CIMAT

90DSI02 Dinámica Holomorfa Abril 13, 2007

Tarea 8

1. Sea $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 \ldots$, donde λ es distinto de cero y no es una raíz de la unidad. Demuestre que existe una única serie de potencias formal
$$H(z) = z + h_2 z^2 + h_3 z^3 + \ldots,$$
que satisface
   (a) $H(\lambda z) = f(H(z))$ en una vecindad del origen.
   (b) Para $n \geq 2$,
   $$h_n = \frac{a_n + X_n}{\lambda^n - \lambda},$$
   donde $X_n = X(a_2, \ldots, a_{n-1}, h_2, \ldots, h_{n-1})$ es un polinomio definido inductivamente.
   (c) Por medio de un ejemplo específico, concluya que si λ es de tipo Liouville, entonces H tiene radio de convergencia cero.
2. Considere el polinomio $p_\lambda(z) = z^2 + \lambda z$ con punto crítico $-\lambda/2$ y $\lambda \in \mathbb{D}$. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, defina los números
$$\eta_n = \eta_n(\lambda) = \frac{f_\lambda^n(-\lambda/2)}{\lambda^n}.$$
Demuestre lo siguiente:
   (a) $\eta(\lambda) := \lim_{n\to\infty} \eta_n$ es una función bien definida, holomorfa para todo $\lambda \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ y tiene una singularidad removible en $\lambda = 0$.
   (b) Sea $|\lambda_0| = 1$. El límite
   $$\lim_{\lambda\to\lambda_0, |\lambda|<1} \eta(\lambda)$$
   esta definido y es igual a cero si y sólo si p_{λ_0} tiene un punto parabólico o un punto Cramer en $z = 0$.

Fecha de entrega: Abril 19, 2007 en clase.