CIMAT

90DSI02 Dinámica Holomorfa Marzo 15, 2007

Tarea 6

1. Demuestre que el conjunto de Julia para un polinomio de grado $d \geq 2$ es *totalmente disconexo* si $\mathcal{A}(\infty)$ contiene *todos* los puntos críticos del polinomio.

2. Considere la familia de polinomios cuadráticos $P_c(z) = z^2 + c$ y defina el conjunto de Mandelbrot como $\mathcal{M} = \{c : |P_c^n(0)| \leq 2 \text{ para toda } n \geq 0\}$. Demuestre que el complemento $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}$ es un dominio conexo. (Hint: Principio del Módulo Máximo.)

3. Considere el polinomio $P(z) = z + z^{n+1}$, sea ω una raíz n–ésima de la unidad y ζ una raíz n–ésima de -1.

   (a) Muestre que P preserva las líneas $t\omega$ y $t\zeta$ para toda $t \in \mathbb{R}$.

   (b) Para los polinomios $P(z) = z + z^4$ y $Q(z) = -z + z^4$, calcule todos los vectores unitarios atractores y repulsores. Represente estos vectores (y sus pétalos atractores) esquemáticamente.

4. Determine todos los polinomios de grado 3 (salvo conjugaciones) que tiene exactamente un dominio de Leau (pétalo atractor) y exactamente un dominio de Schröder. (Hint: Problema 3, tarea 4.)

5. Sea $f : U \subset \mathbb{C} \to f(U)$ un difeomorfismo tipo C^1 con coordenadas $z = x + iy \in U$ y $w = u + iv \in f(U)$. Denote

   $$f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y) \text{ y } f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y).$$

   Suponga que si U contiene el disco unitario $\mathbb{D}$. Demuestre que df es una transformación lineal que manda $\mathbb{D}$ a una elipse de eje mayor α y eje menor β, y el Jacobiano satisface

   $$J_f = \alpha\beta = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2.$$

Fecha de entrega: Marzo 22, 2007 en clase.