

Ecuaciones Diferenciales en \mathbb{R}^2

Dra. Mónica Moreno Rocha
Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Diciembre 5–9, 2011

Resumen

En estas notas se plantea la discusión de cuatro teoremas centrales en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias en \mathbb{R}^n . Iniciaremos estudiando las condiciones bajo las cuales una ecuación diferencial tiene solución y ésta es única. Debido a que no toda ecuación diferencial puede resolverse explícitamente, seguiremos el estudio cualitativo de las soluciones por medio de técnicas de linearización y estabilidad. Continuaremos con un análisis local de puntos regulares y puntos singulares del campo vectorial para finalizar con el comportamiento asintótico de las soluciones en \mathbb{R}^2 .

El material aquí presentado está basado en el libro *Ordinary differential equations with applications*, de C. Chicone, donde la exposición es realizada sobre espacios de Banach. Dos libros clásicos complementan estas notas: *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, de M. W. Hirsch y S. Smale, y *Ordinary differential equations*, de V. I. Arnol'd.

Notación

- \mathbb{R}^n espacio real n -dimensional.
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio (subconjunto abierto y conexo).
- $C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ espacio de funciones continuamente diferenciables con dominio en Ω y contradominio en \mathbb{R}^n .
- $T_x\Omega$ espacio tangente con punto base $x \in \Omega$.
- $Df(x)$ operador derivada definido sobre el espacio tangente $T_x\Omega$.
- J_∞ intervalo de máxima definición.
- $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ espacio de transformaciones lineales de \mathbb{R}^n en sí mismo.
- $GL(2, \mathbb{R})$ matrices 2×2 de entradas reales y determinante distinto de cero (invertibles).

Capítulo 1

Existencia y unicidad

Consideremos el problema de valor inicial

$$x' = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.1)$$

donde $t \in J \subset \mathbb{R}$, $x, x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $F : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función al menos continua en ambas variables.

Supongamos por un momento que la función F no depende de la *variable temporal*, t , sino sólo de la *variable espacial*, x . Entonces, la transformación

$$\mathcal{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

con $\mathcal{F}(x) = (x, F(x))$ define un *campo vectorial en \mathbb{R}^n* de clase C^1 si $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, donde $x \in \Omega$ es el *punto base* y $F(x) \in T_x\Omega$ es el *vector tangente* sobre el punto base. El campo vectorial debe satisfacer

$$\pi_1 \circ \mathcal{F} = id|_{\mathbb{R}^n}$$

donde π_1 es la proyección en la primera variable. Usualmente, la función F es a la que se le denomina campo vectorial. En el caso más general en que $F = F(t, x)$, interpretamos este vector tangente en el punto base x como un vector que *cambia* con el tiempo.

En este capítulo nos concentramos en discutir la existencia y unicidad de soluciones de (1.1). La existencia de una solución pueden garantizarse por medio de la continuidad de F , sin embargo, la solución no es necesariamente única (ver Problema 1.4.1). Para ello requerimos que F sea al menos *Lipschitz en el segundo argumento*. Esto es, si existe una constante $\lambda > 0$ tal que para cada $t \in J$ y para todo $x, y \in \Omega$

$$|F(t, x) - F(t, y)| \leq \lambda|x - y|. \quad (1.2)$$

Teorema 1.0.1 (Teorema de Existencia y Unicidad Local) *Si la función $F : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ asociada al problema de valor inicial*

$$x' = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.3)$$

es continua y Lipschitz con respecto al segundo argumento, si $t_0 \in J$ y $x_0 \in \Omega$, entonces existen

- *abiertos $J_0 \subset J$ y $\Omega_0 \subset \Omega$ tales que $(t_0, x_0) \in J_0 \times \Omega_0$, y*
- *una función $\chi : J_0 \times \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $(t, x) \mapsto \chi(t, x)$*

tales que $t \mapsto \chi(t, x)$ es solución de $x' = F(t, x)$, con $\chi(t_0, x) = x_0$. En particular, $t \mapsto \chi(t, x_0)$ es la única solución del problema de valor inicial (1.3).

Observación 1.0.2 *Si F es un campo vectorial C^1 , entonces la función $(t, x) \mapsto \chi(t, x)$ resulta ser continuamente diferenciable en ambos argumentos: fijando $x = x_0$, la solución $t \mapsto \chi(t, x_0)$ es naturalmente diferenciable, pues satisface el problema de valor inicial; en cambio, si fijamos $t = t_0$, el que $x \mapsto \chi(t_0, x)$ sea C^1 implica que las soluciones dependen continuamente de la condición inicial $x \in \Omega_0$. Por su extensión, omitiremos la demostración de esta propiedad y referimos al lector a la Sección 2 del Capítulo XV de [HS].*

1.1. Demostración del Teorema de Existencia y Unicidad

A partir del Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene que la función $t \mapsto x(t)$ es solución de (1.3) si y sólo si es solución de la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, x(s)) ds.$$

Fijemos $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$ y denotemos por $b_\delta = b(t_0, \delta)$, $B_\nu = B(x_0, \nu)$ bolas abiertas centradas en t_0 y x_0 , con radios $\delta > 0$ y $\nu > 0$ suficientemente pequeños para que

$$\overline{b(t_0, \delta)} \times \overline{B(x_0, \nu)} \subset J \times \Omega.$$

Por la continuidad de F en su dominio, existe una constante $M > 0$ tal que

$$\sup |F(t, x)| \leq M$$

donde el supremo es tomado sobre $\overline{b_\delta} \times \overline{B_\nu}$. Además, como F es Lipschitz en el segundo argumento, existe $\lambda > 0$ tal que se satisface (1.2) para cada $t \in J$ y todo $x, y \in \Omega$.

Eligamos $\delta > 0$ tal que $\delta\lambda < \min\{1, \nu/2\}$ y $\delta M < \nu/2$.

Denotemos por $B_{\nu/2}$ la bola centrada en x_0 y de radio $\nu/2 > 0$ y construyamos el conjunto de funciones

$$X = \{f : b_\delta \times B_{\nu/2} \rightarrow B_\nu \mid f \text{ es continua y acotada}\}.$$

Podemos definir una norma sobre X dada por

$$\|f\| = \sup |f(t, x)|$$

donde el supremo es tomado sobre $b_\delta \times B_{\nu/2}$. De hecho, $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio métrico completo (Problema 1.4.2). Finalmente, definamos el operador

$$\Lambda(f)(t, x) = x + \int_{t_0}^t F(s, f(s, x)) ds, \quad (1.4)$$

donde $f \in X$. Veamos que $\Lambda : X \rightarrow X$. Claramente, $\Lambda(f)$ es una función continua sobre $b_\delta \times B_{\nu/2}$ y que toma valores en \mathbb{R}^2 . Vemos que $\Lambda(f)$ toma valores en B_ν . De su definición y las acotaciones de F en $\overline{b_\delta} \times \overline{B_\nu}$ obtenemos

$$\begin{aligned} |\Lambda(f)(t, x) - x_0| &\leq |x - x_0| + \left| \int_{t_0}^t |F(s, f(s, x))| ds \right| \\ &\leq |x - x_0| + \delta M, \quad \text{pues } \sup |F| \leq M \text{ y } |t - t_0| < \delta, \\ &< \nu, \quad \text{pues } x \in B(x_0, \nu/2) \text{ y } \delta M < \nu/2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el contradominio de $\Lambda(f)$ es B_ν .

Afirmamos que Λ es una contracción. Efectivamente, si $f, g \in X$ se tiene

$$|\Lambda(f)(t, x) - \Lambda(g)(t, x)| \leq \left| \int_{t_0}^t |F(s, f(s, x)) - F(s, g(s, x))| ds \right|$$

pero al ser F Lipschitz en el segundo argumento, se sigue que para cada $s \in (t_0, t)$ y para todo $f(s, x), g(s, x) \in B_\nu$, $x \in B_{\nu/2}$,

$$|\Lambda(f)(t, x) - \Lambda(g)(t, x)| \leq |t - t_0| \lambda |f(s, x) - g(s, x)|$$

tomando el supremo sobre $b_\delta \times B_{\nu/2}$ a ambos lados de la desigualdad, se sigue de la definición de la norma en X que

$$\|\Lambda(f) - \Lambda(g)\| \leq \delta \lambda \|f - g\|,$$

esto es, Λ es una contracción en X con constante de contracción $\alpha := \delta \lambda$, que por definición de δ se sigue $\alpha < 1$. Podemos pues aplicar el siguiente resultado.

Teorema 1.1.1 (Teorema de la aplicación contrayente) *Si T es una contracción sobre un espacio métrico completo (X, d) con constante $0 < \alpha < 1$, entonces T tiene un único punto fijo $x_0 \in X$. Más aún, si $x \in X$, entonces $T^n(x) \rightarrow x_0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y*

$$d(T^n(x), x_0) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(T(x), x).$$

Sea $\chi \in X$ el único punto fijo de Λ . Por definición, χ es una solución de (1.3) pues al derivar la expresión $\chi(t, x) = \Lambda(\chi)(t, x)$ con respecto a t obtenemos

$$\frac{d}{dt}\chi(t, x) = F(t, \chi(t, x)).$$

Tanto χ como F son funciones continuas en ambas variables, por lo tanto, si fijamos $x \in B_{\nu/2}$, la función $t \mapsto \chi(t, x)$ es C^1 . Concluimos la demostración definiendo $J_0 = b_\delta$ y $\Omega_0 = B_{\nu/2}$.

1.2. Extensiones

Aunque el Teorema de Existencia y Unicidad demuestra la existencia de un intervalo pequeño donde la solución del problema de valor inicial existe, nos gustaría encontrar el intervalo de máxima definición de la solución. Dado

$$x' = f(t, x) \quad x(t_0) = x_0$$

supongamos que la solución $t \mapsto \varphi(t)$ está definida en un intervalo J_0 que contiene a t_0 . Si existe otro intervalo $J_1 \supset J_0$ donde esta definida otra solución al PVI dada por $t \mapsto \psi(t)$, entonces por unicidad de soluciones, $\varphi(t) = \psi(t)$ para todo $t \in J_0$. De hecho $\varphi(t)$ tiene una *extensión continua* a J_1 . Para fijar ideas, sea $J_0 = (a, b) \subset J_1 = (\alpha, \beta)$ y supongamos $\alpha < b < \beta$. Por continuidad de las soluciones, se tiene

$$\lim_{t \rightarrow b} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow b} \psi(t) = \psi(b)$$

por lo tanto, la extensión está dada por $\varphi(t) := \psi(t)$ para $t \in [b, \beta)$. Claramente, la extensión de φ es única.

Si existe otro intervalo $J_2 \supset J_0$ y otra solución al PVI, los mismos argumentos muestran que φ puede definirse en $J_0 \cup J_1 \cup J_2$. Denotemos por J_∞ el intervalo abierto más grande que contiene a t_0 y donde φ está bien definida. Esto es, J_∞ es el intervalo de máxima definición de φ .

¿Qué tan grande puede ser J_∞ ? A priori no podemos saberlo, aún y cuando el campo vectorial no tenga singularidades.

Ejemplo 1.2.1 *El problema de valor inicial*

$$x' = x^2 \quad x(0) = 1$$

tiene por solución $x(t) = (1-t)^{-1}$ y está bien definida en $(-\infty, 1)$. Notemos que la solución no puede extenderse por la derecha, pues

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} x(t) = \infty,$$

esto es, la solución se va a infinito (blows up) en tiempo finito. Por lo tanto $J_\infty = (-\infty, 1)$.

Este comportamiento de “blow up” es típico cuando el intervalo de máxima definición es acotado por un lado.

Teorema 1.2.2 (Teorema de Extensión) Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $I \subseteq \mathbb{R}$ abiertos y donde $(\alpha, \beta) \subseteq I$ y $x_0 \in \Omega$. Sea $f : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función C^1 y para el PVI

$$x' = f(t, x) \quad x(t_0) = x_0$$

se tiene la solución $t \mapsto \varphi(t)$ con intervalo de máxima definición $J_\infty = (\alpha, \beta)$.

Si $\beta < \infty$, entonces para cada compacto $K \subset \Omega$, existe algún $t \in J_\infty$ tal que $\varphi(t) \notin K$. En particular se cumple que, o bien $|\varphi(t)|$ no es acotada, o bien $\varphi(t)$ converge a la frontera de Ω cuando $t \rightarrow \beta$.

Su demostración requiere del siguiente resultado de análisis.

Lema 1.2.3 Sea X un espacio métrico completo y $S \subset X$ un subconjunto no vacío. Sea $f : S \rightarrow X$ una función uniformemente continua. Entonces f preserva sucesiones de Cauchy. Más aún, f tiene una extensión $\tilde{f} : \bar{S} \rightarrow X$ tal que $\tilde{f} = f$ en S y $\tilde{f}|_{\bar{S}}$ es continua.

1.3. Demostración del Teorema de Extensión

Sea $t \mapsto \varphi(t)$ la solución del PVI con intervalo de máxima definición $J_\infty = (\alpha, \beta)$ y supongamos $\beta < \infty$. Procedemos por contradicción.

Sea $K \subset \Omega$ compacto y supongamos que para toda $t \in J_\infty$, $\varphi(t) \in K$. Por las propiedades del campo vectorial, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$ para toda $x \in K$. Veamos que $\varphi : [t_0, \beta) \rightarrow K$ es uniformemente continua. En efecto, para todo $s_1, s_2 \in [t_0, \beta)$ con $s_1 < s_2$ se tiene

$$|\varphi(s_1) - \varphi(s_2)| = \left| \int_{s_1}^{s_2} f(\varphi(t)) dt \right| \leq M |s_1 - s_2|.$$

Por el lema anterior, existe una extensión continua de φ a todo $[t, \beta]$. Por el Teorema de Existencia y Unicidad, $\varphi(t)$ en $[t_0, \beta)$ es C^1 y satisface

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(\varphi(s)) ds.$$

Pero ya que f es también C^1 , entonces $t \mapsto f(\varphi(t))$ es continua en $[t_0, \beta]$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \varphi(\beta) &= \varphi(t_0) + \lim_{t \rightarrow \beta^-} \int_{t_0}^t f(\varphi(s)) ds, \\ &= \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{\beta} f(\varphi(s)) ds \end{aligned}$$

Consideremos ahora el nuevo PVI dado por $x' = f(x)$ con $x(\beta) = \varphi(\beta)$. Por el Teorema de Existencia y Unicidad, existe un $\delta > 0$ y una única solución $t \mapsto \psi(t)$ definida en $(\beta - \delta, \beta + \delta)$ que satisface el nuevo PVI (esto es, $\psi(\beta) = \varphi(\beta)$).

Por último, definamos $\gamma : [t_0, \beta + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = \varphi(t)$ si $t \in [t_0, \beta)$, y $\gamma(t) = \psi(t)$ si $t \in (\beta, \beta + \delta)$. Si $t \in [t_0, \beta]$ entonces

$$\gamma(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(\gamma(s)) ds$$

y si $t \in (\beta, \beta + \delta)$

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \psi(\beta) + \int_{\beta}^t f(\gamma(s)) ds, \quad \text{pero } \psi(\beta) = \varphi(\beta), \\ &= \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{\beta} f(\gamma(s)) ds + \int_{\beta}^t f(\gamma(s)) ds. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la forma integral de γ es válida para todo $t \in [t_0, \beta + \delta)$ lo que extiende el dominio de φ por la derecha y contradice que $J_{\infty} = (\alpha, \beta)$ es el intervalo de máxima definición.

1.4. Problemas propuestos

Problema 1.4.1 *Construya un número infinito de soluciones para el problema de valor inicial*

$$x' = x^{1/3}, \quad x(0) = 0.$$

¿Por qué esto no contradice el Teorema de Existencia y Unicidad?

Problema 1.4.2 *Demuestre que $X = \{f : b \times B \rightarrow B \subset \mathbb{R}^2 \mid f \text{ es continua y acotada}\}$ junto con la norma $\|f\| = \sup_{b \times B} |f(t, x)|$ forma un espacio métrico completo.*

Problema 1.4.3 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ y $K \subset \Omega$ compacto tal que $x_0 \in K$. Suponga que para el PVI $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$, para cada $0 < \beta$ existe una solución $u : [0, \beta] \rightarrow \Omega$, $u(0) = x_0$ y que satisface*

$$u(t) \in K, \quad \text{para todo } 0 \leq t \leq \beta.$$

Demuestre que existe una única solución $\varphi : [0, \infty) \rightarrow U$ con $\varphi(0) = x_0$ y tal que $\varphi(t) \in K$ para todo $t \geq 0$.

Capítulo 2

Estabilidad y linealización

2.1. Soluciones completas y flujos

Consideremos a partir de ahora ecuaciones diferenciales autoónomas, esto es, ecuaciones donde el campo vectorial es independiente de t y sólo depende de la variable posición $x \in \mathbb{R}^n$. En particular, estudiaremos el comportamiento cualitativo de soluciones para

$$x' = f(x)$$

donde $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Por simplicidad, supongamos que todas las soluciones particulares de la ecuación autónoma tienen a \mathbb{R} como el intervalo de máxima definición. En dicho caso, decimos que las soluciones son *completas*.

Definición 2.1.1 Sea $\varphi : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$ dada por $(t, x) \mapsto \varphi(t, x)$ y tal que para cada $x \in \Omega$, $t \mapsto \varphi(t, x) = \varphi_t(x)$ es solución del problema de valor inicial

$$\frac{d}{dt}\varphi(t, x) = f(\varphi(t, x)), \quad \varphi(0, x) = x.$$

Decimos que φ es el flujo de la ecuación diferencial y *satisface*

$$\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x)) \tag{2.1}$$

para todo $t, s \in \mathbb{R}$ y $x \in \Omega$.

En el caso general de soluciones no completas, la condición (2.1) se satisface siempre y cuando ambos lados de la igualdad estén definidos. Si $x \in \Omega$ y existe $T > 0$ tal que $\varphi(T, x) = x$, entonces $\varphi(t + T, x) = \varphi(t, \varphi(T, x)) = \varphi(t, x)$. En esta caso decimos que

$t \mapsto \varphi(t, x)$ es una *solución periódica de período T* . Una *solución de equilibrio* (o un *punto de equilibrio*) es una solución constante dada por $\varphi_t(\hat{x}) \equiv \hat{x}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Notemos que $f(\hat{x}) = 0$ si y sólo si $t \mapsto \varphi_t(\hat{x})$ es una solución de equilibrio. Así pues, los ceros del campo vectorial definen los puntos de equilibrio.

2.2. Sistemas lineales

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales homogéneas

$$x' = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

donde $A : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es suave sobre un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$. Notemos que la continuidad de A se entiende al identificar el espacio de transformaciones lineales en \mathbb{R}^n con \mathbb{R}^{n^2} .

Para el problema de valor inicial asociado a (2.2),

$$x' = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.3)$$

el Teorema de Existencia y Unicidad Local nos garantiza la existencia de un intervalo suficientemente pequeño $J \subset \mathbb{R}$ donde $t_0 \in J$ y la solución está definida. Efectivamente, como $t \mapsto A(t)$ es acotada en subconjuntos compactos de I , se sigue que el campo vectorial $(t, x) \mapsto A(t)x$ es (localmente) Lipschitz en la segunda variable. El siguiente resultado nos asegura que el intervalo de máxima definición de la solución coincide con el intervalo de definición de $A(t)$.

Proposición 2.2.1 *Si $A(t)$ es continua sobre el intervalo $I = (a, b)$ y $t_0 \in I$, entonces el intervalo de máxima definición de la solución del PVI (2.3) coincide con I .*

Demostración: Sea $t \mapsto \varphi(t) \in \mathbb{R}^n$ la solución a (2.3) y $J_\infty = (\alpha, \beta)$ su intervalo de máxima definición. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\beta < b$ y busquemos una contradicción (el caso $a < \alpha$ es similar). Para $t \in J_\infty$ tenemos

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^t A(s)\varphi(s)ds.$$

Por la continuidad de A en $[t_0, \beta] \subset I$ existe $M > 0$ tal que $\|A(t)\| < M$ para $t \in [t_0, \beta]$. Y como $\varphi(t_0) = x_0$ tenemos

$$|\varphi(t)| \leq |x_0| + \int_{t_0}^t M|\varphi(s)|ds.$$

De la Desigualdad de Grönwall (ver Problema 2.4.1) donde $\psi(t) = M$, tenemos

$$|\varphi(t)| \leq |x_0|M \exp\left(\int_{t_0}^t ds\right) \leq |x_0|M(t - t_0),$$

esto es, φ es uniformemente acotada en $[t_0, \beta)$. Sin embargo, por el Teorema de Extensión, se sigue que $\varphi(t)$ converge a la frontera de \mathbb{R} (lo cual es imposible) o $|\varphi(t)|$ no es acotada cuando $t \rightarrow \beta^-$, lo que contradice la acotación uniforme. \square

2.2.1. Caso $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$

El estudio del sistema (2.2) se simplifica cuando $A(t)$ es una función constante, esto es, $A(t) \equiv A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Decimos que $t \mapsto \Psi(t)$ es la *matriz fundamental de soluciones* asociada al sistema

$$x' = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.4)$$

si para cada $t \in J$, $\Psi(t)$ es una matriz $n \times n$ (de entradas posiblemente complejas) donde cada vector columna es una solución de (2.4) y todas sus columnas son linealmente independientes. En particular, tenemos

Proposición 2.2.2 *La matriz $\Psi(t) = \exp(tA)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ y es una matriz fundamental de soluciones de (2.4).*

Este resultado se sigue inmediatamente de la definición del operador exponencial de una matriz, $\exp : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, el cual definimos como

$$\exp(A) := I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k,$$

donde la serie converge de forma absoluta con respecto a la norma $\|A\| = \sup_{|v|=1} |Av|$.

Consideremos el caso particular de matrices 2×2 de entradas reales, esto es $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Decimos que J_A es la *forma real canónica de Jordan* de A , si toma una de las siguientes formas:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

dependiendo si los valores propios de A son distintos, repetidos o complejos. A partir de estas formas canónicas, el sistema de ecuaciones asociado a J_A

$$y' = J_A y, \quad y \in \mathbb{R}^2$$

puede solucionarse de forma directa, pues el cálculo de $\exp(tJ_A)$ se simplifica enormemente. Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ denota una base de vectores propios (generalizados) de A y asociados a los valores propios reales λ_1, λ_2 (no necesariamente distintos), entonces la matriz fundamental $\Psi_{\mathcal{B}}(t) = \exp(tJ_A)$ en la base \mathcal{B} toma una de las siguientes formas

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & t \\ 0 & e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

En el caso de valores propios complejos $\lambda = a \pm ib$, $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$, y $v \in \mathbb{C}$ es un vector propio, entonces las columnas de $\Psi(t)$ en $\mathcal{B} = \{\operatorname{Re}(v), \operatorname{Im}(v)\}$ son definidas por la parte real e imaginaria de la expresión e^{tJA} , lo cual se reduce a

$$e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Finalmente, si $Q \in GL(2, \mathbb{R})$ denota la matriz de cambio de base entre \mathcal{B} y la base canónica, $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$, de tal forma que $x = Qy$, entonces la matriz fundamental en \mathcal{E} del sistema $x' = Ax$ se obtiene de la expresión

$$\Psi(t) = Q\Psi_{\mathcal{B}}(t).$$

Dado una condición inicial $x(0) = x_0$, la solución particular puede escribirse como

$$t \mapsto \Psi(t)\Psi^{-1}(0)x_0.$$

Ejemplo 2.2.3 Consideremos el sistema lineal $x' = Ax, x \in \mathbb{R}^2$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Un cálculo directo nos arroja valores propios distintos, $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$ asociado a vectores propios $v_1 = [1, -1]^T$ y $v_2 = [1, 3]^T$. Sea $J_A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. La matriz fundamental de soluciones de $y' = J_A y$ está dada por la expresión

$$t \mapsto \exp(tJ_A) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

mientras que la matriz de $x' = Ax$ resulta ser

$$t \mapsto Q \exp(tJ_A) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -e^{-t} & 3e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Más aún, podemos verificar que la solución particular que pasa por el vector $x(0) = x_0 = [1, 1]^T$ está dada por la expresión

$$Q \exp(tJ_A) Q^{-1} x_0 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2e^{-t} + 2e^{3t} \\ -2e^{-t} + 6e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Observación 2.2.4 La expresión $\varphi(t, x) = \Psi(t)x$ define el flujo del sistema $x' = Ax, x \in \mathbb{R}^n$. Más aún, por la Proposición 2.2.1, el flujo está definido para todo $t \in \mathbb{R}$ (esto es, φ es un flujo completo).

El comportamiento asintótico de las soluciones de un sistema lineal $x' = Ax$ es fácil de determinar, pues contamos con la forma explícita de las soluciones. Presentamos el siguiente resultado omitiendo su demostración.

Teorema 2.2.5 (Clasificación del punto de equilibrio) Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ diagonalizable, $x' = Ax$ con $x \in \mathbb{R}^n$. Luego, $\hat{x} = 0$ es el único punto de equilibrio del sistema. Más aún,

1. Si para todo valor propio λ , $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, entonces el flujo $\varphi(t, x)$ es una contracción y satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x) \rightarrow \hat{x}.$$

Decimos que \hat{x} es un pozo lineal (o nodo si además $\operatorname{Im}(\lambda) \neq 0$).

2. Si para todo valor propio, $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, entonces el flujo $\varphi(t, x)$ es una expansión y satisface

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, x) \rightarrow \hat{x}.$$

Decimos que \hat{x} es una fuente lineal (o foco si además $\operatorname{Im}(\lambda) \neq 0$).

3. Si para todo λ , $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$, entonces el flujo $\varphi(t, x)$ es acotado en \mathbb{R}^n . Llamamos a \hat{x} un centro lineal.
4. Si para todo λ con $\operatorname{Re}(\lambda) \neq 0$ y existen al menos dos valores propios λ, μ tales que $\operatorname{Re}(\lambda) < 0 < \operatorname{Re}(\mu)$, entonces \hat{x} es llamado un punto silla, pues existen soluciones particulares cuyo comportamiento asintótico converge a \hat{x} cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

Para el caso de un pozo lineal, podemos ser más precisos en el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones.

Teorema 2.2.6 (Pozos Lineales) Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Los siguientes enunciados son equivalentes.

1. Existe una norma $|\cdot|_a$ sobre \mathbb{R}^n y un número real $\alpha > 0$ tal que para todo vector $v \in \mathbb{R}^n$ y para todo $t \geq 0$,

$$|e^{tA}v|_a \leq e^{-\alpha t}|v|_a.$$

2. Si $|\cdot|$ es una norma arbitraria sobre \mathbb{R}^n , entonces existen constantes $C > 0$ y $\alpha > 0$ tal que para todo $v \in \mathbb{R}^n$ y $t \geq 0$,

$$|e^{tA}v| \leq Ce^{-\alpha t}|v|.$$

3. Todo valor propio de A tiene parte real negativa.

Demostración: La equivalencia (1) \rightarrow (2) se sigue de la equivalencia de normas sobre espacios vectoriales de dimensión finita. Ver que (2) \rightarrow (3) es sencillo si se suponen la existencia de un valor propio $\mu = a + ib$ con $a \geq 0$ y $v \in \mathbb{C}$ un vector propio. Luego, la solución $t \mapsto \psi(t) = \operatorname{Re}(e^{t\mu}v)$ satisface $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) \neq 0$, lo que contradice (2).

Verificar que (3)→(1) es un poco más elaborado, más la idea geométrica es importante. Supongamos que existen una constante $\alpha < 0$ tal que $\operatorname{Re}(\lambda) < \alpha$ para todo valor propio λ . Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ la base real de vectores propios de A . Redefiniendo el producto interno común de \mathbb{R}^n por

$$(v_i, v_j)_a := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

obtenemos que \mathcal{B} es ahora una base ortonormal. La *norma adaptada* se define por $|x|_a^2 := (x, x)_a$ para $x \in \mathbb{R}^n$ visto en la base \mathcal{B} como $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$, $a_i \in \mathbb{R}$. Realizando los cálculos componente a componente, se sigue

$$(Ax, x)_a \leq c(x, x)_a \leq \alpha|x|_a^2.$$

Finalmente, derivando $|x(t)|_a$ con respecto al tiempo, se tiene

$$\frac{d}{dt}|x|_a = \frac{(x, Ax)_a}{|x|_a}, \quad (2.8)$$

por la desigualdad anterior,

$$\frac{1}{|x|_a} \frac{d}{dt}|x|_a \leq \alpha$$

pero la parte izquierda es sólo la derivada logarítmica, por lo que al integrar a ambos lados de t_0 a t ,

$$\log \left| \frac{x(t)}{x(t_0)} \right|_a \leq \alpha t,$$

al exponenciar ambos lados, se sigue $|x(t)|_a \leq |x(t_0)|_a e^{t\alpha}$, y hemos acabado.

Observación 2.2.7 *Supongamos que el sistema $x' = Ax$ tiene un pozo lineal en $x = 0$. Sea $|\cdot|_a$ la norma adaptada y definamos la esfera concéntrica de radio $r > 0$*

$$S_r := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x|_a = r\}.$$

De (2.8) se sigue que

$$\frac{d}{dt}|x(t)|_a \leq \alpha|x(t)|_a < 0,$$

esto es, las trayectorias solución decrecen en norma a lo largo de esferas concéntricas.

2.3. Estabilidad de Lyapunov

Consideremos la ecuación diferencial autónoma $x' = f(x)$ donde f es C^1 y φ_t denota su flujo. Denotamos por \hat{x} un punto de equilibrio de la ecuación. Veremos que el estudio cualitativo de sistemas de la forma $x' = Ax$ puede darnos información local sobre la estabilidad de \hat{x} .

Definición 2.3.1 Dado el sistema no lineal

$$x' = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \quad (2.9)$$

con punto de equilibrio \hat{x} . Entonces, el sistema lineal asociado a \hat{x} se define por

$$y' = Df(\hat{x})y, \quad y \in \mathbb{R}^n \quad (2.10)$$

donde $Df(\hat{x})$ es el operador lineal derivada evaluado en \hat{x} .

Denotemos por $t \mapsto \varphi_t(x)$ y $t \mapsto \psi_t(y)$ los flujos de los sistemas (2.9) y (2.10). Si la matriz $Df(\hat{x})$ tiene una forma de Jordan no degenerada (esto es, los valores propios son distintos de cero), entonces el estudio del punto de equilibrio $\hat{y} = 0$ nos puede dar información sobre \hat{x} . Esto está garantizado por el siguiente resultado, considerado fundamental en la teoría de ecuaciones diferenciales.

Teorema 2.3.2 (Teorema de Hartman-Grobman) Si \hat{x} es un punto de equilibrio hiperbólico de (2.9) (esto es, los valores propios de $Df(\hat{x})$ tienen parte real distinta de cero), entonces existe un abierto $U \subseteq \Omega$ con $\hat{x} \in U$ y un homeomorfismo $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$h(\varphi_t(x)) = \psi_t(h(x))$$

para todo $x \in U$ y toda t donde la igualdad tenga sentido.

La demostración de este resultado puede consultarse en [Ch], capítulo 4, sección 3.

En otras palabras, si $\operatorname{Re}(\lambda) \neq 0$ para cada valor propio de $Df(\hat{x})$, entonces en una vecindad pequeña de \hat{x} , el comportamiento de las soluciones que pasan por puntos en esa vecindad es idéntico al comportamiento de soluciones asociadas a $\hat{y} = 0$. Así pues, si \hat{y} es un pozo, fuente o silla lineal, \hat{x} se dice un pozo, fuente o silla no lineal, y el retrato fase en una vecindad de \hat{x} es homeomorfo al retrato fase de \hat{y} .

¿Y que pasa en el caso que $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$? O peor aún, ¿qué pasa si todos los valores propios son cero ó $Df(\hat{x})$ es la matriz cero? Por ejemplo, para la ecuación en \mathbb{R} $x' = f(x)$ con $f(x) = x^2$ y $\hat{x} = 0$ un punto de equilibrio. Al linearizar tenemos $f'(x) = 2x$ y por lo tanto $f'(0) = 0$, por lo que ¡el sistema lineal es $y' = 0$! Para estudiar estos casos (los más interesantes), requerimos desarrollar la *Teoría de Estabilidad de Lyapunov*.

Definición 2.3.3 Dada la condición inicial $x_0 \in \Omega$, decimos que su solución particular $t \mapsto \varphi_t(x_0)$ es estable en el sentido de Lyapunov si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|\varphi_t(x) - \varphi_t(x_0)| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$.

Más aún, la solución $\varphi_t(x_0)$ se dice asintóticamente estable si para $|x - x_0| < \delta'$ se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi_t(x) - \varphi_t(x_0)| = 0.$$

Para el caso de un punto de equilibrio (esto es, si $\varphi_t(\hat{x}) \equiv \hat{x}$), la estabilidad de \hat{x} se traduce a que para todo $t \geq 0$,

$$|\varphi_t(x) - \hat{x}| < \varepsilon \quad \text{siempre y cuando} \quad |x - \hat{x}| < \delta,$$

y su estabilidad asintótica se traduce a que toda condición inicial suficientemente cercana a \hat{x} cumple $\varphi_t(x) \rightarrow \hat{x}$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Una solución es *inestable* si no es estable en el sentido de Lyapunov.

Ejemplo 2.3.4 *En el caso de sistemas lineales de coeficientes constantes $x' = Ax$ y donde A es linealizable, $\hat{x} = 0$ es estable, asintóticamente estable o inestable si \hat{x} es un centro, un pozo, o bien una fuente o un punto silla, respectivamente.*

Alexandr Lyapunov proporcionó en su tesis doctoral un resultado que permite determinar la estabilidad (asintótica) de puntos de equilibrio de sistemas autónomos no lineales. Este resultado se conoce como *método directo de Lyapunov*.

Consideremos la ecuación diferencial autónoma

$$x' = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.11}$$

y un punto de equilibrio $\hat{x} \in \Omega$. Sea $U \subseteq \Omega$ un abierto con $\hat{x} \in U$.

Definición 2.3.5 *Una función continua $L : U \subset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada una función de Lyapunov del sistema (2.11) para \hat{x} si*

1. $L(\hat{x}) = 0$,
2. $L(x) > 0$ para $x \in U - \{\hat{x}\}$,
3. $L \in C^1(U - \{\hat{x}\}, \mathbb{R})$ y para todo $x \in U - \{\hat{x}\}$ se cumple

$$\dot{L}(x) := \nabla L(x) \cdot f(x) \leq 0,$$

Si la desigualdad es estricta para todo $x \in U - \{\hat{x}\}$ entonces L es llamada función de Lyapunov estricta.

La función L puede pensarse como una generalización de una norma adaptada para la ecuación no lineal. Efectivamente, si consideramos las superficies de nivel de L

$$S_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid L(x) = r\},$$

estas juegan el papel de las “esferas” asociadas al flujo. Noten que S_r no tiene por qué ser la frontera de una región acotada.

Ahora, para $L(x) = L(x_1, x_2, \dots, x_n)$, se tienen que

$$\nabla L(x) = (\partial_{x_1} L, \dots, \partial_{x_n} L)$$

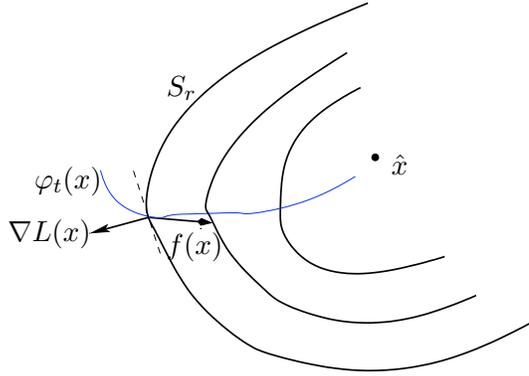


Figura 2.1: El vector normal $\nabla L(x)$ (para x en la hipersuperficie S_r) hace un ángulo mayor a $\pi/2$ con el vector $f(x)$ y la curva solución (en azul) “entra” al interior de S_r .

y este vector de derivadas parciales es la normal exterior a S_r en el punto $x \in S_r$.

Si evaluamos L en una solución que pasa por $x \in S_r$, esto es, en $\varphi_t(x)$, la condición sobre $\dot{L}(x)$ puede interpretarse como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L(\varphi_t(x)) &= \nabla L(\varphi_t(x)) \cdot \varphi_t'(x), \\ &= \nabla L(\varphi_t(x)) \cdot f(\varphi_t(x)), \end{aligned}$$

y al evaluar en $t = 0$ obtenemos

$$\left. \frac{d}{dt}L(\varphi_t(x)) \right|_{t=0} = \nabla L(x) \cdot f(x). \quad (2.12)$$

Recordemos que el producto interno de dos vectores está dado por $u \cdot v = |u||v| \cos \theta$, donde θ es el ángulo formado entre el vector u al vector v (con punto base en el origen). Así pues, si el producto interno en (2.12) es negativo, entonces el ángulo entre el vector normal $\nabla L(x)$ y el vector tangente $f(x)$ está en el intervalo $(\pi/2, 3\pi/2)$. En otras palabras, $f(x)$ “apunta” hacia el interior de la superficie de nivel S_r y esto a la vez, implica que la curva solución *entra* a S_r (ver Figura 2.1). Si esto ocurre para cada $r > 0$, es intuitivo esperar que $\varphi_t(x) \rightarrow \hat{x}$, pues $\hat{x} \in S_r$ para todo r . El caso en que el producto interno sea cero, se discute en los problemas propuestos.

Teorema 2.3.6 (Teorema de Estabilidad de Lyapunov) *Para el sistema (2.11) con punto de equilibrio \hat{x} , si existe una función de Lyapunov definida en una vecindad de \hat{x} , entonces el punto de equilibrio es estable. Si la función es estricta, entonces \hat{x} es asintóticamente estable.*

La demostración de este resultado puede consultarse en el capítulo 9, sección 3 de [HS].

Ejemplo 2.3.7 Hemos visto que $x' = -x^3$ tiene un punto de equilibrio en $\hat{x} = 0$ pero su linealización no aporta información sobre su estabilidad. Propongamos la función $L(x) = x^2$ y notemos que

$$\dot{L}(x) = (2x)(-x^3) = -2x^4 < 0$$

para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. No es difícil verificar que L es una función de Lyapunov estricta en todo \mathbb{R} y por lo tanto $\hat{x} = 0$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

2.4. Problemas propuestos

Problema 2.4.1 Desigualdad de Grönwall: Suponga que $a < b$ y sea f, φ y ψ funciones no negativas y continuas definidas sobre $[a, b]$. Suponga además que f es diferenciable en (a, b) con derivada continua y no negativa. Si, para $t \in [a, b]$ se satisface

$$\varphi(t) \leq f(t) + \int_a^t \psi(s)\varphi(s)ds,$$

entonces $\varphi(t) \leq f(t) \exp(\int_a^t \psi(s)ds)$ para toda $t \in [a, b]$.

Problema 2.4.2 Interprete geoméricamente la condición

$$\nabla L(x) \cdot f(x) = 0$$

y explique qué ocurre con la solución $t \mapsto \varphi_t(x)$.

Problema 2.4.3 Verificar que para la ecuación del oscilador armónico

$$x'' + \omega^2 x = 0, \quad \text{con } \omega > 0$$

la energía total define una función de Lyapunov para el punto de equilibrio $\hat{x} = 0$.

Capítulo 3

Puntos regulares y singulares

En el capítulo anterior hemos analizado con gran cuidado el comportamiento local de puntos de equilibrio del sistema $x' = f(x)$, $f \in C^1$ ya sea por el análisis del sistema lineal o por medio de una función de Lyapunov (si ésta existe). Pero en algunos casos, dicha función puede ser difícil de encontrar y, si no existe (esto es, si \hat{x} es un punto de equilibrio inestable) aún queda la pregunta de qué ocurre en una vecindad de \hat{x} .

Otra pregunta por responder es qué podemos decir sobre las soluciones que pasan por puntos que no son de equilibrio.

Definición 3.0.4 *Decimos que $p \in \Omega$ es un punto regular del campo f si $f(p) \neq 0$. De otra forma, p es un punto singular.*

Como lo hemos ya mencionado, los puntos singulares (o puntos de equilibrio) tienen una subclasificación dependiente de los valores propios de $Df(\hat{x})$. Si $\text{Re}(\lambda) \neq 0$ para todo valor propio, entonces el punto singular es hiperbólico. Si algún valor propio es cero (sin que todos los valores propios sean cero) decimos que \hat{x} es *subhiperbólico*. Si todos los valores propios son igual a cero (pero $Df(\hat{x})$ no es cero) entonces el punto singular es *nilpotente*. Finalmente, si $Df(\hat{x}) \equiv 0$, entonces el punto singular es *linealmente cero*.

3.1. Cambios de coordenadas

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$x' = f(x), \quad x \in U \subseteq \mathbb{R}^n \tag{3.1}$$

donde U es un abierto de \mathbb{R}^n . Sea $h : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo y V otro subconjunto abierto. Nos preguntamos ¿cómo se reinterpreta el sistema (3.1) en V y en la variable

$y = h(x)$? Primero notemos que por ser h una biyección, para cada $y \in V$ existe un único $x \in U$ tal que $y = h(x)$. Más aún, el operador lineal

$$Dh(x) : T_x U \rightarrow T_y V$$

actúa sobre los espacios tangentes con punto base en x y y respectivamente y determina un campo vectorial en V definido por

$$g(y) := Dh(h^{-1}(y))(f(h^{-1}(y))) \quad (3.2)$$

Luego, el sistema (3.1) en V se escribe como

$$y' = g(y), \quad y \in V \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Las coordenadas polares son muy útiles en la teoría de ecuaciones diferenciales y desarrollamos con mayor cuidado al discutir un ejemplo de puntos singulares.

3.2. Puntos regulares y rectificación del flujo

El estudio local de puntos regulares de un campo vectorial resulta sorprendentemente simple, tan simple como estudiar el flujo de sistema de ecuaciones en \mathbb{R}^n definido por

$$y'_1 = 1, \quad y'_2 = 0, \dots, y'_n = 0,$$

donde $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. El flujo de este sistema está dado por

$$\psi_t(y) = \psi_t(y_1, \dots, y_n) = (t + y_1, y_2, \dots, y_n)$$

esto es, las curvas solución son líneas rectas paralelas al eje coordenado y_1 que pasan por y y tienden a infinito en la dirección del mismo eje.

Teorema 3.2.1 (Teorema de Rectificación) *Si $p \in \Omega$ es un punto regular de f , entonces existen abiertos U, V de \mathbb{R}^n con $p \in U$, y un difeomorfismo $H : U \rightarrow V$ tal que el sistema de ecuaciones en la variable $y = H(x)$ dado por*

$$y' = DH(H^{-1}(y))f(H^{-1}(y)),$$

se reduce al sistema $y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = (1, 0, \dots, 0)$.

Observación 3.2.2 *En otras palabras, el flujo $\varphi_t(x)$ del sistema no lineal $x' = f(x)$ se comporta como el flujo $\psi_t(y)$ en vecindades de puntos regulares $p \in \Omega$, sin importar que tan complicado pueda ser la expresión de f . Así pues, la geometría de soluciones que pasan por puntos regulares está totalmente entendida.*

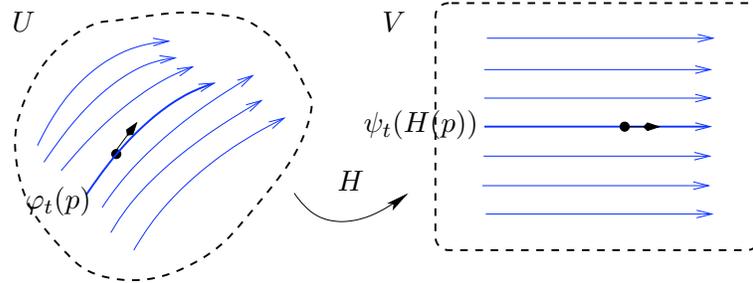


Figura 3.1: La rectificación de las líneas de flujo realizada por el difeomorfismo $y = H(x)$.

Las ideas principales de la demostración de este teorema son las siguientes. Sea $p \in \Omega$ un punto regular y $t \mapsto \varphi_t(p)$ la solución que pasa por ese punto. Iniciamos por rectificar la línea de flujo $\varphi_t(p)$ por medio de un difeomorfismo $H_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $H_0(p) = 0$ y $DH_0(p)f(p) = (1, 0, \dots, 0)$. Esto es H_0 envía el punto regular al origen y el vector tangente en p es enviado al vector e_1 de \mathbb{R}^n . Esto se puede lograr por medio de una transformación afín del tipo $x \mapsto \alpha x + \beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Ahora, H_0 actúa no sólo sobre la línea de flujo de p , también actúa sobre todas las soluciones contenidas en \mathbb{R}^n . Esas soluciones no tienen por que estar rectificadas (esto es, no necesariamente $f(x) = e_1$ para $x \in \mathbb{R}^n - \{p\}$).

Denotemos por $y' = f_1(y)$, donde f_1 es el campo vectorial asociado al cambio de variable H_1 (como se describe en (3.2), donde $f_1 = g$ y $H_1 = h$). Sea $\psi_t(y)$ el flujo asociado al nuevo sistema de ecuaciones diferenciales.

Para rectificar el flujo φ_t en puntos de $y \neq p$, construimos una aplicación (que no es necesariamente un difeomorfismo en todo \mathbb{R}^2)

$$H_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad H_2(y_1, y_2, \dots, y_n) = \psi_{y_1}(0, y_2, \dots, y_n).$$

Observamos que $H_2(0) = 0$ y $DH_2(0)e_j = e_j$ para cada vector de la base ortonormal de \mathbb{R}^n . Esto implica que $DH_2(0)$ es la matriz identidad $n \times n$. Por el Teorema de la Función Inversa, obtenemos la existencia de abiertos $U, V \subset \mathbb{R}^n$ donde $H_2 : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo. Si suponemos que el sistema $y' = f_1(y)$ está definido en V , entonces H_2^{-1} induce un tercer sistema de ecuaciones en la variable $z = H_2^{-1}(y)$, digamos $z' = f_2(z)$ y donde $\eta_t(z)$ es su flujo. La identidad (3.2) nos dice que $f_1(H_2(z)) = DH_2(z)f_2(z)$.

Resta ver que el nuevo sistema de ecuaciones es el sistema rectificado para cada $z \in U$. Sea $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in U$ arbitrario y consideremos la curva $\gamma(t) = (z_1 + t, z_2, \dots, z_n)$ que pasa por z en el tiempo t , notemos que tiene vector tangente e_1 en z . Haciendo los cálculos necesarios, obtenemos

$$DH_2(z)e_1 = f_1(H_2(z))$$

y como H_2 es un difeomorfismo, su derivada es invertible y obtenemos,

$$e_1 = DH_2^{-1}(z)f_1(H_2(z)) = DH_2^{-1}(z)DH_2(z)f_2(z),$$

esto es $f_2(z) = e_1$ y hemos acabado.

3.3. Explosión de un punto singular

Analizaremos por medio de un ejemplo particular las técnicas que se han desarrollado en ecuaciones diferenciales para entender la estabilidad de puntos singulares linealmente cero. Este ejemplo es tomado del libro [Ch] del capítulo 1, sección 1.

Consideremos el sistema en \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} x' &= x^2 - 2xy, \\ y' &= y^2 - 2xy \end{aligned}$$

y denotemos por $u = (x, y)$, $F(u) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$. Un cálculo directo nos resulta que sólo el origen, $\hat{u} = (0, 0)$, es un punto singular. La parte lineal del campo resulta

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 2y & -2x \\ -2y & 2y - 2x \end{pmatrix}$$

por lo que \hat{u} es un punto singular linealmente cero.

¿Será posible encontrar una función de Lyapunov? En vez de buscarla por “prueba y error”, proponemos un cambio de variable que pueda simplificar el análisis del sistema. Por la forma de las ecuaciones, proponemos coordenadas polares.

La aplicación $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que transforma $P(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ es continua, tiene derivada continua y es sobreyectiva, pero claramente no es inyectiva, pues $P(r, \theta) = (r, \theta + 2\pi)$ para todo θ . Si restringimos el dominio a regiones de la forma

$$R_{\theta_0} = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi\}$$

la función se vuelve inyectiva. Obviamente, no deseamos que P sea dependiente del dominio R_{θ_0} , por lo que hacemos la siguiente identificación. Denotemos por

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

el cilindro en \mathbb{R}^3 y por medio de la función $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{C}$ $h(r, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, r)$ enviamos cada R_{θ_0} en el cilindro, identificando las fronteras $(r, \theta_0) \sim (r, \theta_0 + 2\pi)$. Observar que la línea $\{(r, \theta) \mid r = 0\}$ es enviada al ecuador del cilindro.

Podríamos ya hablar de un cambio de variable, sin embargo, ¡no existe inversa en vecindades del origen! Efectivamente, el ecuador en \mathcal{C} es enviado al origen bajo P . Por lo tanto, sólo podemos garantizar la existencia de una inversa en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Denotemos la inversa por L . Luego, el campo vectorial $F(u)$ induce por medio del cambio de variable $h \circ L$ y la identidad (3.2), un nuevo campo vectorial $G(v)$ sobre el cilindro, y donde $v = (r, \theta \bmod 2\pi) \in \mathcal{C}$.

Estudiamos el sistema $v' = G(v)$ el cual se reduce a

$$\begin{aligned} r' &= r(\cos^3 \theta - 2 \cos^2 \theta \sin \theta - 2 \cos \theta \sin^2 \theta + \sin^3 \theta) \\ \theta' &= 3 \cos \theta \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta). \end{aligned}$$

Observación 3.3.1 *Como \hat{u} es enviado al ecuador por $h \circ L$, estudiar cómo se comportan las soluciones en una vecindad del origen en el plano (x, y) , es lo mismo que estudiar el comportamiento de soluciones en una vecindad del ecuador en el cilindro.*

Estudiamos primero cómo se comporta el campo G cuando se restringe al ecuador, esto es, cuando $r = 0$. Al substituir en G , sólo sobrevive la segunda componente del campo, y al igualarla a cero, encontramos

$$3 \cos \theta \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta) = 0$$

si y sólo si $\theta \in \{0, \pi/4, \pi/2, \pi, 5\pi/4, 3\pi/4\}$. Esto es, existen seis nuevos puntos de equilibrio (o singulares) del campo G . Ahora debemos estudiar la estabilidad local de cada punto singular $\hat{v}_j = (0, \theta_j)$ con θ_j en el conjunto de ceros descrito arriba. Esto se logra al estudiar, para cada $j = 1, \dots, 6$ el sistema

$$v' = DG(\hat{v}_j)v.$$

Para este ejemplo, cada \hat{v}_j resulta ser un punto singular hiperbólico. Por ejemplo, para $v_2 = (0, \pi/4)$ se obtiene

$$DG(0, \pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esto es, en la dirección radial (asociada al primer vector columna) las soluciones convergen al punto \hat{v}_2 , mientras que en la dirección angular las soluciones se alejan del punto singular. El plano fase asociado al ecuador se representa en la Figura 3.2, donde se intercalan puntos sillas con fuentes.

Finalmente, el plano fase en las coordenadas cartesianas representado en la misma figura está garantizado por el Teorema de Hartman-Grobman. Según la estabilidad de Lyapunov, se concluye que $\hat{u} = (0, 0)$ es inestable.

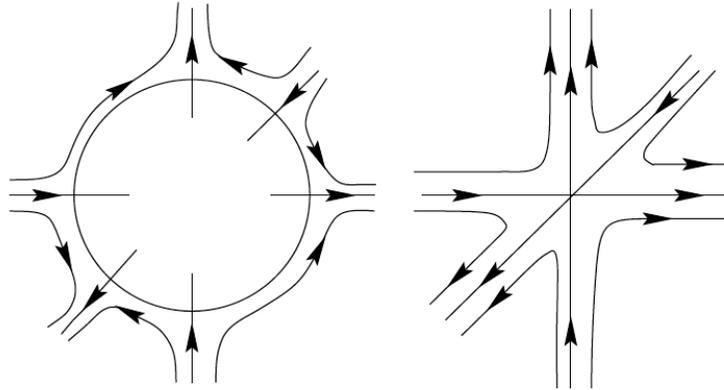


Figura 3.2: El plano fase del círculo en el cilindro y el plano fase en una vecindad del origen en el plano cartesiano (Chicone, 2006).

Observación 3.3.2 *Este proceso de cambiar a coordenadas polares en una vecindad de un punto singular y substituir éste por una circunferencia (donde definimos un nuevo sistema de ecuaciones) es conocido como explosión (o blowup) polar del punto singular. Notemos que, en principio, nada nos asegura que obtendremos un sistema donde los puntos de equilibrio son hiperbólicos y quizás sea necesario realizar una nueva explosión polar. Si después de un cierto número de explosiones logramos obtener puntos singulares hiperbólicos (como en el ejemplo) hemos logrado desingularizar el campo vectorial.*

3.4. Problemas propuestos

Problema 3.4.1 *Analice la estabilidad de los siguientes sistemas por medio de linearizaciones, funciones de Lyapunov o cambios de coordenadas, según sea necesario.*

1. $x' = 4y - x^2z$,
 $y' = -x + 4y + xy^2$,
 $z' = -10z + yz^2$.
2. $x' = y + x(x^2 + y^2)$,
 $y' = -x + y(x^2 + y^2)$.
3. $x' = y + ax^2$
 $y' = bx^2$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

Capítulo 4

Conjuntos límite de flujos en \mathbb{R}^2

En este último capítulo, discutimos desde el punto de vista topológico el comportamiento asintótico de soluciones de una ecuación diferencial $x' = f(x)$, donde ahora $x \in \mathbb{R}^2$ y $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Veremos que sólo para ecuaciones en el plano, los conjuntos donde se acumulan las soluciones en tiempo positivo o negativo están totalmente determinados.

4.1. Propiedades de conjuntos límite

Consideremos el sistema en \mathbb{R}^2 definido por $x' = f(x)$, por $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Sea $\varphi_t(x)$ el flujo asociado al sistema.

Definición 4.1.1 (Conjuntos límite) Sean $x, p \in \Omega$ y $\varphi_t(x)$ la solución que pase por el punto x . Decimos que p es un punto ω -límite de x si existe una sucesión monótona creciente de tiempos $t_k \rightarrow \infty$ tal que

$$\varphi_{t_k}(x) \rightarrow p.$$

El conjunto de todos los puntos ω -límite de x se escribe como $\omega(x)$. Bajo las mismas ideas, pero con tiempos negativos tendiendo a $-\infty$, definimos un punto α -límite y su conjunto $\alpha(x)$. Si una solución periódica Γ está contenida en el α - o el ω -límite de un punto x que no pertenece a Γ , entonces decimos que Γ es un ciclo límite de x .

Proposición 4.1.2 Todo conjunto límite (ya sea $\alpha(x)$ u $\omega(x)$) es cerrado.

La demostración es sencilla, sólo basta ver que $\omega(x)$ contiene a todos sus puntos de acumulación (el caso de $\alpha(x)$ es similar).

Ejemplo 4.1.3 Para el caso $x' = Ax$ con $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ y valores propios con parte real negativa, el origen es un pozo. De aquí que para todo $x \in \mathbb{R}^2$, $\omega(x) = \{0\}$ y $\alpha(x)$ es vacío.

Ejemplo 4.1.4 *La ecuación de Van der Pol es uno de los ejemplos más importantes en las ecuaciones diferenciales no lineales. Se origina del estudio realizado por Rayleigh en 1883, donde la ecuación*

$$x'' + \mu(x^3 - 1)x' + \omega^2 x = 0$$

representa un modelo de vibraciones para la lengüeta de un clarinete. Esta ecuación tiene aplicaciones muy diversas dentro de la física y la biología, como lo demostró Van der Pol con el estudio de la variación de voltaje en circuitos eléctricos o los latidos del corazón.

Una variación de la ecuación de Van der Pol está dado por el sistema no lineal

$$\begin{aligned} x' &= y - x^3 + x, \\ y' &= -x. \end{aligned}$$

Este sistema exhibe un punto de equilibrio inestable en el origen y una solución periódica asintóticamente estable que rodea el origen. Cualquier otra curva solución del sistema tiene por ω -límite dicha curva, lo que la convierte en un ciclo límite del sistema, mientras su α -límite puede ser vacío o igual al origen, dependiendo de su condición inicial (ver Figura 4.1). Un estudio detallado de este sistema puede encontrarse en [HS], Capítulo 10.

La pregunta principal es ahora la siguiente: ¿Hay otros casos geométricos de conjuntos límites? Si nos restringimos a sistemas de ecuaciones sobre el plano \mathbb{R}^2 , entonces la respuesta está bien determinada por el Teorema de Poincaré-Bendixson.

4.2. El Teorema de Poincaré-Bendixson

Consideremos un sistema en el plano

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y), \\ y' &= g(x, y) \end{aligned}$$

donde f, g son funciones continuamente diferenciales definidas sobre un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Denotemos por $\varphi_t(x, y)$ el flujo asociado al sistema. El siguiente es una versión simplificada de Teorema de Poincaré-Bendixson.

Teorema 4.2.1 *Un conjunto límite no vacío y compacto de un flujo C^1 sobre el plano \mathbb{R}^2 que no contiene puntos de equilibrio, es una órbita cerrada.*

De forma más general, todo conjunto compacto y no vacío que representa un conjunto límite de un flujo en el plano, puede reducirse a la unión finita de puntos de equilibrio y ciclos límite.

Omitiremos la demostración del teorema anterior, refiriendo al lector a la exposición clásica del libro de Hirsch & Smale, (Capítulo 11). Sin embargo, es importante hacer notar por

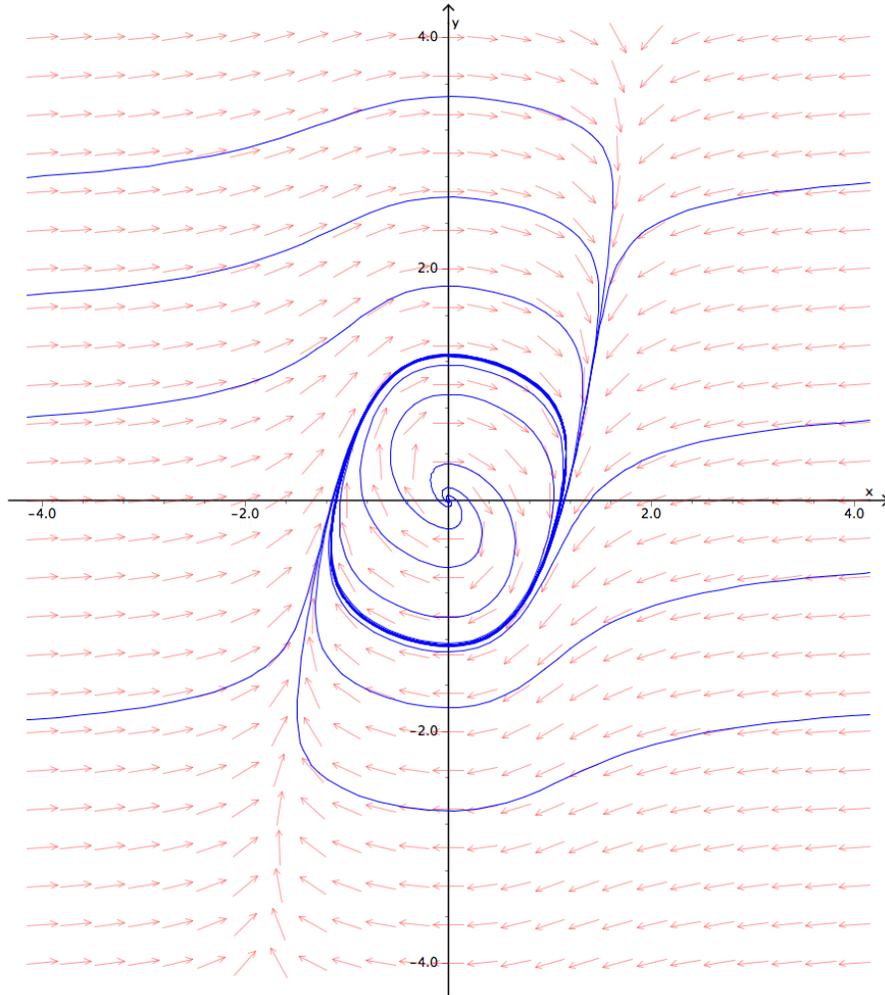


Figura 4.1: El plano fase asociado al sistema no lineal del Ejemplo 4.1.4. Se exhibe un ciclo límite asintóticamente estable.

qué este resultado sólo es válido en sistemas de ecuaciones sobre el plano real. Iniciemos analizando un ejemplo sobre el 2-toro.

Ejemplo 4.2.2 *El sistema lineal sobre $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dado por*

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_1, \quad \frac{dy}{dt} = \alpha_2$$

donde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ son constantes, puede integrarse de forma explícita. El flujo asociado al sistema está dado por

$$\varphi_t(x, y) = (x + t\alpha_1, y + t\alpha_2) \pmod{1}.$$

Las curvas solución pueden visualizarse fácilmente al hacer la identificación de \mathbb{T}^2 con I^2/\sim , donde $I^2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ y se identifican de los lados opuestos, esto es $(0, y) \sim (1, y)$ y $(x, 0) \sim (x, 1)$. Así pues, la solución que pasa por el punto $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ es una línea recta $t \mapsto (x + mt, y + mt) \pmod{1}$ con pendiente $m = \alpha_2/\alpha_1$.

Si en particular, la pendiente es un número irracional, entonces toda curva solución es densa en \mathbb{T}^2 . Esto es, el α - o el ω -límite de cualquier punto $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ resulta ser todo el toro.

La demostración del Teorema de Poincaré-Bendixson está basada en dos hechos: el Teorema de la Curva de Jordan y secciones transversales al flujo.

Por un lado, el Teorema de la Curva de Jordan establece que dada una curva simple y cerrada sobre el plano \mathbb{R}^2 entonces su complemento consiste de dos componentes conexas, una acotada y otra no acotada. Aunque este resultado es simple, su demostración requiere de técnicas sofisticadas (ver por ejemplo el artículo de T. Hales, [H]). Observemos que para otras superficies, este teorema no es necesariamente cierto (es fácil convencerse que existen curvas simples cerradas sobre el 2-toro cuyo complemento consiste de una sola componente).

Dado un sistema de ecuaciones $\bar{x}' = f(\bar{x})$, con $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, sea H un subespacio lineal de \mathbb{R}^n cuya dimensión satisfice $\dim H = n - 1$ (esto es, H tiene *codimensión* uno). Una sección transversal al flujo, denotada por Σ , es un subconjunto abierto de H tal que $\bar{0} \in \Sigma$ y para todo $\bar{x} \in \Sigma$, $f(\bar{x}) \notin H$. Se sigue que Σ no contiene puntos de equilibrio del sistema.

Podemos derivar un ejemplo sencillo de una sección transversal para el sistema en \mathbb{R}^3

$$x' = 1, \quad y' = 0, \quad z' = 0$$

donde el campo $f(x, y, z) = (1, 0, 0)$ está ya rectificado. El subespacio de codimensión uno está dado por $H = \{(x, y, z) \mid x = 0\}$ y podemos proponer el abierto $\Sigma = H$. Claramente $\bar{0} \in \Sigma$ y además, las líneas de flujo $\varphi_t(x, y, z) = (x + t, y, z)$ son transversales a Σ , pues

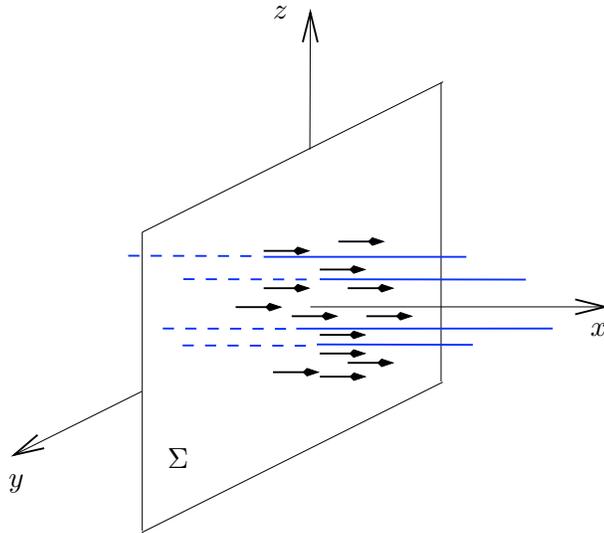


Figura 4.2: Sección transversal a las líneas del flujo $\varphi_t(x, y, z) = (x + t, y, z)$ (en azul).

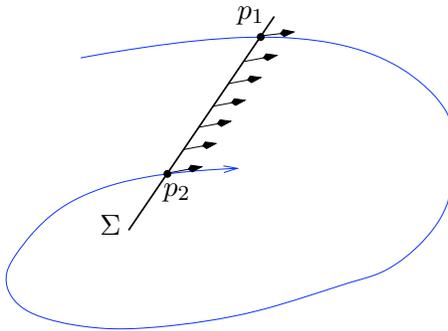


Figura 4.3: Sección transversal a una curva solución que cruza Σ en dos puntos.

dado que el campo es constante, tenemos que $f(0, y, z) = (1, 0, 0) \notin \Sigma$ para cualquier valor de y y z . Geométricamente, las líneas de flujo y el campo son ortogonales a la sección transversal (ver Figura 4.2).

En el caso de un sistema de ecuaciones en \mathbb{R}^2 , la existencia de una sección transversal se obtiene a partir del Teorema de Rectificación. Es claro que dicha sección tendrá (co)dimensión uno. Luego, si existe una curva solución $\gamma(t) = \varphi_t(x_0, y_0)$ que sea transversal a Σ e intersecte la sección de varios puntos distintos, digamos $p_i = \gamma(t_i) \in \Sigma$ para $t_1 < t_2 < \dots < t_k$, entonces podemos ordenar los puntos p_i con respecto a $\gamma(t)$ y con respecto a la sección Σ . Efectivamente, por ser Σ un abierto contenido en un subespacio de dimensión uno (eso es, un intervalo) existe naturalmente un orden lineal de los puntos p_i . Esto es un punto clave en la demostración del Teorema de Poincaré-Bendixson.

Bibliografía

- [A] Arnol'd, Vladimir I. *Ordinary differential equations*, Springer Textbook, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [Ch] Chicone, Carmen. *Ordinary differential equations with applications*, Texts in Applied Mathematics, Vol. 34, Ed. 2, Springer, New York, 2006.
- [DLIA] Dumotier, Freddy, Llibre, Jaume & Artés, Joan C. *Qualitative theory of planar differential systems*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [H] Hales, Thomas. *The Jordan curve theorem, formally and informally*, The American Mathematical Monthly, 114 **10** 882–894, 2007.

Disponible en:

http://mathdl.maa.org/images/upload_library/22/Ford/hales882.pdf

- [HS] Hirsch, Morris W. & Smale, Stephen. *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 60, Academic Press, New York-London, 1974.