CIMAT

90DSI01 Sistemas Dinámicos I Octubre 25, 2006

Automorfismos Hiperbólicos del Toro

La siguiente es una guía sobre automorfismos del toro y la tarea asignada para la semana del 30 de Octubre al 3 de Noviembre. Les recomiendo las exposiciones de Robinson y Katok & Hasselblatt, pero pueden utilizar cualquier otro libro.

I. Descripción del mapa y dinámica

1. Descripción del mapa F_A sobre el toro $\mathbb{T}^2$ asociado a la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. Propiedades de A y F_A: valores y vectores propios, ortogonalidad de líneas propias.
3. Representación de la acción de F_A en $[0,1] \times [0,1]$ con la identificación de los lados.
4. Probar la Proposición 1.8.1 en Katok & Hasselblatt (número infinito de puntos periódicos, puntos periódicos son densos en $\mathbb{T}^2$ y F_A es top. transitiva).

II. Hiperbolicidad

1. Definir una partición de Markov a partir de las líneas propias (ver por ejemplo, Brin, sección 5.12).
2. Describir las variedades estable e inestable de un punto p en $\mathbb{T}^2$ arbitrario.
3. Probar que F_A tiene estructura hiperbólica en $\cup_{n\geq 1}\mathrm{Per}_n(F_A)$, esto es F_A satisface las cuatro propiedades de hiperbolicidad para todo punto periódico (seguir ideas de Robinson, Teorema 5.1 en la sección 7.5).
4. Concluir que F_A es Anosov.

III. Tarea 12

1. Probar que para el mapa F_A y cualquier punto $p \in \mathbb{T}^2$, las variedades estable e inestable son invariantes y densas en el toro.

2. Probar que los puntos homoclínicos de F_A son densos en $\mathbb{T}^2$.

3. Considere el mapa F_B sobre el toro asociado a la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Pruebe que sus puntos periódicos son densos en $\mathbb{T}^2$. ¿ Es la acción de F_B hiperbólica en $\mathbb{T}^2$?

Fecha de entrega para la tarea: Noviembre 6, 2006, en clase.