CIMAT

90DSI02 Dinámica Holomorfa Mayo 8, 2007

Tarea 11

En todos los problemas f denota una función en $\mathrm{Rat}_d(\overline{\mathbb{C}})$, con $d \geq 2$.

1. (Ref. Problema 1, Tarea 10) Sea $f(z) = P(z)/Q(z)$ y considere la perturbación
$$f_t(z) = \frac{(1-t)P(z) + tz^d}{(1-t)Q(z) + t},$$
definida para toda $t \in \mathbb{C}$. Suponga que z_0 es punto periódico indiferente (de periódo m) de f_0 y $\lambda_0 = \lambda(z_0) \neq 1$. Defina a $z(t)$ y $\lambda(t)$ como en la tarea pasada. Demuestre lo siguiente:

   (a) $\deg f_t = d$, excepto para un número finito de valores t.

   (b) Defina $E(\theta) = \mathrm{signo}(\log|\lambda(t)|)$. Entonces
$$E^*(\theta) = \lim_{\rho \to 0} E(\rho e^{i\theta}),$$
existe excepto en un número finito de puntos, E^* es una suma de funciones escalón (para casi todo θ) y por lo tanto
$$\int_0^{2\pi} E^*(\theta) d\theta = 0.$$

2. Demuestre que $J(f) = \{z \mid \forall\, U = U(z) : f|_U \text{ es caótica}\}$.

3. (Problema 19.a de Milnor) Demuestre que el conjunto no errante, $\Omega = \Omega(f)$, coincide con la unión disjunta de $J(f)$, sus dominios de rotación (si estos existen) y $\mathrm{Per}(f)$.

4. (Problema 19.b) Demuestre que f satisface el Axioma A si y sólo si f es hiperbólica.

5. (Problema 19.e) Demuestre que f es *expansiva* en una vecindad de $J(f)$ si y sólo si f es hiperbólica.

Definiciones a la vuelta...

Sistema Caótico: Un sistema dinámico (f, X) es caótico (en el sentido de Devaney) si

- $\mathrm{Per}(f)$ es denso en X,
- f es transitiva,
- f tiene sensitividad a condiciones iniciales.

Expansividad: Sea (X, d) un espacio métrico, $U \subset X$ y $f : X \to X$ dada. Entonces f es expansiva sobre U si existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualesquier dos puntos $a, b \in X$ $a \neq b$, tales que $f^k(a), f^k(b) \in U$ para toda k, existe $N \geq 0$ tal que $d(f^N(a), f^N(b)) > \varepsilon$.

Conjunto No Errante: $x \in \Omega(f)$ si para toda vecindad $U = U(x)$, existe un $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap U \neq \emptyset$.

Fecha de entrega: Mayo 17, 2007 en clase.