12. *Para todo $b \in Y$ se cumple que $\partial b + b\partial = \mathbf{1}_{LC_n(Y)}$.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, si aplicamos el operador frontera al simplejo $[b, w_0, \dots, w_n]$ obtenemos

$$\begin{aligned} \partial([b, w_0, \dots, w_n]) &= [w_0, \dots, w_n] - \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} [b, w_0, \dots, \hat{w}_i, \dots, w_n] \\ &= [w_0, \dots, w_n] - b(\partial([w_0, \dots, w_n])) \end{aligned}$$

y por linealidad se tiene que $\partial(b(\sigma)) = \sigma - b(\partial\sigma)$ para todo $\sigma \in LC_n(Y)$. \diamond

Definiremos ahora, por inducción, un homomorfismo $S : LC_\bullet \rightarrow LC_\bullet$ del complejo aumentado en si mismo. $S : LC_{-1}(Y) \rightarrow LC_{-1}(Y)$ se define mediante $S([\emptyset]) = [\emptyset]$, es decir S es la identidad en este nivel del complejo aumentado.

En general, si $\sigma : \Delta^n \rightarrow Y$ es una función lineal, sea b_σ la imagen bajo σ del baricentro $b = \frac{1}{n+1} \sum_i e_i$ de Δ^n y definimos $S(\sigma) := b_\sigma(S(\partial\sigma))$. Observe que $S([w_0]) = w_0(S(\partial[w_0])) = w_0([\emptyset]) = [w_0]$, es decir $S : LC_0(Y) \rightarrow LC_0(Y)$ también es la identidad.

Lema 2.13. *S satisface $S\partial = \partial S$.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, como S es la identidad tanto en $LC_0(Y)$ como en $LC_{-1}(Y)$, se cumple que $\partial S = S\partial$ en $LC_0(Y)$. Si $n > 0$, entonces, puesto que $\partial(y(\sigma)) = \sigma - y(\partial\sigma)$, para todo $\sigma : \Delta^n \rightarrow Y$ lineal se tiene que

$$\begin{aligned} \partial S\sigma &:= \partial(b_\sigma(S\partial\sigma)) \\ &= S\partial\sigma - b_\sigma(\partial S\partial\sigma) \\ &= S\partial\sigma - b_\sigma(S\partial\partial\sigma) \\ &= S\partial\sigma \end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se cumple por inducción y la última se cumple pues $\partial\partial = 0$. \diamond

Proposición 2.14. *$S \simeq \mathbf{1}$ en el complejo aumentado $LC_\bullet(Y)$.*

DEMOSTRACIÓN. Necesitamos construir una homotopía $T : LC_n(Y) \rightarrow LC_{n+1}(Y)$ para $n \geq -1$ entre la identidad y S . Para $n = -1$ definamos $T = 0$ y definamos $T\sigma := b_\sigma(\sigma - T\partial\sigma)$ para $n \geq 0$, entonces como $S = \mathbf{1}$ y $T = 0$ en $LC_{-1}(Y)$, evidentemente se cumple $\partial T + T\partial = \mathbf{1} - S$ para $n = -1$. Si $n \geq 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \partial T\sigma &= \partial(b_\sigma(\sigma - T\partial\sigma)) \\ &= (\sigma - T\partial\sigma) - b(\partial(\sigma - T\partial\sigma)) && \text{por el lema 2.12} \\ &= (\sigma - T\partial\sigma) - bS(\partial\sigma) - b(T\partial)(\partial\sigma) && \text{por inducción en } n \\ &= (\sigma - T\partial\sigma) - bS\partial\sigma && \text{pues } \partial\partial = 0 \\ &= (\sigma - T\partial\sigma) - S\sigma && \text{por la definición inductiva de } S. \end{aligned}$$

\diamond

III . *Subdivisión baricéntrica de cadenas generales.* Extendemos el operador S a un morfismo $S : C_n(X) \longrightarrow C_n(X)$ mediante la fórmula $S(\sigma) = \sigma_{\#}S(\Delta^n)$ para toda función continua $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$. El operador S así definido es un morfismo de cadenas pues

$$\begin{aligned}
\partial S\sigma &= \partial\sigma_{\#}S\Delta^n \\
&= \sigma_{\#}\partial S\Delta^n && \text{pues } \sigma_{\#} \text{ es un morfismo de cadenas} \\
&= \sigma_{\#}S\partial\Delta^n && \text{en virtud del lema 2,13} \\
&= \sigma_{\#}S(\sum_i(-1)^i\Delta_i^n) && \text{donde } \Delta_i^n \text{ es la } i\text{-ésima cara de } \Delta^n \\
&= \sum_i(-1)^i\sigma_{\#}S\Delta_i^n \\
&= \sum_i(-1)^iS\sigma|_{\Delta_i^n} \\
&= S(\sum_i(-1)^i\sigma|_{\Delta_i^n}) \\
&= S(\partial\sigma)
\end{aligned}$$

Análogamente, definimos $T : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X)$ mediante la fórmula $T(\sigma) := \sigma_{\#}T\Delta^n$, que es una homotopía entre S y la identidad pues

$$\begin{aligned}
\partial T\sigma &= \partial\sigma_{\#}T\Delta^n = \sigma_{\#}\partial T\Delta^n \\
&= \sigma_{\#}(\Delta^n - S\Delta^n - T\partial\Delta^n) \\
&= \sigma - S\sigma - \sigma_{\#}T\partial\Delta^n \\
&= \sigma - S\sigma - T(\partial\sigma)
\end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se cumple en virtud de que T es una homotopía entre S y la identidad para cadenas lineales, la cuarta igualdad es el cálculo precedente y la última igualdad se demuestra mediante un cálculo similar al que se hizo para S y σ .

IV . *Subdivisiones iteradas.* Si $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$ es una función continua, entonces la cubierta $\mathcal{U} = \{U_i\}$ de X induce una cubierta $\{\sigma^{-1}(U_i)\}$ de Δ^n y, puesto que el diámetro en cada complejo de la subdivisión baricéntrica de Δ^n es menor o igual a $\frac{n}{n+1}$ veces el diámetro original, para todo $\epsilon > 0$ existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{n}{n+1})^r \times (\text{diámetro de } \Delta^n) < \epsilon$, por tanto existe un entero positivo m tal que $S^m(\sigma) \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$. Este m depende de σ , por lo que denotaremos por $m(\sigma)$ al

menor entero positivo tal que $S^m(\sigma) \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$.

Observe que S^m es homótopo a la identidad mediante $T_m = \sum_{0 \leq i < m} TS^i$, pues

$$\begin{aligned} \partial T_m + T_m \partial &= \sum_{0 \leq i < m} (\partial TS^i + TS^i \partial) = \sum_{0 \leq i < m} (\partial TS^i + T \partial S^i) \\ &= \sum_{0 \leq i < m} (\partial T + T \partial) S^i = \sum_{0 \leq i < m} (\mathbf{1} - S) S^i \\ &= \sum_{0 \leq i < m} (S^i - S^{i+1}) = \mathbf{1} - S^m. \end{aligned}$$

Proposición 2.15. *La inclusión $C_{\bullet}^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{i} C_{\bullet}(X)$ es una homotopía, por tanto los grupos de homología $H_n(X)$ y $H_n^{\mathcal{U}}(X)$ son isomorfos para toda n .*

DEMOSTRACIÓN. Construiremos un homomorfismo $\rho : C_{\bullet}(X) \rightarrow C_{\bullet}^{\mathcal{U}}(X)$ tal que $i \circ \rho \simeq \mathbf{1}$ y $\rho \circ i \simeq \mathbf{1}$. Manteniendo la notación de la discusión precedente, definamos un operador $D : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$ como $D(\sigma) := T_{m(\sigma)}(\sigma)$ y veamos que define una homotopía.

En efecto, sabemos que para todo entero m , T_m es una homotopía entre la identidad y S^m , por tanto, para cada función continua $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ se tiene

$$\partial T_{m(\sigma)} \sigma + T_{m(\sigma)} \partial \sigma = \sigma - S^{m(\sigma)} \sigma$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \partial D \sigma + D \partial \sigma &= \sigma - S^{m(\sigma)} \sigma - T_{m(\sigma)} \partial \sigma + D \partial \sigma \\ (2.2) \qquad &= \sigma - [S^{m(\sigma)} \sigma + T_{m(\sigma)} \partial \sigma - D \partial \sigma] \\ &= \sigma - \rho(\sigma), \end{aligned}$$

donde $\rho(\sigma) := S^{m(\sigma)} \sigma + T_{m(\sigma)} \partial \sigma - D \partial \sigma$.

A) Afirmamos que $\rho : C_n(X) \rightarrow C_n^{\mathcal{U}}(X)$, es decir, $\rho(\sigma) \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$ para todo σ . $S^{m(\sigma)}(\sigma) \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$ por definición de $m(\sigma)$. Para el término $T_{m(\sigma)} \partial \sigma - D \partial \sigma$, observemos que si σ' es la restricción de σ a una cara de Δ^n , entonces $m(\sigma') \leq m(\sigma)$, así que todos los sumandos de la forma $TS^i(\sigma')$ que aparecen en la expresión de $D \partial \sigma$ aparecen también, con el mismo signo, en la expresión de $T_{m(\sigma)}(\partial \sigma)$, por lo que $T_{m(\sigma)} \partial \sigma - D \partial \sigma$ es una suma de términos de la forma $TS^i(\sigma')$ con $i \geq m(\sigma')$ y estos términos caen en $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ por definición de $m(\sigma')$ y porque T manda $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$

en $C_n^{\mathcal{U}}(X)$.

B) Como $\partial D\sigma + D\partial\sigma = \sigma - \rho(\sigma)$, entonces $\partial\rho(\sigma) = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma = \rho(\partial\sigma)$ y ρ es un morfismo de cadenas.

C) La ecuación 2.2 se puede reescribir como $\partial D + D\partial = \mathbf{1} - i \circ \rho$, donde i es la inclusión natural $C_n^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C_n(X)$. Más aún, si $\sigma \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$, entonces $m(\sigma) = 0$ y por tanto $D\sigma = D\partial\sigma = 0$, por lo que la ecuación 2.2 nos dice que $\rho \circ i = \mathbf{1}$, es decir, $i \circ \rho \simeq \mathbf{1}$ y $\rho \circ i \simeq \mathbf{1}$. \diamond

Corolario 2.16. Teorema de escisión Sean $Z \subset Y \subset X$ subespacios topológicos tales que la cerradura de Z , está contenida en el interior de Y ; entonces la inclusión $(X - Z, Y - Z) \hookrightarrow (X, Y)$ induce isomorfismos $H_n(X - Z, Y - Z) \rightarrow H_n(X, Y)$ para todo entero n . Equivalentemente, si Y y B son dos subespacios de X cuyos interiores cubren a X , entonces la inclusión $(B, Y \cap B) \hookrightarrow (X, Y)$ induce isomorfismos $H_n(B, Y \cap B) \rightarrow H_n(X, Y)$ para todo n .

DEMOSTRACIÓN. I) Observe primero que si escribimos $B = X - Z$ y $Z = X - B$, entonces $Y \cap B = Y - Z$ y, puesto que $\bar{Z} = X - B^0$, la condición $\bar{Z} \subset Y^0$ equivale a $X = Y^0 \cup B^0$.

II) Demostremos la segunda versión del teorema de escisión. Considere el cubriente de X dado por $\mathcal{U} = \{Y, B\}$, entonces $H_n(X) \cong H_n^{\mathcal{U}}(X)$ por la proposición 2.15 y además se tiene

$$\partial D + D\partial = \mathbf{1} - i \circ \rho \quad \text{y} \quad \rho \circ i = \mathbf{1}.$$

Como todos los homomorfismos en las ecuaciones precedentes llevan cadenas en Y a cadenas en Y , inducen homomorfismos en el cociente $C_n^{\mathcal{U}}(X)/C_n(Y)$, que también satisfacen las dos ecuaciones, de modo que la inclusión

$$C_n^{\mathcal{U}}(X)/C_n(Y) \hookrightarrow C_n(X)/C_n(Y)$$

también es una homotopía, en particular las homologías de estos complejos son isomorfos. Por otra parte, la inclusión $(B, Y \cap B) \hookrightarrow (X, Y)$ induce isomorfismos

$$C_n(B)/C_n(B \cap Y) \rightarrow C_n^{\mathcal{U}}(X)/C_n(Y),$$

pues ambos grupos cocientes son libres generados por los n -simplejos en B que no caen en Y ; por tanto se tienen los isomorfismos deseados, $H_n(B, B \cap Y) \cong H_n(X, Y)$ inducidos por la inclusión. \diamond

Proposición 2.17. *Si (X, Y) es un buen par, la proyección $q : (X, Y) \rightarrow (X/Y, Y/Y)$ induce isomorfismos $q_* : H_n(X, Y) \rightarrow H_n(X/Y, Y/Y) \cong \tilde{H}_n(X/Y)$ para toda n .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $V \subset X$ una vecindad abierta que se retrae por deformación a Y , entonces tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, Y) & \xrightarrow{u_*} & H_n(X, V) & \xleftarrow{v} & H_n(X - Y, V - Y) \\ \downarrow q_* & & \downarrow q_* & & \downarrow q_* \\ H_n(X/Y, Y/Y) & \xrightarrow{\tilde{u}_*} & H_n(X/Y, V/Y) & \xleftarrow{\tilde{v}} & H_n(X/Y - Y/Y, V/Y - Y/Y) \end{array}$$

Puesto que V se retrae por deformación a Y , entonces $(V, Y) \simeq (Y, Y)$ y por tanto $H_n(V, Y) = H_n(Y, Y) = 0$ para todo n , en la sucesión exacta larga asociada al triplete (X, V, Y) , por lo que u_* es un isomorfismo. Más aún, la retracción de V en Y induce una retracción de V/Y en Y/Y , por lo que \tilde{u}_* también es un isomorfismo. Los homomorfismos v y \tilde{v}_* son isomorfismos por el lema de escisión 2.16, en tanto que el homomorfismo vertical de la derecha es un isomorfismo porque el cociente $q : X \rightarrow X/Y$ es un homeomorfismo fuera de Y . Como el diagrama conmuta y todos los homomorfismos horizontales son isomorfismos lo mismo que el homomorfismo vertical de la derecha, entonces el homomorfismo vertical del centro es isomorfismo y en consecuencia el homomorfismo vertical de la izquierda también es un isomorfismo. \diamond

Corolario 2.18. *Si X es un espacio topológico e $Y \subset X$ es un subespacio cerrado no vacío el cual es un retracto por deformación de una vecindad en X , entonces existe una sucesión exacta larga*

$$\dots \longrightarrow \tilde{H}_n(Y) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_n(X/Y) \xrightarrow{\partial} \dots \longrightarrow \tilde{H}_0(X/Y) \longrightarrow 0$$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la sucesión exacta larga 2.1. \diamond

Corolario 2.19.

$$\tilde{H}_k(S^n) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ \mathbb{Z} & \text{si } k = n. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Si $n > 0$ considere el par $(\Delta^n, \partial\Delta^n) \simeq (D^n, S^{n-1})$, entonces $\Delta^n/\partial\Delta^n \simeq D^n/S^{n-1} \simeq S^n$ y por el corolario precedente tenemos una sucesión exacta larga

$$\dots \longrightarrow \tilde{H}_k(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_k(\Delta^n) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_k(S^n) \xrightarrow{\partial} \dots \longrightarrow \tilde{H}_0(S^n) \longrightarrow 0$$

donde $\tilde{H}_k(\Delta^n) = 0$ para todo k pues Δ^n es contractil; por tanto se tienen isomorfismos $H_k(S^n) \cong H_{k-1}(S^{n-1})$ para todo $k \geq 1$ y para todo $n \geq 0$. El resultado se sigue por inducción en n , porque la homología reducida de un punto es trivial y $\tilde{H}_0(X)$ tiene $m - 1$ copias de \mathbb{Z} si X tiene m componentes conexas. \diamond

Lema 2.20.

$$H_k(\Delta^n, \partial\Delta^n) = \tilde{H}_k(\Delta^n, \partial\Delta^n) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ \mathbb{Z} & \text{si } k = n. \end{cases}$$

De hecho $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ es generado por la función identidad $\mathbf{1} : \Delta^n \rightarrow \Delta^n$.

DEMOSTRACIÓN. La primera afirmación se sigue inmediatamente en virtud de la proposición 2.17 y el corolario 2.19. Veamos que efectivamente la función identidad es un generador de $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ y procedamos por inducción en n .

En efecto, $\partial\mathbf{1} = 0$ pues estamos en cohomología relativa, entonces la clase de $\mathbf{1}_{\Delta^n} : \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ es un ciclo en $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ y, si $n = 0$, $\mathbf{1}_{\Delta^n}$ es de hecho un generador de la homología, pues la composición de funciones $\Delta^0 \rightarrow \Delta^0$ es compatible con la multiplicación en \mathbb{Z} y la identidad es el neutro para la composición.

Si $n > 0$ sea $\Lambda \subset \Delta^n$ la unión de todas las $n - 1$ caras de Δ^n excepto una; entonces se tienen isomorfismos

$$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \longrightarrow H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \longleftarrow H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$$

El homomorfismo de la izquierda es el homomorfismo de conexión en la sucesión exacta larga de cohomología relativa asociada al triplete $(\Delta^n, \partial\Delta^n, \Lambda)$ y resulta un isomorfismo porque $H_k(\Delta^n, \Lambda) = 0$ para todo k , pues Δ^n se retrae por deformación a Λ , por lo que $(\Delta^n, \Lambda) \simeq (\Lambda, \Lambda)$. El homomorfismo de la derecha es un isomorfismo de acuerdo con la proposición 2.17, pues la inclusión de $\Delta^{n-1} \hookrightarrow \partial\Delta^n$ como la cara que se omitió en Λ induce un homeomorfismo $\Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1} \simeq \partial\Delta^n/\Lambda$. Se concluye por inducción, pues la imagen del ciclo $\mathbf{1} : (\Delta^n, \partial\Delta^n) \rightarrow (\Delta^n, \partial\Delta^n)$ bajo el primer isomorfismo es el ciclo $\partial\mathbf{1} = \pm\mathbf{1}$ en $(\partial\Delta^n, \Lambda)$. \diamond

Mutatis mutandis, si $Y \subset X$, definimos complejos simpliciales relativos $\Delta_\bullet(X, Y)$ y grupos de homología simplicial relativa $H_k^\Delta(X, Y)$. Observe que las inclusiones naturales $\Delta_\bullet(X) \hookrightarrow C_\bullet(X)$ y $\Delta_\bullet(Y) \hookrightarrow C_\bullet(Y)$ dan lugar a un homomorfismo de complejos relativos $\Delta_\bullet(X, Y) \rightarrow C_\bullet(X, Y)$ y de hecho a un diagrama conmutativo de sucesiones exactas cortas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Delta_\bullet(Y) & \longrightarrow & \Delta_\bullet(X) & \longrightarrow & \Delta_\bullet(X, Y) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C_\bullet(Y) & \longrightarrow & C_\bullet(X) & \longrightarrow & C_\bullet(X, Y) \longrightarrow 0 \end{array}$$

que a su vez induce un diagrama conmutativo de sucesiones exactas largas

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H_{k+1}^\Delta(X, Y) & \longrightarrow & H_k^\Delta(Y) & \longrightarrow & H_k^\Delta(X) & \longrightarrow & H_k^\Delta(X, Y) & \longrightarrow & H_{k-1}^\Delta(Y) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & H_{k+1}(X, Y) & \longrightarrow & H_k(Y) & \longrightarrow & H_k(X) & \longrightarrow & H_k(X, Y) & \longrightarrow & H_{k-1}(Y) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Teorema 2.21. *Para todo par de Δ complejos (X, Y) con $Y \subset X$ un subcomplejo y X de dimensión finita, el morfismo de complejos $\Delta_\bullet(X, Y) \longrightarrow C_\bullet(X, Y)$ es un casi isomorfismo, es decir, para todo k el homomorfismo $H_k^\Delta(X, Y) \longrightarrow H_k(X, Y)$ es un isomorfismo; en particular $H_k^\Delta(X) \cong H_k(X)$, para todo Δ complejo X de dimensión finita.*

DEMOSTRACIÓN. I). Supongamos que X es un Δ complejo de dimensión finita e $Y = \emptyset$; entonces si X^k es el k esqueleto de X , que consiste de todos los simplejos de X de dimensión $\leq k$, se tiene un diagrama conmutativo de sucesiones exactas

$$\begin{array}{ccccccccc}
 H_{n+1}^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & H_n^\Delta(X^{k-1}) & \xrightarrow{i_n} & H_n^\Delta(X^k) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \xrightarrow{\delta_n} & H_{n-1}^\Delta(X^{k-1}) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 H_{n+1}(X^k, X^{k-1}) & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & H_n(X^{k-1}) & \xrightarrow{i_n} & H_n(X^k) & \longrightarrow & H_n(X^k, X^{k-1}) & \xrightarrow{\delta_n} & H_{n-1}(X^{k-1})
 \end{array}$$

Observe que $\Delta_n(X^k) = 0$ si $n > k$ y $\Delta_n(X) = \Delta_n(X^{k-1})$ si $n < k$, así que $\Delta_n(X^k, X^{k-1}) = 0$ si $n \neq k$; por otra parte $\Delta_k(X^k, X^{k-1})$ es un grupo abeliano libre generado por los k simplejos de X , porque $\Delta_k(X^{k-1}) = 0$; de este modo $H_n^\Delta(X^k, X^{k-1}) = 0$ si $n \neq k$ mientras que $H_k^\Delta(X^k, X^{k-1})$ es un grupo abeliano libre generado por los k simplejos de X .

Por la proposición 2.17, $H_n(X^k, X^{k-1}) \cong \tilde{H}_n(X^k/X^{k-1})$, pero X^k/X^{k-1} es homeomorfo al cociente $\sqcup_\alpha \Delta_\alpha^k / \sqcup_\alpha \partial \Delta_\alpha^k$, donde $\alpha_k : \Delta^k \longrightarrow X$ son los k simplejos de X ; de este modo, en virtud del lema 2.20 se tiene

$$H_n(X^k, X^{k-1}) \cong \tilde{H}_n(X^k/X^{k-1}) \cong \oplus_\alpha \tilde{H}_k(\Delta^k/\partial \Delta^k) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k, \\ \oplus_\alpha \mathbb{Z} & \text{si } n = k; \end{cases}$$

en particular $H_k(X^k, X^{k-1})$ es el grupo abeliano libre generado por las identidades de los k -simplejos de X , por lo que el homomorfismo $H_k^\Delta(X^k, X^{k-1}) \longrightarrow H_k(X^k, X^{k-1})$ es un isomorfismo.

Por inducción en k podemos suponer que $H_j^\Delta(X^{k-1}) \longrightarrow H_j(X^{k-1})$ es un isomorfismo para todo j y, por el lema de la serpiente 1.7, concluimos que el homomorfismo

$H_n^\Delta(X^k) \longrightarrow H_n(X^k)$ es un isomorfismo para toda n , en particular $H_n^\Delta(X) \cong H_n(X)$ para toda n .

II) El caso general, con $Y \neq \emptyset$ se sigue del caso anterior por el lema de la serpiente 1.7 aplicado a la sucesión exacta larga de cohomología asociada al par (X, Y) .

Ejercicios

1. Demuestre que

$$\begin{aligned} H_0^\Delta(\mathbb{R}) &= \mathbb{Z} \\ H_k^\Delta(\mathbb{R}) &= 0 \quad \text{para todo } k \geq 1. \end{aligned}$$

2. Demuestre que

$$\begin{aligned} H_0^\Delta(\mathbb{R}^3) &= \mathbb{Z} \\ H_k^\Delta(\mathbb{R}^3) &= 0 \quad \text{para todo } k \geq 1. \end{aligned}$$

3. Demuestre que si dotamos a S^3 con la estructura de un Δ complejo dada por dos copias de Δ^3 en las que se identifican sus fronteras, entonces

$$H_3^\Delta(S^3) = \mathbb{Z}.$$

¿Qué puede decirse de los otros grupos de homología?

4. Demuestre que si $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo y X admite una Δ estructura, entonces Y admite una Δ estructura vía f , que induce un isomorfismo de homología simpliciales.

5. Demuestre el lema 2.2

6. Demuestre el lema 2.5

Sugerencia: Para $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$ continua, defina $f_n(\sigma) : \Delta^n \longrightarrow Y$ como $f \circ \sigma$, extienda de manera aditiva y demuestre que $\partial_n \circ f_n = f_{n-1} \partial_n$.

7. Demuestre que si los simplejos $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$ y $[v_0, \dots, v_j, w_j; \dots, w_n]$ construidos en el teorema 2.7 se intersectan, entonces se intersectan en una cara (es decir en un r simplejo con $r < n + 1$).

8. Demuestre que la unión de todos los $n + 1$ simplejos $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$ construidos en el teorema 2.7 es igual a $\Delta^n \times I$.

9. Calcule los grupos de homología singular H_0 y H_1 para $X = S^1$.

10. Dada una función $f : \Delta^n \rightarrow X$ del n -simplejo estandar en una variedad analítica X , diremos que f es *lisa* si existe una vecindad U de Δ^n y una función de clase C^∞ , $\bar{f} : U \rightarrow X$, tal que $\bar{f}|_{\Delta^n} = f$. Construimos el grupo de cadenas lisas $S_k(X) := \langle f : \Delta^k \rightarrow X \mid f \text{ es liso} \rangle \subset C_k(X)$. Demuestre que la imagen de la restricción del operador frontera $\partial|_{S_k(X)} : S_k(X) \rightarrow C_{k-1}(X)$ tiene su imagen en $S_{k-1}(X)$ y define de hecho un complejo $S_\bullet(X)$. A la homología de este complejo la denotaremos de momento como $H_*^S(X)$.
11. Demuestre que si X es homótopo a Y mediante una homotopía C^∞ , entonces $H_k^S(X) \cong H_k^S(Y)$ para todo k .
12. Defina la homología lisa de pares $H_*^S(X, Y)$ y verifique que ésta tiene sentido cuando Y es el k -esqueleto liso de X .
13. Defina de manera adecuada los grupos $S_k^{\mathcal{U}}(X)$ y demuestre que se tiene un complejo $S_\bullet^{\mathcal{U}}(X)$, cuya homología denotaremos como $H_*^{S^{\mathcal{U}}}(X)$.
14. Demuestre que $S_\bullet^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow S_\bullet(X)$ es una homotopía y por tanto los grupos $H_k^{S^{\mathcal{U}}}(X)$ y $H_k^S(X)$ son isomorfos para toda k .
Sugerencia: Adapte la demostración de la proposición 2.15.
15. Demuestre que la homología $H_*^S(X)$ satisface escisión.
Sugerencia: Vea la demostración del corolario 2.16.
16. Demuestre que $H_*^S(X) \cong H_*(X)$.
Sugerencia: Demuestre que $H_k^S(\{P\}) = 0$ para todo $k > 0$ y es \mathbb{Z} para $k = 0$, después proceda como en la demostración del teorema 2.21

Capítulo 3

Cohomología de De Rham

La definición de los grupos de homología, tanto simplicial como singular, involucró la construcción de complejos de grupos abelianos cuya homología es precisamente la homología que nos interesaba; resulta por tanto más o menos natural definir la *cohomología* de un espacio topológico X mediante la homología de un complejo de grupos abelianos que, de alguna manera, esté relacionado con el complejo a partir del cual se construyó la homología singular (o la simplicial).

Definición. Considere el dual $C^n(X, \mathbb{R}) := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_n(X), \mathbb{R})$, o más generalmente, dado un \mathbb{Z} -módulo R considere $C^n(X, R) := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_n, R)$; entonces, la precomposición con ∂_{n+1} define un homomorfismo de \mathbb{Z} -módulos (de hecho un homomorfismo de R -módulos si R admite una estructura de anillo):

$$C^n(X, R) \xrightarrow{d_n} C^{n+1}(X, R)$$

$$\psi \longmapsto \psi \circ \partial_{n+1}$$

Observemos que $d_{n+1} \circ d_n(\psi) = \psi \circ \partial_{n+1} \circ \partial_{n+2} = 0$ pues $\partial_{n+1} \circ \partial_{n+2} = 0$, de modo que tenemos un complejo

$$C^\bullet(X, R) : \quad \dots \xrightarrow{d_{n-1}} C^n(X, R) \xrightarrow{d_n} C^{n+1}(X, R) \xrightarrow{d_{n+1}} \dots$$

cuya homología llamaremos la *cohomología singular* de X . Más precisamente, al k -ésimo grupo de homología de este complejo lo llamaremos el k -ésimo grupo de cohomología (singular) de X con coeficientes en R y lo denotaremos como $H^k(X, R)$.

De inmediato se nos presentan dos preguntas naturales:

1. ¿ Existe alguna relación entre los grupos de cohomología $H^k(X, R)$ con los grupos $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_k(X), R)$?

2. ¿Qué sucede si en lugar de considerar el dual de $C_n(X)$ nos fijamos en el dual de $\Delta_n(X)$? Es decir, ¿si construimos el complejo $\Delta^\bullet(X, R)$, obtendremos complejos casi isomorfos que, en consecuencia, definan los mismos grupos de cohomología?

Evidentemente algunas propiedades de los grupos de homología singular se heredan por dualidad para los grupos $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_k(X), R)$, por ejemplo la trivialidad de la homología para espacios topológicos contráctiles induce la trivialidad de los duales $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_k(X), R)$ para estos mismos espacios, independientemente de quién es R . Por otra parte, el cálculo de estos grupos duales es esencialmente tan complicado como el cálculo de los grupos de homología singular.

Afortunadamente hay un buen número de casos en los que la homología del complejo $\Delta^\bullet(X, R)$ es isomorfa a la homología del complejo $C^\bullet(X, R)$ y además ambos grupos de homología coinciden con el grupo dual $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_k(X), R)$, aunque se tienen que imponer algunas condiciones en el \mathbb{Z} -módulo R , como veremos a continuación.

3.1. Dualidad y módulos inyectivos.

Considere un complejo de \mathbb{Z} -módulos de la forma

$$(3.1) \quad A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

y sea R un anillo conmutativo arbitrario; entonces, la precomposición induce un complejo

$$(3.2) \quad \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, R) \xleftarrow{\alpha^*} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, R) \xleftarrow{\beta^*} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C, R)$$

$$\phi \circ \beta \longleftarrow \phi$$

$$\psi \circ \alpha \longleftarrow \psi$$

Como $\beta \circ \alpha = 0$, entonces $\alpha^* \circ \beta^* = 0$ y se tiene, efectivamente, un complejo de R -módulos.

Lema 3.1. *Si el homomorfismo de \mathbb{Z} -módulos β en 3.1 es un epimorfismo, entonces el homomorfismo de R -módulos β^* en 3.2 es un monomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. $\beta^*(\psi) = \beta^*(\phi)$ si y sólo si $\psi \circ \beta = \phi \circ \beta$ si y sólo si $\psi = \phi$ pues β es un epimorfismo. \diamond

Observación. La inyectividad de α en 3.1, no garantiza en general la suprayectividad de α^* .

Lema 3.2. Si $\psi \in \text{Ker } \alpha^*$, entonces ψ induce $\psi_* : \frac{\text{Ker } \beta}{\text{Im } \alpha} \longrightarrow R$.

DEMOSTRACIÓN. $\psi \in \text{Ker } \alpha^*$ si y sólo si $\psi \circ \alpha = 0$, es decir, si y sólo si ψ se anula en la imagen de α , de modo que ψ induce de manera natural un homomorfismo $\bar{\psi} : \frac{B}{\text{Im } \alpha} \longrightarrow R$ y, por restricción, un homomorfismo $\psi_* : \frac{\text{Ker } \beta}{\text{Im } \alpha} \longrightarrow R$. \diamond

Lema 3.3. Si $\psi \in \text{Im } \beta^*$, entonces $\psi_* = 0$.

DEMOSTRACIÓN. $\psi \in \text{Im } \beta^*$ si y sólo si $\psi = \phi \circ \beta$ para algún homomorfismo $\phi : C \longrightarrow R$, pero entonces $\psi(b) = \phi \circ \beta(b) = 0$ para todo $b \in \text{Ker } \beta$. \diamond

Observación. El lema anterior muestra que existe un homomorfismo de R -módulos

$$\frac{\text{Ker } \alpha^*}{\text{Im } \beta^*} \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}} \left(\frac{\text{Ker } \beta}{\text{Im } \alpha}, R \right)$$

y la pregunta es entonces, cuándo este homomorfismo es un isomorfismo.

Definición. Un \mathbb{Z} -módulo Q se dice *inyectivo* si cada que se tiene un diagrama

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & A \xrightarrow{f} B \\ & & \downarrow g \\ & & Q \end{array}$$

con f inyectivo, existe un homomorfismo $\tilde{g} : B \longrightarrow Q$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & A \xrightarrow{f} B \\ & & \downarrow g \quad \swarrow \tilde{g} \\ & & Q \end{array}$$

comuta.

Ejemplo 3.1. \mathbb{Q}, \mathbb{R} y \mathbb{C} son \mathbb{Z} -módulos inyectivos. La verificación se deja al lector.

Proposición 3.4. Si Q es un \mathbb{Z} -módulo inyectivo, entonces el homomorfismo

$$\frac{\text{Ker } \alpha^*}{\text{Im } \beta^*} \xrightarrow{T} \text{Hom}_{\mathbb{Z}} \left(\frac{\text{Ker } \beta}{\text{Im } \alpha}, Q \right)$$

es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. I) Veamos primero que T es inyectivo.

En efecto, sea $\psi \in \text{Ker } \alpha^* \subset \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, Q)$ un representante de la clase $\overline{\psi}$; entonces $T(\overline{\psi}) := \psi_* = 0$ si y sólo si $\psi(b) = 0$ para todo $b \in \text{Ker } \beta$; en este caso, ψ induce un homomorfismo $\tilde{\psi} : \frac{B}{\text{Ker } \beta} \rightarrow Q$ dado por $[b] \mapsto \psi(b)$, para cualquier representante b de la clase $[b]$. Pero $\frac{B}{\text{Ker } \beta} \cong \text{Im } \beta \hookrightarrow C$, por lo que se tiene un diagrama

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Im } \beta & \longrightarrow & C \\ & & \tilde{\psi} \downarrow & & \\ & & Q & & \end{array}$$

Como $\text{Im } \beta \rightarrow C$ es un monomorfismo y Q es un módulo inyectivo, entonces existe $\hat{\psi} : C \rightarrow Q$ tal que el diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Im } \beta & \longrightarrow & C \\ & & \tilde{\psi} \downarrow & \searrow \hat{\psi} & \\ & & Q & & \end{array}$$

Si agregamos a este diagrama el morfismo $B \rightarrow \text{Im } \beta$ se tiene otro diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} B & & & & \\ & \searrow \beta & & & \\ & & \text{Im } \beta & \longrightarrow & C \\ & \searrow \psi & \downarrow \tilde{\psi} & \searrow \hat{\psi} & \\ & & Q & & \end{array}$$

pero en tal caso, $\psi = \hat{\psi} \circ \beta = \beta^*(\hat{\psi})$, es decir, $\psi \in \text{Im } \beta^*$, lo que demuestra que $\text{Ker } T \subset \text{Im } \beta^*$ y por tanto T es inyectivo.

II) Veamos que T es suprayectivo.

Observemos primero que se tiene una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \text{Im } \alpha \xrightarrow{i} \text{Ker } \beta \xrightarrow{\pi} \frac{\text{Ker } \beta}{\text{Im } \alpha} \longrightarrow 0$$

y por tanto un complejo

$$0 \longrightarrow \text{Hom} \left(\frac{\text{Ker } \beta}{\text{Im } \alpha}, Q \right) \xrightarrow{\pi^*} \text{Hom}(\text{Ker } \beta, Q) \xrightarrow{i^*} \text{Hom}(\text{Im } \alpha, Q)$$

donde π^* es inyectivo por el lema 3.1.

Si $f \in \text{Hom} \left(\frac{\text{Ker } \beta}{\text{Im } \alpha}, Q \right)$, entonces $\pi^*(f) \in \text{Hom}(\text{Ker } \beta, Q)$ y se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & \text{Im } \alpha & \\ & \downarrow i & \searrow \\ 0 & \longrightarrow \text{Ker } \beta & \longrightarrow B \\ & \downarrow \pi^*(f) & \\ & Q & \end{array}$$

donde $\pi^*(f) \circ i = f \circ \pi \circ i = 0$. Como Q es un módulo inyectivo y $\text{Ker } \beta \longrightarrow B$ es un monomorfismo, entonces existe $\tilde{f} : B \longrightarrow Q$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \text{Im } \alpha & \\ & \downarrow i & \searrow \\ 0 & \longrightarrow \text{Ker } \beta & \longrightarrow B \\ & \downarrow \pi^*(f) & \swarrow \tilde{f} \\ & Q & \end{array}$$

Es decir, existe $\tilde{f} \in \text{Hom}(B, Q)$ tal que $\pi^*(f) = \tilde{f}|_{\text{Ker } \beta}$ y $\tilde{f}|_{\text{Im } \alpha} = 0$; por tanto $\alpha^*(\tilde{f}) = \tilde{f} \circ \alpha = 0$, pero entonces $\tilde{f} \in \text{Ker } \alpha$ y $T([\tilde{f}]) = \tilde{f}_* = f$. \diamond

Regresemos al complejo $C^\bullet(X, R)$.

Corolario 3.5. *Si Q es un \mathbb{Z} -módulo inyectivo, entonces*

$$H^i(X, Q) := H_i(C^\bullet(X, Q)) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_i(X), Q);$$

en particular $H^i(X, \mathbb{Q}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_i(X), \mathbb{Q})$ y $H^i(X, \mathbb{R}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_i(X), \mathbb{R})$.

DEMOSTRACIÓN. Es una consecuencia inmediata de la proposición, pues para todo i se tiene un complejo $C_{i-1}(X) \xrightarrow{\partial_{i-1}} C_i(X) \xrightarrow{\partial_i} C_{i+1}(X)$ y $\frac{\text{Ker}(\partial_i)}{\text{Im}(\partial_{i-1})} =: H_i(X)$. \diamond

A pesar de la belleza de este resultado, no necesariamente estamos en mejores condiciones para calcular la cohomología singular, pues el complejo $C^\bullet(X, \mathbb{R})$ aún involucra a todas las funciones continuas $\Delta^n \rightarrow X$.

Si X admite una estructura de Δ -simplejo, definimos $\Delta^k(X, Q) := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta_k(X), Q)$. La precomposición con ∂_{k+1} induce un operador $d_k : \Delta^k(X, Q) \rightarrow \Delta^{k+1}(X, Q)$, por lo que tenemos un complejo $\Delta^\bullet(X, Q)$ y puesto que la proposición 3.4 depende únicamente de la inyectividad de Q , también se tiene

Corolario 3.6. *Si X admite una estructura de Δ -simplejo y Q es un \mathbb{Z} -módulo inyectivo, entonces*

$$H_{\Delta}^i(X, Q) := H_i(\Delta^\bullet(X, Q)) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_i^{\Delta}(X), Q).$$

\diamond

Observación. Como en este caso $H_i(X) \cong H_i^{\Delta}(X)$, entonces para todo \mathbb{Z} -módulo R se tiene $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_i(X), R) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_i^{\Delta}(X), R)$; en particular, si Q es un \mathbb{Z} -módulo inyectivo se tiene

$$H_{\Delta}^i(X, Q) := H_i(C^\bullet(X, Q)) \cong H_i(\Delta^\bullet(X, Q)) =: H^i(X, Q).$$

De hecho la inclusión $\Delta_\bullet(X) \xhookrightarrow{i} C_\bullet(X)$ es un casi isomorfismo e induce un casi isomorfismo epimórfico $C^\bullet(X, Q) \xrightarrow{i^*} \Delta^\bullet(X, Q)$ para todo módulo inyectivo Q .

Corolario 3.7. *Si X es un espacio compacto que admite una estructura de Δ -complejo, entonces sus grupos de cohomología singular con coeficientes en \mathbb{Q} (respectivamente en \mathbb{R} o en \mathbb{C}) son finitamente generados.*

DEMOSTRACIÓN. Como \mathbb{Q} (respectivamente \mathbb{R} o \mathbb{C}) es un \mathbb{Z} -módulo inyectivo, entonces se tiene $H_{\Delta}^i(X, \mathbb{Q}) \cong H^i(X, \mathbb{Q})$. \diamond

3.2. Cohomología de De Rham

Supongamos que X es una variedad analítica de dimensión real m que admite una estructura suave de Δ -complejo, es decir, que admite una estructura de Δ -complejo tal que, si $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ es una de las funciones continuas que definen esta estructura, entonces existen un abierto U que contiene a Δ^n y una función $\tilde{\sigma} : U \rightarrow X$ de clase C^∞ tales que $\tilde{\sigma}|_{\Delta^n} = \sigma$; en estas circunstancias, podemos calcular la homología simplicial de X usando esta estructura suave de Δ -complejo. Observe que cualquier refinamiento de esta Δ -estructura suave también es una Δ -estructura suave para X . En lo que resta de este capítulo X será una variedad analítica (real) con una estructura suave de Δ -complejo fija.

Para $1 \leq k \leq m$ considere el espacio $\mathfrak{A}^k(X)$ de las k -formas diferenciables definidas globalmente en X . Recuerde que toda k -forma ω admite una descripción local del tipo $\omega = \sum_J f_J dx_J$, donde $J = \{j_1, \dots, j_k\} \subset [1, \dots, m]$ es un conjunto ordenado, $dx_J = dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$ y $f_J \in C^\infty(X)$ para todo J .

La derivada exterior d , que localmente se describe como $d\omega = \sum_J \sum_{i \notin J} \frac{\partial f_J}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_J$, es una transformación lineal de \mathfrak{A}^k en \mathfrak{A}^{k+1} que satisface $d \circ d = 0$, por tanto define un complejo $\mathfrak{A}^\bullet(X)$ con $\mathfrak{A}^0(X) := C^\infty(X)$.

A la homología de este complejo la llamamos la *cohomología de de Rham* de X y se denota mediante $H_{dR}^*(X)$, a las formas diferenciables en el núcleo de d se les llama *formas cerradas* y a las formas diferenciables en la imagen de d se les llama *formas exactas*.

Con la notación anterior, si ω es una n -forma diferenciable definida en un abierto $V \subset X$ y $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ admite una extensión suave $\tilde{\sigma} : U \rightarrow X$ tal que $\tilde{\sigma}(U) \subset V$, entonces $\tilde{\sigma}^*\omega$ es una n -forma diferenciable en U y la integral

$$\int_{\text{Im } \sigma} \omega = \int_{\Delta^n} \tilde{\sigma}^*(\omega)$$

está bien definida. En particular, si ω es una n -forma *diferenciable* global, entonces ω define una transformación aditiva $\int \omega : \Delta_n(X) \rightarrow \mathbb{R}$. Es decir, $\omega \rightarrow \int_{\square} \omega$ define una función $\mathfrak{A}^n(X) \rightarrow \Delta^n(X, \mathbb{R})$, donde $\mathfrak{A}^n(X)$ son las n -formas diferenciables reales globales y no es difícil verificar que esta transformación es lineal.

Lema 3.8. $\int_{\square} : \mathfrak{A}^\bullet(X) \rightarrow \Delta^\bullet(X, \mathbb{R})$ es un morfismo de complejos.

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema de Stokes, para toda $\sigma : \Delta^{n+1} \rightarrow X \in \Delta_{n+1}(X)$ lisa se tiene

$$\int_{\Delta^n} d\omega = \int_{\partial \Delta^n} \omega,$$

por tanto

$$\partial^* \left(\int_{\square} \omega \right) (B) = \left(\int_{\square} \omega \right) (\partial B) = \int_{\partial B} \omega = \int_B d\omega = \left(\int_{\square} d\omega \right) (B)$$

para todo $B \in \Delta_{n+1}(X)$, es decir $\partial^* \left(\int_{\square} \omega \right) = \int_{\square} d\omega$ para todo $\omega \in \mathfrak{A}^n(X)$. \diamond

Corolario 3.9. \int_{\square} induce homomorfismos

$$\int : H_i(\mathfrak{A}^\bullet(X)) \longrightarrow H_i(\Delta^\bullet(X, \mathbb{R})) \cong H^i(X, \mathbb{R}). \quad \diamond$$

Lo que resta de este capítulo lo dedicaremos a demostrar que este homomorfismo es de hecho un isomorfismo.

Lema 3.10. Si $k > 0$ y $\omega \in \mathfrak{A}^k(\mathbb{R}^m)$ satisface $d\omega = 0$, entonces existe $\mu \in \mathfrak{A}^{k-1}(\mathbb{R}^m)$ tal que $d\mu = \omega$, es decir $H_{dR}^k(\mathbb{R}^m) = 0$ para todo $k > 0$.¹

DEMOSTRACIÓN. Procederemos por inducción en m . Observe que $\mathfrak{A}^k(\mathbb{R}^m)$ es un $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ -módulo libre con una base de la forma

$$\{dx_J \mid J \subset [1, \dots, m] \text{ es un conjunto ordenado de cardinalidad } k\}.$$

Si $k = m$, entonces $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ con $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ y es suficiente tomar $\mu = \left(\int_0^{x_1} f dx_1 \right) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m$.

Supongamos que $k < r$ y definamos $\eta(f_J dx_J) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \notin J \\ \left(\int_0^{x_1} f_J dx_1 \right) dx_{J-1} & \text{si } 1 \in J \end{cases}$

extendiendo por linealidad; entonces, para toda $\omega \in \mathfrak{A}^k(\mathbb{R}^m)$ se cumple

$$\begin{aligned} d \circ \eta(\omega) + \eta \circ d(\omega) &= d \circ \eta \left(\sum_J f_J dx_J \right) + \eta \circ d \left(\sum_J f_J dx_J \right) \\ &= d \circ \eta \left(\sum_{1 \in J} f_J dx_J \right) + d \circ \eta \left(\sum_{1 \notin J} f_J dx_J \right) + \eta \circ d \left(\sum_J f_J dx_J \right) \\ &= d \left(\sum_{1 \in J} \left(\int_0^{x_1} f_J dx_1 \right) dx_{J-1} \right) + \eta \left(\sum_J \sum_{i \notin J} \frac{\partial f_J}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_J \right) \end{aligned}$$

¹Este lema se conoce como el *Lema de Poincaré*, aunque aparentemente Vito Volterra ya lo habría enunciado entre 1881 y 1892.

es decir

$$\begin{aligned}
d \circ \eta(\omega) + \eta \circ d(\omega) &= \sum_{1 \in J} \sum_{i \notin J-1} \frac{\partial(\int_0^{x_1} f_J dx_1)}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{J-1} \\
&+ \eta\left(\sum_{1 \in J} \sum_{i \notin J} \frac{\partial f_J}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_J\right) + \eta\left(\sum_{1 \notin J} \frac{\partial f_J}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_J\right) \\
&+ \eta\left(\sum_{1 \notin J} \sum_{\substack{i \notin J \\ i \neq 1}} \frac{\partial f_J}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_J\right) \\
&= \sum_{1 \in J} f_J dx_J + \sum_{1 \in J} \sum_{i \notin J} \frac{\partial(\int_0^{x_1} f_J dx_1)}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{J-1} \\
&+ \sum_{1 \in J} \sum_{i \notin J} \left(\int_0^{x_1} \frac{\partial f_J}{\partial x_i} dx_1\right) dx_i \wedge dx_{J-1} + \sum_{1 \notin J} \left(\int_0^{x_1} \frac{\partial f_J}{\partial x_1} dx_1\right) dx_J \\
&= \omega + \psi
\end{aligned}$$

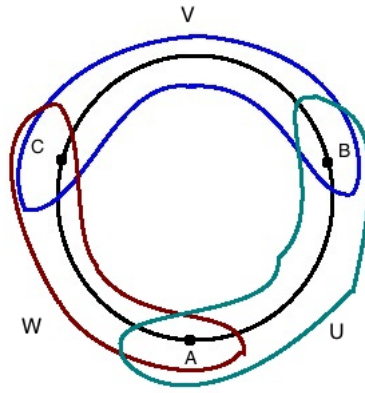
donde $\psi \in \mathfrak{A}^k(\mathbb{R}^m)$ no depende de x_1 .

Si $d\omega = 0$, entonces $\psi = d \circ \eta(\omega) - \omega$ y $d\psi = 0$. Por hipótesis de inducción aplicada a ψ (que podemos pensar como una k -forma en \mathbb{R}^{m-1}), existe $\mu_1 \in \mathfrak{A}^k(\mathbb{R}^m)$ (que no depende de x_1) tal que $\psi = d\mu_1$ y basta tomar $\mu = \mu_1 + \eta(\omega)$. \diamond

Observación.

1. Si $U \subset \mathbb{R}^m$ es un abierto simplemente conexo, entonces el resultado del lema previo también es cierto en U , pues $\mathfrak{A}^k(U)$ es un $C^\infty(U)$ -módulo libre con la base descrita en el lema.
2. El lema demuestra de hecho que si $U \subset \mathbb{R}^m$ es un abierto contráctil, entonces $H_{dR}^k(U) \cong H_{\Delta}^k(U, \mathbb{R})$ para todo k .

Antes de proceder a estudiar un caso más general, veamos un ejemplo que ilustra las dificultades. Supongamos que tenemos una 1-forma diferencial ω definida en S^1 . Puesto que S^1 no admite 2-formas diferenciales, entonces $d\omega = 0$ y ω representa una clase $[\omega]$ en la cohomología de de Rham de S^1 . Si además se tiene $\int_{\square} \omega = \partial^*(B)$



para algún $B \in \Delta^0(X, \mathbb{R})$, entonces la imagen de $[\omega]$ en $H_{\Delta}^1(X, \mathbb{R})$ es cero y nos gustaría ver que de hecho $[\omega] = 0 \in H_{dR}^1(S^1)$, es decir, nos gustaría demostrar que $\omega = df$ para alguna función $f \in C^{\infty}(S^1)$.

Si U, V y W son sendas vecindades abiertas suficientemente pequeñas de los segmentos AB , BC y CA ; entonces, por el lema de Poincaré, existen funciones f_U, f_V y f_W tales que $df_U = \omega|_U, df_V = \omega|_V$ y $df_W = \omega|_W$ respectivamente, pero no hay ninguna razón para que f_U y f_V coincidan en $U \cap V$, por ejemplo; de modo que no hay motivo a priori por el cual se puedan extender a una función analítica global en S^1 . Por tanto debemos garantizar que es posible transformar las funciones obtenidas, de modo que coincidan en las intersecciones $U \cap V, U \cap W$ y $V \cap W$ respectivamente y de este modo se puedan extender a una función analítica global f tal que $df = \omega$.

Lema 3.11. Sean $k \geq 1$, $\sigma = [v_0, \dots, v_k]$ un k -simplejo en \mathbb{R}^m y $Fr(\sigma)$ la frontera de σ , es decir $Fr(\sigma) = \cup_{i=0}^k [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k]$;

1. Sean $r \geq 0$ y ω una r -forma cerrada definida en una vecindad abierta U de $Fr(\sigma)$; si $r = k - 1$ supongamos además que $\int_{\partial\sigma} \omega = 0$, entonces existe una r -forma cerrada η definida en una vecindad abierta y simplemente conexa V de σ tal que $\eta|_{V \cap U} = \omega|_{V \cap U}$.
2. Sean $n \geq 1$, ω una n -forma cerrada definida en una vecindad abierta y simplemente conexa V de σ y supongamos que existe una $n - 1$ forma η definida en una vecindad U de $Fr(\sigma)$ tal que $d\eta = \omega$ en U ; si $n = k$ supongamos además que $\int_{\partial\sigma} \eta = \int_{\sigma} \omega$, entonces existe una $n - 1$ forma η' definida en una vecindad abierta y simplemente conexa V' de σ tal que $\eta'|_{V' \cap U} = \eta|_{V' \cap U}$ y además $d\eta' = \omega$ en V' .

DEMOSTRACIÓN. Procederemos por inducción en r .

I. Si $r = 0$, entonces ω es una función analítica real. Como $d\omega = 0$, entonces ω

es una función constante en cada componente conexa de su dominio. Si $k > 1$ entonces $Fr(\sigma)$ es un conjunto conexo y por tanto ω es constante en U , de modo que admite una extensión a una vecindad abierta y simplemente conexa V de σ . Si $k = 1$ entonces $\sigma = [v_0, v_1]$, $Fr(\sigma) = \{v_0, v_1\}$ y por hipótesis $\sigma(v_0) - \sigma(v_1) := \int_{\partial\sigma} \omega = 0$, por tanto σ es una función constante en U que admite una extensión a una vecindad abierta y simplemente conexa V de σ .

II. Veamos que si a) es cierta para $r = n - 1$ entonces b) es cierta para n .

En efecto, sean $n \geq 1$, ω una n -forma cerrada definida en una vecindad abierta y simplemente conexa V de σ y η una $n - 1$ forma definida en una vecindad U de $Fr(\sigma)$ tal que $d\eta = \omega|_U$; por el lema de Poincaré, existe una $n - 1$ forma diferencial ψ definida en V tal que $d\psi = \omega$. No hay ninguna razón por la cual $\eta = \psi$, pero en U se cumple $d(\psi - \eta) = d\psi - d\eta = \omega - \omega = 0$, es decir, $\psi - \eta$ es una $n - 1$ forma cerrada en U . Si $n = k$, entonces $r = n - 1 = k - 1$ y se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\partial\sigma}(\psi - \eta) &= \int_{\partial\sigma} \psi - \int_{\partial\sigma} \eta \\ &= \int_{\sigma} d\psi - \int_{\partial\sigma} \eta \\ &= \int_{\sigma} \omega - \int_{\partial\sigma} \eta \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde la última igualdad se cumple por hipótesis; entonces, por el primer inciso para $r = n - 1$, existe una $r - 1$ forma cerrada μ , definida en una vecindad V' de σ tal que $\mu|_{V' \cap U} = \psi - \eta$. Si hacemos $\eta' := \psi - \mu$, entonces $\eta'|_{V' \cap U} = \eta|_{V' \cap U}$ y además $d\eta' = d\psi - d\mu = \omega - 0 = \omega$.

III. Veamos finalmente que si b) es cierta para n entonces a) es cierta para $r = n$.

En efecto, sean $n \geq 1$, ω una n forma cerrada definida en una vecindad abierta U de $Fr(\sigma)$, $\sigma_0 = [v_1, \dots, v_k]$ y $\lambda = Fr(\sigma) \setminus \sigma_0$; si $n = k - 1$ supongamos además que $\int_{\partial\sigma} \omega = 0$. λ es conexo y como ω es una forma cerrada, por el lema de Poincaré existe una $n - 1$ forma cerrada η en una vecindad simplemente conexa U' de λ tal que $d\eta = \sigma$, en particular $d\eta = \sigma$ en una vecindad de $Fr(\sigma_0) = Fr(\lambda)$.

1. Si $k > 1$, sea $C = \partial\sigma - \sigma_0$; entonces $\partial C = -\partial\sigma_0$ y, dado que cada simplejo que aparece en C está contenido en λ y además $d\eta = \sigma$ en U' , si $n = k - 1$

tenemos

$$\begin{aligned}
 \int_{\sigma_0} \omega - \int_{\partial\sigma_0} \eta &= \int_{\sigma_0} \omega + \int_{\partial C} \eta \\
 &= \int_{\sigma_0} \omega + \int_C d\eta \\
 &= \int_{\sigma_0} \omega + \int_C \omega \\
 &= \int_{\sigma_0} \omega + \int_{\partial\sigma - \sigma_0} \omega \\
 &= \int_{\partial\sigma} \omega \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Así que si b) es cierto para n , existe una $n - 1$ -forma η' , definida en una vecindad simplemente conexa V' de σ tal que $\eta'|_{V' \cap U'} = \eta|_{V' \cap U'}$ y además $d\eta'$ también está definida en una vecindad simplemente conexa de σ y $d\eta' = \omega$ en $V' \cap U$.

2. Si $k = 1$, entonces $\sigma = [v_0, v_1]$ y $Fr(\sigma) = \{v_0, v_1\}$. Puesto que ω es una forma cerrada, entonces por el lema de Poincaré existen $n - 1$ formas μ_0 y μ_1 definidas en sendas vecindades U_0 y U_1 de v_0 y v_1 tales que $d\mu_0 = \omega$ en U_0 y $d\mu_1 = \omega$ en U_1 . Tomando abiertos más pequeños en caso de ser necesario, podemos asumir que $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, de modo que $\mu(t) = \mu_i(t)$ si $t \in U_i$ está bien definida y $d\mu = \sigma$ en una vecindad de $Fr(\sigma)$.

Si f es una función suave que es igual a 1 en una vecindad U' de $Fr(\sigma)$ y con soporte contenido en $U_0 \cup U_1$, entonces la $n - 1$ forma $\eta = d(f\mu)$ está definida en una vecindad simplemente conexa V de σ , es cerrada y además

$$d\eta = df \wedge \mu + f d\mu = d\mu = \omega$$

en $V \cap U'$. ◇

Recuerde que dada una variedad diferenciable X que admite una estructura suave de Δ -complejo, por definición $\Delta_n(X)$ es el \mathbb{Z} -módulo libre generado por $\{\sigma_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$, donde por hipótesis $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$ es una función que admite una extensión suave en alguna vecindad de Δ^n . Como los diámetros de los simplejos producidos por la subdivisión baricéntrica de un k -simplejo son menores o iguales a $\frac{k}{k+1}$ veces el diámetro del simplejo original y puesto que todo refinamiento de una estructura suave de Δ -complejo es nuevamente una estructura suave de Δ -complejo, entonces siempre se puede conseguir que todo simplejo que ocurre en la estructura suave de Δ -complejo de X esté completamente contenido en una carta de X , al menos si X es una variedad compacta.

Abusando en la notación escribiremos $\sigma \subset X^k$ para indicar que $\sigma : \Delta^k \rightarrow X^k$ es un k -simplejo de la estructura suave de Δ -complejo de X . Si $x \in X$ está en la imagen de $\sigma : \Delta^k \rightarrow X$, escribiremos $x \in \sigma$ y de manera análoga escribiremos $x \in \sigma^o$ si x está en $\sigma(\Delta^k - \partial\Delta^k)$.

El espacio vectorial real $\Delta^n(X, \mathbb{R})$ tiene una base dada por las funciones duales δ_α , donde $\delta_\alpha(\sigma_\beta) = 1$ si $\alpha = \beta$ y cero en otro caso; además llamaremos c_0 a la función constante 1 en $\Delta^0(X, \mathbb{R})$.

Definición. Si σ_α es un generador de $\Delta_n(X)$, definimos la *estrella* de σ_α como

$$St(\sigma_\alpha) = \cup \sigma_\beta((\Delta^m)^o)$$

donde la unión recorre a todos los m -simplejos que contienen a la imagen de σ_α como una cara, para $m \geq n$.

Lema 3.12. *Existe un morfismo de complejos*

$$\phi : \Delta^\bullet(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{A}^\bullet(X)$$

tal que

1. $\int \circ \phi = \mathbf{1}_{\Delta^\bullet}$,
2. $\phi_0(c_0) = 1$ y
3. $\text{supp } \phi_k(\delta_\alpha) \subset St(\sigma_\alpha)$.

DEMOSTRACIÓN. Recuerde que si $\sigma \subset X^k$ tiene vértices $\{v_0, \dots, v_k\}$ y $p \in \sigma$, entonces $p = \sum_j t_j v_j$, con $t_j \geq 0$ para todo j y $\sum_j t_j = 1$. A los t_j les llamamos las coordenadas baricéntricas de p y dado $v = v_j$, definimos

$$b_v(p) = \begin{cases} t_j & \text{si } p \text{ está en el interior de } \sigma \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observe que

- $b_v(x) \geq 0$ para todo $v \in X^0$ y para todo $x \in X$,
- $\sum_{v \in X^0} b_v(x) = 1$ para todo $x \in X$,
- $x = \sum_{v \in X^0} b_v(x)v$,
- la colección $\{St(v) \mid v \in X^0\}$ es una cubierta abierta de X .

1. Sea $n = \dim X$ y para cada $v \in X^0$ definamos conjuntos cerrados

$$F_v := \left\{ x \in X \mid b_v(x) \geq \frac{1}{n+1} \right\}$$

y

$$G_v := \left\{ x \in X \mid b_v(x) \leq \frac{1}{n+2} \right\}$$

Evidentemente se tiene

- $F_v \cap G_v = \emptyset$,
- $F_v \subset St(v)$,
- $X - St(v) \subset G_v$ (por tanto $X - G_v \subset St(v)$)

y como toda variedad diferenciable es un espacio normal, existe una función $f_v : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_v(x) > 0$ para todo $x \in F_v$ y $f_v(x) = 0$ para todo $x \in G_v$.

Afirmamos que $\{F_v \mid v \in X^0\}$ es una cubierta de X . En efecto, si $x \in X$, existe $\sigma \subset X^k$ tal que $x \in \sigma^o$, por tanto $b_v(x) = 0$ si v no es un vértice de σ , de modo que

$$1 = \sum_{v \in X^0} b_v(x) = \sum_{v \in X^0 \cap \sigma} b_v(x)$$

y dado que $k \leq n = \dim X$, entonces existe v , vértice de σ , tal que $b_v(x) \geq \frac{1}{n+1}$.

Puesto que $F_v \subset X - G_v$, concluimos que $\{X - G_v \mid v \in X^0\}$ es una cubierta (abierto) de X . Observe que $x \in F_v$ en particular implica que $f_v(x) \neq 0$, por tanto

$$\sum_{v \in X^0} f_v(x) > 0.$$

De este modo, las funciones $g_v : X \rightarrow \mathbb{R}$ dadas mediante

$$g_v(x) = \frac{f_v(x)}{\sum_{v \in X^0} f_v(x)}$$

están bien definidas, $supp(g_v) \subset X - G_v$ y además $\sum_{v \in X^0} g_v(x) = 1$, por tanto la colección $\{g_v\}$ es una partición de la unidad subordinada a la cubierta abierta $\{X - G_v \mid v \in X^0\}$ y por tanto a la cubierta abierta $\{St(v) \mid v \in X^0\}$.

Definamos ahora $\phi_k : \Delta^k(X, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{A}^k(X)$. Recuerde que $\Delta^k(X, \mathbb{R})$ es un grupo abeliano libre y por tanto es suficiente definir ϕ_k en los generadores δ_σ de $\Delta^k(X, \mathbb{R})$.

Dado $\sigma = [v_0, \dots, v_k] \subset X^k$ definimos

$$\phi_k(\delta_\sigma) := k! \sum_{i=0}^k (-1)^i g_{v_i} dg_{v_0} \wedge \cdots \wedge \widehat{dg_{v_i}} \wedge \cdots \wedge dg_{v_k}$$

2. Veamos que $\phi : \Delta^*(X, K) \longrightarrow \mathfrak{A}^*(X)$ es un homomorfismo de complejos.

En efecto, por una parte tenemos que

$$\begin{aligned} d \circ \phi_k(\delta_\sigma) &= d\left(k! \sum_{i=0}^k (-1)^i g_{v_i} dg_{v_0} \wedge \cdots \wedge \widehat{dg_{v_i}} \wedge \cdots \wedge dg_{v_k}\right) \\ &= k! \sum_{i=0}^k (-1)^i dg_{v_i} \wedge dg_{v_0} \wedge \cdots \wedge \widehat{dg_{v_i}} \wedge \cdots \wedge dg_{v_k} \\ &= (k+1)! dg_{v_0} \wedge \cdots \wedge dg_{v_k}. \end{aligned}$$

Por otro lado, $d(\delta_\sigma)(\tau) = \delta_\sigma(\partial\tau)$, de modo que $d(\delta_\sigma)(\tau) = 0$ si σ no es una cara de τ .

Si σ es una cara de τ , entonces $\tau = [w_0, \dots, w_{k+1}]$ y $\sigma = [w_0, \dots, \widehat{w_j}, \dots, w_{k+1}]$ para algún j , de modo que $\partial\tau = \sum_i (-1)^i [w_0, \dots, \widehat{w_i}, \dots, w_{k+1}]$ y por tanto $d(\delta_\sigma)(\tau) = \delta_\sigma(\partial\tau) = \epsilon_\tau := (-1)^j$.

Sea

$$V_\sigma = \{\tau \subset X^{k+1} \mid \sigma \text{ es cara de } \tau\};$$

entonces

$$d(\delta_\sigma) = \sum_{\tau \in V_\sigma} \epsilon_\tau \delta_\tau,$$

de modo que

$$\begin{aligned} \phi_{k+1} \circ d(\delta_\sigma) &= \phi_{k+1}\left(\sum_{\tau \in V_\sigma} \epsilon_\tau \delta_\tau\right) \\ &= (k+1)! \sum_{\tau \in V_\sigma} \epsilon_\tau \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i g_{w_i} dg_{w_0} \wedge \cdots \wedge \widehat{dg_{w_i}} \wedge \cdots \wedge dg_{w_{k+1}} \end{aligned}$$

Recuerde que si $\tau \in V_\sigma$, entonces τ y σ difieren por un vértice. Si denotamos a ese vértice como w_τ y recordamos que σ también se puede escribir como $[v_0, \dots, v_k]$, entonces, reordenando los términos en la suma precedente, tenemos

$$\begin{aligned}
\phi_{k+1} \circ d(\delta_\sigma) &= (k+1)! \left(\sum_{\tau \in V_\sigma} \epsilon_\tau (\epsilon_\tau g_{w_\tau} dv_0 \wedge \cdots \wedge dv_k) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\tau \in V_\sigma} \epsilon_\tau \sum_{i=0}^k -\epsilon_\tau (-1)^i g_{v_i} dg_{w_\tau} \wedge dg_{v_0} \wedge \cdots \wedge \widehat{dg_{v_i}} \wedge \cdots \wedge dg_{v_k} \right) \\
&= (k+1)! \left(\sum_{\tau \in V_\sigma} g_{w_\tau} dv_0 \wedge \cdots \wedge dv_k \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\tau \in V_\sigma} \sum_{i=0}^k (-1)^i g_{v_i} dg_{w_\tau} \wedge dg_{v_0} \wedge \cdots \wedge \widehat{dg_{v_i}} \wedge \cdots \wedge dg_{v_k} \right)
\end{aligned}$$

Como $\text{supp}(g_w dg_{w_0} \wedge \cdots \wedge dg_{w_k}) = \text{supp}(g_w) \cap (\cap_i \text{supp}(g_{w_i})) \subset \text{St}(w) \cap (\cap_i \text{St}(w_i))$ para todo $w \in X^0$, entonces, si $w, w_0, \dots, w_k \in X^0$ son puntos distintos, se tiene que

$$g_w dg_{w_0} \wedge \cdots \wedge dg_{w_k} \equiv 0 \text{ si } [w, w_0, \dots, w_k] \notin X^{k+1}.$$

Además recuerde que si existen i, j tales que $w_i = w_j$, entonces $dg_{w_i} \wedge dg_{w_j} = 0$. De este modo

$$\begin{aligned}
\phi_{k+1} \circ d(\delta_\sigma) &= (k+1)! \left(\sum_{w \in X^0 \setminus \{v_0, \dots, v_k\}} g_w dv_0 \wedge \cdots \wedge dv_k \right. \\
&\quad \left. - \sum_{w \in X^0 \setminus \{v_0, \dots, v_k\}} \sum_{i=0}^k (-1)^i g_{v_i} dg_w \wedge dg_{v_0} \wedge \cdots \wedge \widehat{dg_{v_i}} \wedge \cdots \wedge dg_{v_k} \right) \\
&= (k+1)! \left(\sum_{w \in X^0 \setminus \{v_0, \dots, v_k\}} g_w dv_0 \wedge \cdots \wedge dv_k \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=0}^k (-1)^i g_{v_i} \sum_{w \neq v_i} dg_w \wedge dg_{v_0} \wedge \cdots \wedge \widehat{dg_{v_i}} \wedge \cdots \wedge dg_{v_k} \right)
\end{aligned}$$

Como $\sum_{w \in X^0} g_w = 1$, entonces $\sum_{w \in X^0} dg_w = 0$, luego $\sum_{w \neq v_i} dg_w = -dv_i$ y así

$$\phi_{k+1} \circ d(\delta_\sigma) = (k+1)! \left(\sum_{w \in X^0 \setminus \{v_0, \dots, v_k\}} g_w dv_0 \wedge \cdots \wedge dv_k + \sum_{i=0}^k g_{v_i} dg_{v_0} \wedge \cdots \wedge dg_{v_k} \right)$$

por tanto $\phi_{k+1} \circ d(\delta_\sigma) = d \circ \phi_k(\delta_\sigma)$.

3. Observe que $\phi_0(\delta_v) = g_v$, por tanto $\phi_0(c_0) = \phi_0(\sum_{v \in X^0} \delta_v) = \sum_{v \in X^0} g_v = 1$.

4. Demostremos que $\int \circ \phi = \mathbf{1}_{\Delta^\bullet}$ y procedamos por inducción en k . Si $k = 0$, sea $\delta_v \in \Delta^0(X, \mathbb{R})$; entonces

$$\left(\int_{\square} \circ \phi_0(\delta_v) \right) (w) = \int_w g_v = g_v(w)$$

Si $w \neq v$, entonces $w \notin St(v)$ y por tanto $g_v(w) = 0$. Por otra parte, como $\sum_{w \in X^0} g_w \equiv 1$, entonces $g_v(v) = 1$, es decir $\int \circ \phi_0(\delta_v) = \delta_v$.

Lema 3.13. Sean X una variedad diferenciable, compacta, de dimensión real m que admite una estructura suave de Δ -complejo y $\omega \in \mathfrak{A}^n(X)$ una forma cerrada; supongamos que $\int_{\square} \omega = \partial^*(B)$ para alguna transformación lineal $B \in \Delta^{n-1}(X, \mathbb{R})$, entonces existe $\eta \in \mathfrak{A}^{n-1}(X)$ tal que $d\eta = \omega$ y $\int_{\square} \eta = B$.

DEMOSTRACIÓN. Sea X^k el k -esqueleto de X ; entonces construiremos de manera inductiva una sucesión η_0, \dots, η_m de $n - 1$ formas diferenciables tales que

1. η_k está definida en una vecindad de cada k -simplejo $\sigma \subset X^k$,
2. $d\eta_k = \omega$ en una vecindad de cada k -simplejo $\sigma \subset X^k$,
3. $\eta_k = \eta_{k-1}$ en una vecindad de cada $k - 1$ -simplejo $\lambda \subset X^{k-1}$, y
4. $\int_{\square} \eta_{n-1} = B$.

Observe que para todo $k \geq n - 1$ y para todo $n - 1$ simplejo σ de la estructura suave de X se tiene

$$\int_{\sigma} \eta_k = \int_{\sigma} \eta_{n-1} = B(\sigma).$$

I) Considere cartas disjuntas U_v de X que cubran a X^0 ; como ω es cerrada, por el lema de Poincaré ω es exacta en cada una de estas cartas y como la unión es disjunta, podemos definir una $n - 1$ forma η'_0 en la unión tal que $d\eta'_0 = \omega$. Si $n - 1 \neq 0$ podemos tomar $\eta_0 = \eta'_0$, en caso contrario necesitamos garantizar que $\int_{\square} \eta_0 = B$. Dado $v \in X^0$ tenemos

$$\int_v \eta'_0 = \eta'_0(v).$$

Sea $a_v := B(v) - \eta'_0(v)$ y definamos $\eta_0 = \eta'_0 + a_v$ en U_v , entonces $d\eta_0 = d\eta'_0 = \omega$ y además $\int_{\square} \eta_0 = B$.

II) Supongamos que hemos construido $\eta_0, \dots, \eta_{k-1}$ con las propiedades (1) – (4) y queremos construir η_k de modo que se siguen cumpliendo las propiedades (1) – (4). Sea $\sigma \subset X^k$ un k -simplejo que ocurre en la estructura suave de Δ -complejo de X ; por hipótesis ω es una forma n forma cerrada definida en una vecindad de σ y η_{k-1} es una $n-1$ forma definida en una vecindad de $Fr(\sigma)$ con la propiedad de que $d\eta_{k-1} = \omega$. Más aún, si $k = n$, por (4) y por hipótesis se tiene

$$\int_{\sigma} \omega = \partial^*(B)(\sigma) = B(\partial\sigma) = \int_{\partial\sigma} \eta_{k-1},$$

de modo que por b) del lema 3.11 existe una $n-1$ forma $\eta_{k,\sigma}$, definida en una vecindad de σ , tal que $d\eta_{k,\sigma} = \omega$ en una vecindad de σ y $\eta_{k,\sigma} = \eta_{k-1}$ en una vecindad de $Fr(\sigma)$. Estas formas dependen a priori de σ , pero si σ y λ son dos k -simplejos con una cara comun, como $\eta_{k,\sigma} = \eta_{k-1} = \eta_{k,\lambda}$ en una vecindad de la cara común, podemos pegar estas formas para obtener η'_k , una n forma que satisface las propiedades (1) – (3). Si $k \neq n-1$ basta tomar $\eta_k = \eta'_k$; si $k = n-1$ sean $\phi : \Delta^\bullet(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{A}(X)$ un morfismo de complejos como en el lema 3.12, $B_1 = B - \int_{\square} \eta'_{n-1}$ y definamos $\eta_{n-1} = \eta'_{n-1} + \phi_{n-1}(B_1)$.

Observe que η_{n-1} está definido en una vecindad de σ , para cada $\sigma \subset X^{n-1}$ y como $supp(\phi_k(\delta_\alpha)) \subset St(\sigma_\alpha)$ para todo $\sigma_\alpha \subset X^k$, para todo k ; entonces $\phi_k(\delta_\alpha) \equiv 0$ en una vecindad de λ para todo simplejo $\lambda \subset X^{k-1}$. Dado que los δ_α constituyen una base de $\Delta^k(X, \mathbb{R})$, entonces $\phi_k(C) \equiv 0$ en una vecindad de λ para todo $\lambda \subset X^{k-1}$ para toda $C \in \Delta^k(X, \mathbb{R})$. En particular

$$d\eta_{n-1} = d\eta'_{n-1} + d \circ \phi_{n-1}(B_1) = d\eta'_{n-1} + \phi_n \circ \partial^*(B_1) = d\eta'_{n-1} = \omega$$

en una vecindad de λ , para todo $\lambda \subset X^{n-1}$ y

$$\eta_{n-1} = \eta'_{n-1} + \phi_{n-1}(B_1) = \eta'_{n-1} = \eta_{n-2}$$

en una vecindad de γ , para todo $\gamma \subset X^{n-2}$. Como

$$\begin{aligned} \int_{\square} \eta_{n-1} &= \int_{\square} \eta'_{n-1} + \int_{\square} \phi_{n-1}(B_1) \\ &= \int_{\square} \eta'_{n-1} + B_1 \\ &= \int_{\square} \eta'_{n-1} + B - \int_{\square} \eta'_{n-1} \\ &= B \end{aligned}$$

entonces η_{n-1} satisface las propiedades (1) – (4). ◇

Teorema 3.14. *Sea X una variedad diferenciable (C^∞) y compacta; entonces*

$$\int_{\square} : H_{dR}^k(X) \longrightarrow H^k(X, \mathbb{R})$$

es un isomorfismo para todo k , es decir, $\int_{\square} : \mathfrak{A}^\bullet(X) \longrightarrow C^\bullet(X, \mathbb{R})$ es un casi isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Por el lema 3.12, $\int_{\square} \circ \phi_* = (\int_{\square} \circ \phi)_* = \mathbf{1}_* = \mathbf{1}$, por tanto \int_{\square} es un epimorfismo y por el lema 3.13, \int_{\square} es un monomorfismo. \diamond

Ejercicios

1. Demuestre que si A es un grupo abeliano finito, entonces $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}) = 0$.
2. Demuestre que si $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z}$ son homomorfismos de \mathbb{Z} -módulos, entonces

$$\begin{array}{c} \mathbb{Z} \\ \psi \downarrow \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

ces existe $\tilde{\psi} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \\ & & \psi \downarrow \swarrow \tilde{\psi} \\ & & \mathbb{Q} \end{array}$$

3. Demuestre que \mathbb{Q} es un \mathbb{Z} -módulo inyectivo.
Sugerencia: Use el teorema de descomposición de grupos abelianos.
4. Demuestre que si $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta, entonces para todo \mathbb{Z} -módulo R la sucesión

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C, R) \xrightarrow{\beta^*} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, R) \xrightarrow{\alpha^*} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, R)$$

es exacta.

5. Demuestre que si $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta y Q es un \mathbb{Z} -módulo inyectivo, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C, Q) \xrightarrow{\beta^*} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, Q) \xrightarrow{\alpha^*} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, Q) \longrightarrow 0$$

es exacta.

6. Dada una variedad analítica (real) X , en el ejercicio 2.10 definimos el complejo $S_\bullet(X)$ y los grupos de homología $H_*^S(X)$ de X , los cuales coinciden con la homología singular (ver ejercicio 2.16). Para cada \mathbb{Z} -módulo R , podemos definir el complejo dual $S^\bullet(X, R)$, donde

$$S^k(X, R) := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_k(X), R)$$

Demuestre que si Q es un \mathbb{Z} -módulo inyectivo, entonces

$$H_S^i(X, Q) := H_i(S^\bullet(X, Q)) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_i^S(X), Q);$$

Sugerencia: Siga la demostración del corolario 3.4

7. Demuestre que para todo \mathbb{Z} -módulo Q existe un epimorfismo canónico

$$res : S^\bullet(X, Q) \longrightarrow \Delta^\bullet(X, Q)$$

y que si Q es un \mathbb{Z} módulo inyectivo, entonces este epimorfismo induce isomorfismos $H_S^i(X, Q) \cong H_\Delta^i(X, Q)$.

Sugerencia: demuestre que existe un monomorfismo canónico $\Delta_\bullet(X) \longrightarrow S_\bullet(X)$.

8. Demuestre que el morfismo $f_\square : \mathfrak{A}^\bullet(X) \longrightarrow \Delta^\bullet(X, \mathbb{R})$ factoriza a través de $S^\bullet(X, \mathbb{R})$; es decir, existe un triángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A}^\bullet(X) & \xrightarrow{f_\square} & S^\bullet(X, \mathbb{R}) \\ & \searrow f_\square & \downarrow res \\ & & \Delta^\bullet(X, \mathbb{R}) \end{array}$$

y concluya que el homomorfismo inducido $H_{dR}^k(X) \longrightarrow H_S^k(X, \mathbb{R})$ es un isomorfismo para toda k .

9. Sean V un \mathbb{Z} -módulo arbitrario y $L \subset K$ una extensión de campos; demuestre que se tiene un isomorfismo canónico

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, L) \otimes_L K \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, K).$$

10. Demuestre que para todo campo K que contiene a \mathbb{Q} existe un isomorfismo canónico

$$H^k(X, K) \cong H^k(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} K$$

Sugerencia: Use el ejercicio precedente.

11. Demuestre que $H^k(X, \mathbb{C}) \cong H_{dR}^k(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Sugerencia: Use el ejercicio 9 junto con el teorema de de Rham.