CIMAT

90DSI02 Dinámica Holomorfa Marzo 22, 2007

Notas y Tarea 7

Lección 18

Del artículo de Mitsuhiro Shishikura, leer §2.3 (Écalle Cylinders) y §2.4 (Transition Map). Para un repaso de la Lección 17 pueden consultar las secciones §2.1, 2.2 y 2.5.

Tarea 7

1. Dado $f(z) = z - 1/z$, pruebe que existe un punto parabólico en infinito con dos direcciones atractoras. Además pruebe que $J = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

2. Dado $f(z) = z + 1/(1 + z^2)$ demuestre que existen tres direcciones atractoras al infinito. Además pruebe que una de las tres cuencas inmediatas parabólicas contienen a todo $\mathbb{R}$, y por lo tanto *casi* separa la esfera de Riemann.

3. Demostración de la propiedad (2), Proposición de Shishikura (en el artículo, proposición 2.5.2, parte (i)).

4. Considere la perturbación $Q_\varepsilon(z) = \varepsilon + z + z^2$ con $\varepsilon > 0$ pequeño. Describa la dinámica local de los puntos fijos de Q_ε.

   Nota: El cambio de coordenadas

   $$w = h(z) = \frac{1}{2i\sqrt{\varepsilon}} \log\big(\frac{z - i\sqrt{\varepsilon}}{z + i\sqrt{\varepsilon}}\big),$$

   conjuga Q_ε con

   $$F_\varepsilon(w) = w + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \arctan\big(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1 + z}\big)$$

   (no es necesario verificarlo). Para ε y w pequeños, F_ε actua como $w \mapsto w + 1 + o(1)$ *(esto es fácil de ver, no hay que justificarlo).*

5. A partir de los dominios fundamentales para F_ε, construya los "cuernos" asociados a Q_ε y los cilindros de Écalle. ¿Cómo puede definirse la transformación de Écalle asociada a estos cilindros? (Hint: ver §3 del artículo).

Fecha de entrega: **Abril 12**, 2007 en clase.