

Dimensión de Hausdorff y conjuntos de Julia polinomiales

Jonny Ardila Ardila

Universidad Nacional de Colombia

Junio 2010

Bajo la dirección de

Dra. Mónica Moreno Rocha, CIMAT

Codirigido por

Dr. Serafín Bautista Díaz, UNC

Usando el formalismo termodinámico y la teoría ergódica se calcula la dimensión de Hausdorff de conjuntos de Julia $J_{m,c}$ asociados a la familia de polinomios unicríticos

$$P_{m,c} : z \mapsto z^m + c$$

para $m \geq 2, c \in \mathbb{C}$.

Para el caso $m = 2$, Bodart y Zinsmeister muestran que la dimensión de Hausdorff de $J_{2,1/4}$, denotada por $\dim_H(J_{2,1/4})$, es continua por la izquierda para el parámetro parabólico $c = 1/4$. Los trabajos de Lavaurs y Douady muestran que la discontinuidad de $\dim_H(J_{2,1/4})$ por la derecha, incluso, como conjuntos, $J_{2,1/4+\epsilon}$ no convergen (en la distancia de Hausdorff) a $J_{2,1/4}$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. En cambio, para perturbaciones $1/4 - \epsilon$ se sabe que los conjuntos de Julia varían de forma continua bajo movimientos holomorfos.

En este trabajo se muestra que para el caso $m > 2$ la función $\dim_H(J_{m,c})$ también es discontinua por la derecha para c , un parámetro parabólico. Esto se demuestra siguiendo el desarrollo del artículo de Douady, Sentenac y Zinsmeister donde se discute el caso $m = 2$. El resultado principal es el siguiente.

Teorema 0.1. Si $J_{0,\sigma}$ denota el conjunto de Julia-Lavaurs asociado a $P_{m,c}$ y J_{ϵ_n} denota el conjunto de Julia de $P_{m,1/4+\epsilon_n}$, se tiene

(1) Si $\epsilon_n \rightarrow 0$ en \mathbb{R}^+ a modo que $(-\pi/\sqrt{\epsilon_n}) \pmod{1}$ tiende a $\sigma \in U \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ entonces

$$\dim_H(J_{\epsilon_n}) \rightarrow \dim_H(J_{0,\sigma})$$

(2) La función $\sigma \mapsto \dim_H(J_{0,\sigma})$ es continua en U y para todo $\sigma \in U$ tenemos,

(a) $\dim_H(J_0) < \dim_H(J_{0,\sigma})$,

(b) $\dim_H(J_{0,\sigma}) < 2$.

Palabras clave: Bifurcación parabólica, conjunto de Julia-Lavaurs, dimensión de Hausdorff.