CIMAT

90DSI02 Dinámica Holomorfa Marzo 8, 2007

Tarea 5

1. Sea $f \in \mathrm{Rat}_d(\overline{\mathbb{C}})$ de grado $d \geq 2$ y $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ la linearización global de Kœnigs para z_0 fijo y geométricamente atractor. Demuestre que $\omega \in \mathcal{A}$ es un punto crítico de φ si y sólo si $\mathcal{O}_f^+(\omega)$ contiene un punto crítico de f.

2. Considere $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ un polinomio mónico de grado $n \geq 2$. Entonces pruebe que para un $R >> 1$ y $V = \{z : |z| > R\}$ existe un biholomorfismo local $\Phi : V \to \mathbb{C}$ con expansión
$$\Phi(z) = bz + b_0 + \frac{b_1}{z} + \ldots,$$
y satisface $\Phi(f(z)) = (\Phi(z))^n$. Además Φ es única salvo una constante multiplicativa ω, con $\omega^{n-1} = 1$.

3. Muestre que para el polinomio $p(z) = z^2 - z^3$, la uniformización de Böttcher φ sobre $\mathcal{A}(0)$ no admite una continuación analítica a todo $\mathcal{A}(0)$. Determine la localización y tipo de singularidades que evitan dicha continuación.

4. Sea D un dominio simplemente conexo y conformamente isomorfo al disco unitario $\mathbb{D}$. Sea $\zeta \in D$ arbitrario y $\varphi : D \to \mathbb{D}$ su uniformización de Riemann, tal que $\varphi(\zeta) = 0$. Demuestre que $G(z) = -\log|\varphi(z)|$ es la función de Green para D con polo en ζ.

5. Dado $\lambda = \exp(2\pi i\theta)$ y θ irracional, suponga que existe una solución φ a la ecuación de Schröder
$$\varphi(f(z)) = \lambda\varphi(z),$$
normalizada por $\varphi'(0) = 1$. Si $\psi = \varphi^{-1}$, demuestre que ψ es univalente en el disco $\mathbb{D}_r = \{z : |z| < r\}$ para $r > 0$ arbitraria.

Fecha de entrega: Marzo 15, 2007 en clase.