

**Revista de
Ciencias Básicas
UJAT**

*Volumen 9
Número 2
Enero 2011*

**Cunduacán
Tabasco
México**

Contenido

- Invariantes en geometría y topología **3**
Daniel Juan Pineda
- Conjuntos de Julia racionales y empaques de
Sierpinski generalizados **9**
Mónica Moreno Rocha
- Métodos algebraicos para códigos parametrizados
por monomios **17**
*Eliseo Sarmiento, Rafael H. Villarreal, Carlos Rentería,
Aron Simis y María Vaz Pinto*
- Distribución de confianza del parámetro de forma
de la distribución gamma, cuando el de escala es
de ruido **29**
Edilberto Nájera Rangel
- Distribuciones de confianza **39**
Edilberto Nájera Rangel y Braly Guadalupe Peralta Reyes



Año Internacional de la
QUÍMICA
2011



Conjuntos de Julia racionales y empaques de Sierpiński generalizados *

Mónica Moreno Rocha †

Centro de Investigación en Matemáticas

Analizamos las aplicaciones racionales postcríticamente finitas asociadas a la familia de grado cuatro

$$z \mapsto z^2 + \lambda/z^2,$$

con $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$. Para aquellas aplicaciones cuyos conjuntos de Julia son modelados por un empaque de Sierpiński generalizado, explicaremos un resultado de rigidez asociado a las clases de conjugación topológica por medio de sus modelos combinatorios asociados.

We study postcritically finite rational maps drawn from the family

$$z \mapsto z^2 + \lambda/z^2,$$

with $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$. For those maps whose Julia sets are described by generalized Sierpiński gaskets, we explain a rigidity result of conjugacy classes by means of their associated combinatorial models.

Palabras claves: Funciones Racionales, Conjunto de Julia, Combinatoria.

Keywords: Rational Maps, Julia Sets, Combinatorics.

1. Introducción

Consideremos la familia de aplicaciones racionales de grado cuatro

$$R_\lambda(z) = z^2 + \frac{\lambda}{z^2}, \quad \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Esta familia exhibe una amalgama de ejemplos topológicos: cuando la órbita de los puntos críticos escapa a infinito, sus conjuntos de Julia pueden ser homeomorfos a

- Conjunto de Cantor de puntos.
- Curva (o alfombra) de Sierpiński.

Estos ejemplos de conjuntos de Julia para R_λ (y su ampliación) pueden apreciarse en las Figuras 1 y 2.

Bajo ciertas condiciones sobre λ , los mapeos R_λ tienen conjuntos de Julia descritos como *empaques de Sierpiński generalizados*. Ejemplos de estos conjuntos de Julia son desplegados en las Figuras 3, 4, 6 y 7. El conjunto de la izquierda en la Figura 3

*Recibido el 4 de Junio de 2010 y aceptado el 13 de Septiembre de 2010

†Dirección postal: Callejón Jalisco s/n, Guanajuato, México. C.P. 36240. Tel.(+52)473 732.7155. Correo electrónico: mmoreno@cimat.mx

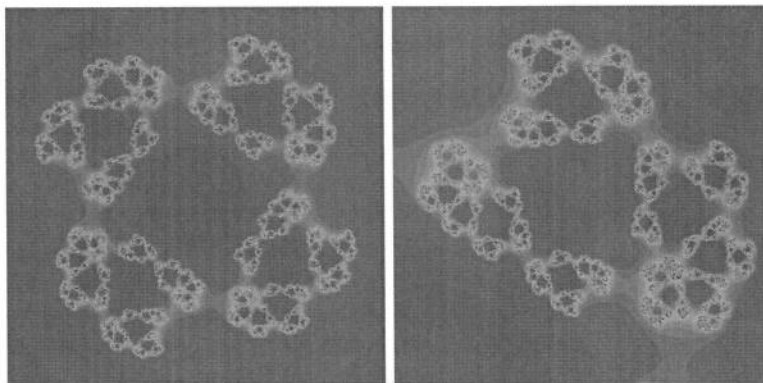


Figura 1. Conjunto de Cantor.

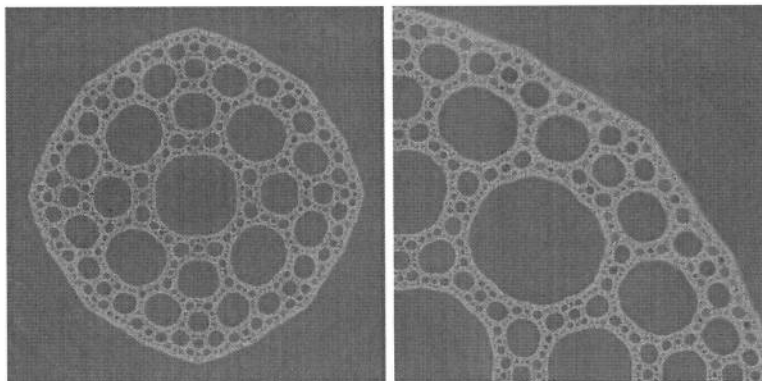


Figura 2. Curva de Sierpiński.

corresponde a la aplicación $z \mapsto z^2 + \lambda/z$ con $\lambda \approx -0.59259$. El trabajo desarrollado en [1] demuestre que éste conjunto de Julia es homeomorfo al Triángulo de Sierpiński. De aquí que los conjuntos asociados a la familia R_λ (y en general, a familias de grados mayores del tipo $z \mapsto z^n + \lambda/z^m$, con $n \geq 2, m \geq 1$, ver Figura 4) son descritos como empaques de Sierpiński generalizados.

Nuestro objetivo es presentar un resultado de rigidez asociado a aplicaciones racionales de grado 4 que son postcríticamente finitas y satisfacen ciertas condiciones adicionales. Se presentan demostraciones nuevas para algunos resultados y se describen las ideas principales del Teorema de Rigidez (Teorema 1).

En la Sección 2, analizamos las propiedades dinámicas de la familia R_λ . La definición precisa de un empaque de Sierpiński generalizado se proporciona en la Sección 3, mientras que el resultado principal se introduce en la Sección 4. En la sección final, se explica este resultado por medio de un ejemplo.

Agradecimientos: Este artículo reporta los resultados presentados en la Escuela Matemática de América Latina y el Caribe, con sede en la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, del 2 al 13 de Agosto. Agradezco a los organizadores de

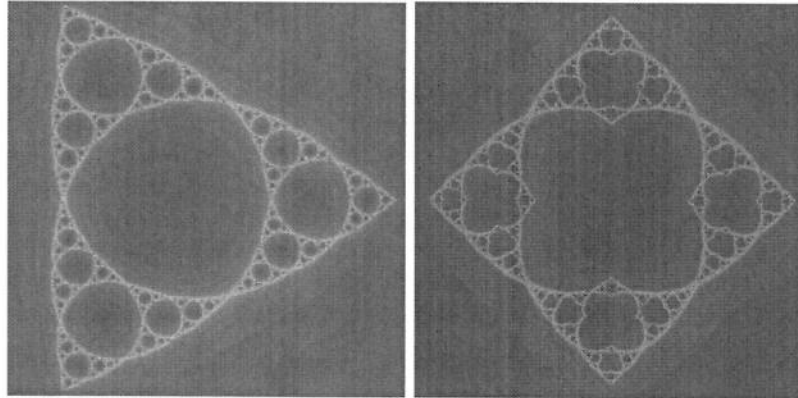


Figura 3. Empaque generalizado de grados 3 y 4.

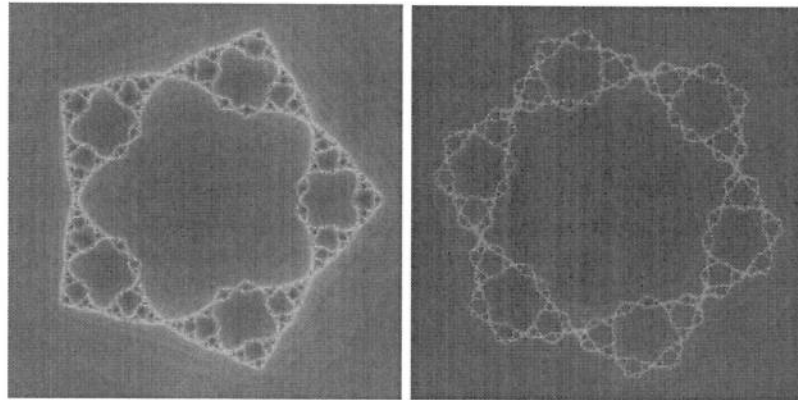


Figura 4. Empaque generalizado de grados 5 y 6.

la escuela por la invitación y su hospitalidad en lo que fue una corta pero placentera visita.

2. Propiedades de R_λ

Referimos al lector a [2] para consultar aspectos generales de la dinámica holomorfa.

Describimos las propiedades generales de la familia

$$R_\lambda(z) = z^2 + \frac{\lambda}{z^2}, \quad \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Es fácil verificar que el punto al infinito es punto fijo superatractor, mientras que el origen es un polo de orden 2. Ambos son puntos críticos simples. Un cálculo directo nos permite ver que las soluciones de

$$z^4 - \lambda = 0, \tag{1}$$

son los 4 puntos críticos restantes. Llamamos a estas soluciones *puntos críticos libres* y notamos que todos ellos se localizan sobre la circunferencia $|z| = |\lambda|^{-4}$. Denotemos por

$$c_0 = |\lambda|^{1/4} \exp\left(\frac{i2\pi \arg(\lambda)}{4}\right),$$

y $c_1 = ic_0, c_2 = -c_0$ y $c_3 = -ic_0$ los restantes puntos críticos.

Cada R_λ exhibe una simetría rotacional: si ω es una raíz cuarta primitiva de la unidad, se tiene

$$R_\lambda(\omega^k z) = \pm R_\lambda(z),$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. Además, existe una *involución*: si H_λ representa una de las dos ramas de $z \mapsto \sqrt{\lambda}/z$, entonces $R_\lambda \circ H_\lambda = R_\lambda$. Observe que la raíz positiva fija los puntos c_0 y c_2 , mientras que la raíz negativa fija c_1 y c_3 .

Debido a estas simetrías, R_λ tiene esencialmente una única órbita crítica: los cuatro puntos críticos libres son enviados a dos valores críticos, $v_\pm = 2\sqrt{\lambda}$, y estos, a su vez, son enviados a $4\lambda + 1/4$. Un simple cálculo muestra $R_\lambda(c_j) = v_{\text{signo}\{(-1)^j\}}$.

La *cuenca inmediata de atracción* asociada al punto fijo superatractor $z = \infty$, denotada \mathcal{B}_λ , es el abierto conexo maximal que contiene ∞ y cuyos puntos satisfacen $R_\lambda^k(z) \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$. Si el conjunto de Julia \mathcal{J}_λ es conexo, entonces la *cuenca de atracción* del punto al infinito, esto es,

$$\bigcup_{j \geq 0} R_\lambda^{-j}(\mathcal{B}_\lambda),$$

contiene más de una componente. En particular $R_\lambda^{-1}(\mathcal{B}_\lambda)$ consiste de dos componentes conexas, \mathcal{B}_λ y una segunda componente abierta maximal que contiene el origen, usualmente denotada por \mathcal{T}_λ . Excepto por la Figura 1, \mathcal{B}_λ es la región externa no acotada mientras que \mathcal{T}_λ es la región central acotada.

Denotemos por \mathcal{P} el conjunto de todos los parámetros λ para los cuales, los puntos críticos libres de R_λ se encuentran en la frontera de \mathcal{B}_λ y sus órbitas positivas son finitas. Las condiciones sobre los parámetros \mathcal{P} implican que las órbitas críticas libres son preperiódicas a puntos periódicos repulsores localizados en $\partial\mathcal{B}_\lambda$. A partir de estas ideas, es posible demostrar el siguiente resultado (consultar [1] para mayores detalles).

Proposición 1. El conjunto \mathcal{P} es denso en la frontera del lugar de conexidad de R_λ .

3. Empaques generalizados

Para describir un empaque de Sierpiński generalizado, fijamos $N \geq 3$ y denotemos por Δ el disco unitario cerrado, P el interior de una región poligonal donde ∂P la unión de N curvas simples y disjuntas de $\partial\Delta$ salvo por N vértices localizados en la frontera de Δ .

Sea $X_1 = \Delta - P$. Claramente, X_1 puede escribirse como la unión de N discos topológicos Δ_j . Al elegir N puntos distintos sobre cada $\partial\Delta_j$, podemos repetir el proceso de remover una región rectangular abierta con las mismas condiciones de frontera, de tal forma que $X_2 = \bigcup_j (\Delta_j - P)$ es la unión de N^2 discos topológicos.

Podemos repetir el proceso de tal forma que, en el paso k , X_k consiste de la unión de N^k discos topológicos.

Denotemos por X_∞ el conjunto límite de éste proceso iterativo. Para añadirle regularidad a la construcción, imponemos las siguientes condiciones sobre cada X_k .

Condición S: X_k tiene una simetría N -rotacional.

Condición V: Para todo $k \geq 2$ y $U \subset X_{k-1}$ disco topológico, existe un entero $0 < m < N$ tal que $U - P$ es un disco de X_k si y sólo si P tiene exactamente m vértices sobre la frontera de un polígono previamente removido en la construcción de X_{k-1} .

Observación 1. La condición **V** restringe la posición de m vértices de la región poligonal P . Sin embargo, los restantes $N - m$ vértices pueden localizarse en los arcos de la frontera de $U - \bar{P}$. El teorema de rigidez se basa en analizar las posibles configuraciones que estos vértices pueden realizar.

En la Figura 5 se muestra para $N = 4$ y $m = 2$ un conjunto X_2 que satisface las condiciones **S** y **V**, mientras que a la derecha, el conjunto X_2 no satisface ninguna de las condiciones.

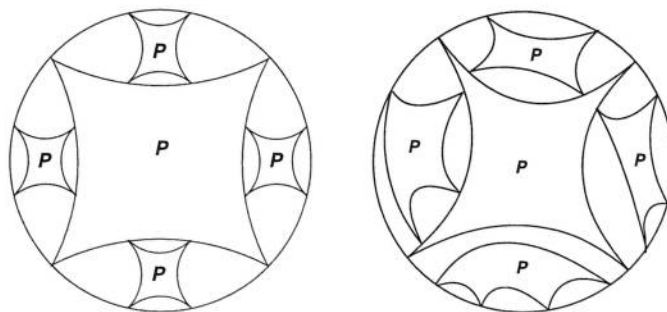


Figura 5.

Definición 1. Decimos que X_∞ es un *empaquetamiento generalizado de Sierpiński* si X_∞ es el conjunto límite del proceso descrito anteriormente y para cada $k \geq 2$, X_k satisface las condiciones **S** y **V** con $N \geq 3$ y $0 < m < N$ fijos.

Observación 2. El Triángulo de Sierpiński satisface la definición de empaquetamiento generalizado si P es una región triangular, con $N = 3$, $m = 1$. Para la familia R_λ , nos interesa analizar los empaquetamientos generalizados con $N = 4$ y $m = 2$.

Teorema 1. Para todo parámetro $\lambda \in \mathcal{P}$, el conjunto de Julia de R_λ es homeomorfo a empaquetamiento generalizado de Sierpiński.

Este teorema se basa en el siguiente lema, para el cual damos una demostración alterna a la que se encuentra en [1].

Lema 1. Si $\lambda \in \mathcal{P}$, entonces $\partial\mathcal{B}_\lambda \cap \partial\mathcal{T}_\lambda = \{c_0, c_1, c_2, c_3\}$.

Prueba. Por definición del conjunto \mathcal{P} , los puntos críticos libres de R_λ están sobre la frontera de \mathcal{B}_λ . Si c representa uno de estos puntos críticos y D un disco abierto suficientemente pequeño alrededor de c (de tal forma que no contenga otro punto crítico), entonces R_λ envía D sobre su imagen 2-a-1. Ya que cada punto $w \in \mathcal{B}_\lambda \cap R_\lambda(D)$ tienen una preimagen $z \in \mathcal{B}_\lambda \cap D$, si H_λ es la involución que fija c , podemos elegir w de tal forma que $H_\lambda(z) \in D \cap \mathcal{T}_\lambda$. Tomando una sucesión de puntos $w \in \mathcal{B}_\lambda \cap R_\lambda(D)$ que converjan a $R_\lambda(c)$, obtenemos una sucesión en \mathcal{B}_λ y otra en \mathcal{T}_λ que convergen a c . Por lo tanto $c \in \partial\mathcal{B}_\lambda \cap \partial\mathcal{T}_\lambda$. Por la 4-simetría, concluimos el resultado. ■

Prueba. (Demostración del Teorema 1) Explicamos las ideas principales en la demostración, mayores detalles pueden consultarse en [1].

Ya que $z = \infty$ es un punto fijo superatractor, el Teorema de Böttcher nos permite encontrar curvas γ_j que unen el punto al infinito con el punto crítico c_j . Denotemos por η_j la imagen de γ_j bajo la involución apropiada, de tal forma que η_j une el origen con c_j . Por el Lema 1, estas curvas pueden elegirse de tal forma que sólo intersecten \mathcal{J}_λ en los puntos críticos.

El conjunto $\bigcup_j(\gamma_j \cup \eta_j)$ separan el plano complejo en cuatro sectores S_0, \dots, S_3 rotacionalmente simétricos. La indexación de los sectores se realiza de tal forma que S_0 contiene el único punto fijo repulsor $p_\lambda \in \partial\mathcal{B}_\lambda$. La unicidad de p_λ se debe a la conjugación de R_λ con $z \mapsto z^2$, la cual puede extenderse a la frontera de la cuenca inmediata por ser R_λ postcríticamente finita, [2].

Por construcción, el interior de cada sector S_j es enviado inyectivamente a todo el plano complejo menos las curvas $R_\lambda(\gamma_{j-1}) \cup R_\lambda(\gamma_j)$ que conectan $v_\pm \in \partial\mathcal{B}_\lambda$ con el punto al infinito. Esto implica que cada S_j contiene una de las cuatro componentes de $R_\lambda^{-1}(\overline{\mathcal{T}_\lambda})$ en su interior. En particular, las componentes de $\partial\mathcal{B}_\lambda \cup \partial\mathcal{T}_\lambda$ en cada S_j son enviadas inyectivamente a toda $\partial\mathcal{B}_\lambda$. Esto implica que la componente $U \subset S_j$ que satisface $R_\lambda(U) = \overline{\mathcal{T}_\lambda}$, tiene dos vértices en $\partial\mathcal{T}_\lambda \cap S_j$ y dos vértices en $\partial\mathcal{B}_\lambda \cap S_j$. Esto implica que \mathcal{J}_λ satisface la condición **V** con $m = 2$. La condición **S** es obvia.

Finalmente, tomando $K_0 = \widehat{\mathbb{C}} - \mathcal{B}_\lambda$, $K_1 = K_0 - \mathcal{T}_\lambda$ y $K_{n+1} = K_n - R_\lambda^{-n}(\mathcal{T}_\lambda)$, se obtiene

$$\mathcal{J}_\lambda = \bigcap_{n \geq 0} K_n,$$

es un conjunto compacto y conexo que satisface ambas condiciones de un empaque generalizado. ■

4. Rigidez

El resultado principal del artículo [1] puede enunciarse de la siguiente forma.

Teorema 2. Para cualesquier par de parámetros $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$, R_λ y R_μ son topológicamente conjugados en sus respectivos conjuntos de Julia si y sólo si $\mu = \lambda$ o $\mu = \bar{\lambda}$.

La demostración de este resultado se basa en las siguientes ideas: primero, el conjunto de los puntos críticos libres $C_\lambda = \{c_0, \dots, c_3\}$ forman un *conjunto de 4-disconexión*, esto es, $\mathcal{J}_\lambda - C_\lambda$ consiste de cuatro componentes conexas. Más aún, c es el único subconjunto de \mathcal{J}_λ con dicha propiedad.

Por otro lado, supongamos que existe un homeomorfismo $h : \mathcal{J}_\lambda \rightarrow \mathcal{J}_\mu$ que preserve orientación y conjuga la dinámica de R_λ y R_μ sobre sus conjuntos de Julia. Por su unicidad, $h(p_\lambda) = p_\mu$. Claramente, h debe preservar los conjuntos de puntos críticos libres C_λ y C_μ , y como preserva orientación, se sigue $C_\lambda \ni c_j \mapsto c_j \in C_\mu$.

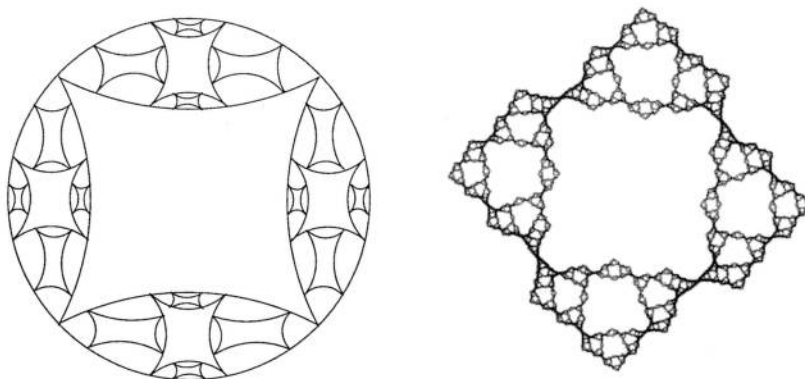


Figura 6. Representación esquemática de \mathbb{J}_μ^3 a la izquierda y \mathcal{J}_μ para cierto $\mu \in \mathcal{P}$.

Como R_λ y R_μ son postcríticamente finitas, ∂B_λ y todas sus preimágenes son curvas simples cerradas. De aquí que podamos construir un modelo topológico asociado al *esqueleto* de cada conjunto de Julia. El esqueleto de \mathcal{J}_λ se define como

$$\mathbb{J}_\lambda := \bigcup_{k \geq 0} R_\lambda^{-k}(\partial B_\lambda),$$

mientras que el esqueleto de orden n está dado por el conjunto

$$\mathbb{J}_\lambda^n := \bigcup_{k=0}^n R_\lambda^{-k}(\partial B_\lambda).$$

Ver Figura 6, donde $\mu \approx -0.246 + i0.15913$.

La demostración del teorema se basa en restringir el homeomorfismo a los esqueletos de orden $k = 0, 1, 2, \dots$. Si $\mu \neq \lambda$ (o $\mu \neq \bar{\lambda}$ en el caso de un homeomorfismo que invierte orientación) entonces existirá un orden k_* para el cual h no puede extenderse a todos los esqueletos de órdenes $j \geq k_*$.

5. Ejemplos

Para trabajar con el modelo combinatorio asociado a los esqueletos, es necesario definir los itinerarios de las órbitas críticas de R_λ .

Definición 2. Un punto $z \in \mathbb{J}_\lambda - C_\lambda$ tiene *itinerario* $s_0s_1s_2\dots$ con $s_j = k$ si y sólo si

$$R_\lambda^j(z) \in S_k, \text{ para cada } k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Por simetrías, hemos visto que existe esencialmente una única órbita crítica después de dos iteraciones. Elegimos pues definir el *itinerario crítico de λ* como el itinerario asociado a $R_\lambda^2(c_j) = 4\lambda + 1/4$.

Veamos un ejemplo particular en donde los itinerarios y los esqueletos asociados a ciertos valores de λ y μ difieren en un nivel $k_* = 4$.

Supongamos $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ tales que

- El itinerario de $4\lambda + 1/4$ es $111312\bar{0}$. En este caso, $\lambda \approx -0.12713 + i0.2138$.
- El itinerario de $4\mu + 1/4$ es $11232\bar{0}$. El parámetro μ es el asociado a la Figura 6.

Esta combinatoria determina la estructura de los esqueletos \mathbb{J}_λ y \mathbb{J}_μ . Efectivamente, los itinerarios críticos determinan la configuración de los vértices de cada esqueleto como lo muestran las Figuras 6 y 7. Observe que hasta el orden 2, los esqueletos son los mismos, pero la configuración de los vértices de componentes en $R_\lambda^{-3}(\bar{B}_\lambda)$ son distintas a las configuraciones en \mathbb{J}_μ .

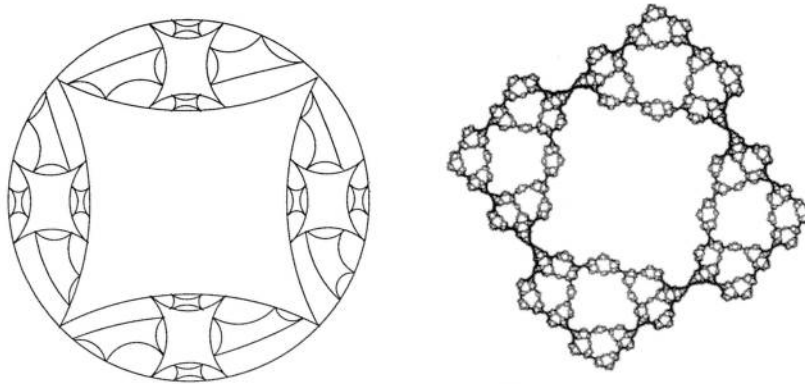


Figura 7. Representación esquemática de \mathbb{J}_λ^3 a la izquierda y \mathcal{J}_λ para cierto $\lambda \in \mathcal{P}$.

Debido a que $h : \mathbb{J}_\lambda^2 \rightarrow \mathbb{J}_\mu^2$ no puede extenderse a órdenes mayores, no puede existir un homeomorfismo que conjuge las dinámicas de las aplicaciones cuando se restringen a los conjuntos de Julia.

Referencias

- [1] R. L. Devaney, M. Moreno Rocha & S. Seigmund, *Rational maps with generalized Sierpiński gasket Julia sets*, Topol. and Appl. **154** (2007) 11–27.
- [2] J. Milnor, *Complex dynamics on the Riemann sphere* (Princeton University Press, Princeton New Jersey, 2006).