CIMAT

90DSI01 Sistemas Dinámicos I Agosto 23, 2006

Tarea 2

1. Pruebe la primera implicación del teorema de transitividad topológica visto en clase.

2. Sea $K$ el conjunto ternario de Cantor en el intervalo $[0, 1]$. Denote por $(x)_n$ la representación en base $n$ del número $x$ y sea $j : [0, 1] \to S^1$ dado por $j(x) = \exp(2\pi i x)$. Muestre lo siguiente:

   (a) Cada punto $x \in K$ tiene una única representación en base 3 de la forma $(x)_3 = 0.x_1 x_2 x_3 \ldots$, con $x_k \in \{0, 2\}$.

   (b) $j(K)$ es un conjunto totalmente invariante bajo la acción de $E_3$.

   (c) Sea $h : K \to [0, 1]$ la función tal que

   $$(h(x))_2 = 0.\frac{x_1}{2}\frac{x_2}{2}\frac{x_3}{2}\ldots.$$

   Entonces $h$ es una función continua, monótona e inyectiva excepto en los puntos $y = k/2^n \in [0, 1],\ n \in \mathbb{N}, k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$, donde $h^{-1}(y)$ tiene dos preimagenes.

   (d) Muestre que $j \circ h \circ E_3 = E_2 \circ j \circ h$.

   (e) Sea $A \subset [0, 1]$ conjunto denso y tal que no contiene puntos de la forma $k/2^n$, con $n$ y $k$ descritos anteriormente. Entonces $h^{-1}(A)$ es denso en $K$.

   (f) Sea $x \in [0, 1]$ tal que $j(x)$ tiene una órbita densa bajo $E_2$. Entonces $h^{-1}(x) \in K$ tiene una órbita densa bajo $E_3$.

   (g) Concluya que $E_3$ tiene un conjunto mínimo homeomorfo a $K$.

Fecha de entrega: Agosto 28, 2006, en clase.